

L-functions for generic cusp forms on $GSp(2) \times GL(2)$

上智大学理工学部 森山 知則
(Tomonori Moriyama)

§0. Introduction

本稿では、次数 2 の Siegel 尖点形式 F と一変数尖点形式 φ の組から定まる 8 次のオイラー積をもつ L -関数 (以下, degree 8 L -関数という) について論じる。詳しくは, 尖点形式 F が大域的 Whittaker 模型を持ち, 無限素点で非正則な離散系列表現を生成する場合等に, 問題の L -関数が有理型関数に解析接続され, 期待される関数等式を満たすことを示すとともに, 可能な極の位置を決定する。

ここでの証明は, M. Novodvorsky [No] が 1970 年代後半に導入した degree 8 L -関数の積分表示を用いる。この積分表示法における実素点における寄与は, $GSp(2, \mathbf{R})$ および $GL(2, \mathbf{R})$ 上の Whittaker 関数の積分変換 (=実素点における局所ゼータ積分) として与えられる。本稿では, 最近 10 年くらいの間に得られた $GSp(2, \mathbf{R})$ 上の Whittaker 関数の公式 ([O], [M-O], [Mo-1], [Is], [Is-Mo]) によって局所ゼータ積分を計算することで上述の結果を示す。保型形式の「重さ」にある条件を課した場合には, [Mo-1], [Mo-3] で述べたが, 今回この条件をはずした場合も扱うことができた。

ところで, D. Soudry [So-2] は簡約リー群上の Whittaker 関数の漸近展開を用いて, $SO_{2l+1} \times GL_n$ の無限素点における局所ゼータ積分が全 s -平面に有理型に解析接続されることを証明している。本稿の場合においてもこの手法によって, degree 8 L -関数の解析接続が証明できると期待される (本稿で考察する場合の一部は, [So-2] における $SO_5 \times GL_2$ にあたる)。但し, このやり方で, L -関数の possible poles を決めることが可能かどうかは筆者には不明である。

なお, 大域的 Whittaker 模型を持たない尖点形式 (たとえば, 正則尖点形式) については, Novodvorsky の積分表示法は適用できないので, 別の積分表示を用いる必要がある。そのようなものは, M. Furusawa [Fu] と B. Heim [H] によってそれぞれ与えられていることを注意しておく ([B-H] も参照)。

全体の構成は次のとおり: §1 で主定理を定式化し, §2, 3 で Novodvorsky の積分表示とそこで必要な $GL(2)$ 上の Eisenstein 級数についてまとめる。§4 で必要な計算をして, 主結果を証明する。既知の事実をまとめた §2, 3 が長くなり, 肝心の §4 が短くなってしまった。詳しくは, 準備中の論文を参照していただきたい。

記号 1 (Haar 測度等)

k を代数体とし, その素点 v における完備化を k_v であらわす。 k_v の整数環 \mathcal{O}_v の素イデアルを $\mathfrak{P}_v = (\varpi_v)$ とするとき, $q_v := \#(\mathcal{O}_v/\mathfrak{P}_v)$ とおく。 k のアデール環を \mathbf{A}_k の非自明なユニタリ指標 $\psi: \mathbf{A}_k \rightarrow \mathbf{C}^{(1)}$ を

$$\psi(x) := \mathbf{e}_A(\mathrm{tr}(x)), \quad x \in \mathbf{A}_k,$$

で定める。そうして, 各素点 v に対して, k_v のユニタリ指標 ψ_v を ψ の制限として定義する。 k_v 上の Haar 測度 μ_v を ψ_v に関して self-dual になるようにとる。特に, $k_v \cong \mathbf{R}$ のとき

には, $\psi_v(x_v) = \exp(2\pi\sqrt{-1}x_v)$ なので, μ_v は Lebesgue 測度であり, $k_v \cong \mathbf{C}$ のときには, $\psi_v(x_v) = \exp(2\pi\sqrt{-1}(x_v + \bar{x}_v))$ なので, $\mu_v = |dx_v \wedge d\bar{x}_v| = 2dx'_v \wedge dx''_v$ ($x_v = x'_v + \sqrt{-1}x''_v$) となる。 v が有限素点では, $\mu_v(\mathcal{O}_v) = q_v^{-d_v/2}$ ($d_v := \psi_v$ の order= k_v/\mathbf{Q}_p の differential exponent)。また, k_v^* の Haar 測度は, 有限素点では $d^*t := (1 - q_v^{-1})^{-1} \frac{dt}{|t|_v}$ と正規化し,

無限素点では $d^*t := \frac{dt}{|t|_v}$ とおく。

記号 2 (代数群等)

G を k 上定義された similitude 付きの 2 次 symplectic 群とする:

$$G = GSp(2) := \{g \in GL(4) \mid {}^t g J_4 g = \nu(g) J_4 \text{ for some } \nu(g) \in \mathbf{G}_m\}, \quad J_4 = \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ -1_2 & 0_2 \end{pmatrix}.$$

G の中心は $Z := \{z1_4 \in G \mid z \in \mathbf{G}_m\}$ で与えられる。以下で用いる G の部分代数群等を列挙しておこう。まず, $H := \{h = (h_1, h_2) \in GL(2) \times GL(2) \mid \det(h_1) = \det(h_2)\}$ とおき,

$$H \ni h = (h_1, h_2) \mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} a_1 & & b_1 & \\ & a_2 & & b_2 \\ \hline c_1 & & d_1 & \\ & c_2 & & d_2 \end{array} \right) \in G, \quad h_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix},$$

によって G の部分代数群と見る。 G の極大冪単部分群 N および H の極大冪単部分群 N^H として

$$N := \left\{ n(x_0, x_1, x_2, x_3) := \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & x_1 & x_2 \\ & 1 & x_2 & x_3 \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & x_0 & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & -x_0 & 1 \end{array} \right) \in G \right\}, \quad N^H := N \cap H$$

をとる。また $GL(2)$ の部分代数群 B', Q, N' を

$$B' := \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in GL(2) \right\}, \quad Q := \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2) \right\}, \quad N' := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2) \right\}$$

で定義する。 $GL(2)_{\mathbf{A}_k}$ の極大コンパクト部分群 K' として,

$$K' = \prod_v K'_v = \prod_{v:\text{real}} O(2) \times \prod_{v:\text{complex}} U(2) \times \prod_{v<\infty} GL(2, \mathcal{O}_v)$$

をとる。

§1. 主結果

この節では, $k = \mathbf{Q}$ とする (総実代数体としてもほとんど同じである)。

(1.1) 状況設定.

$\Pi = \otimes' \Pi_v, \sigma = \otimes' \sigma_v$ を $G_{\mathbf{A}_k}$ 及び $GL(2)_{\mathbf{A}_k}$ の尖点保型表現とする。序で述べたように, 次の仮定を置く:

仮定 1. Π は大域的 Whittaker 模型を持つ。

仮定 1 から, 無限素点の表現 Π_∞ は局所 Whittaker 模型を持つが, そのようなものは Kostant/Vogan の結果によって $G_{\mathbf{R}}$ の放物型部分群の共役類と bijective な 4 つのクラスに分けられるが, ここでは, そのうちのひとつを扱う:

仮定 2. $\Pi_\infty|_{Sp(2, \mathbf{R})}$ は $Sp(2, \mathbf{R})$ の 2 つの (limits of) large discrete series $D_{(\lambda_1, \lambda_2)}$ と $D_{(-\lambda_2, -\lambda_1)}$

の直和である ($1 - \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq 0$)。

ここで, $D_{(\lambda_1, \lambda_2)}$ はその極小 K -タイプの最高ウェイトが (λ_1, λ_2) であるような (limits of) large discrete series representation (詳しくは, [O], [Mo-2], [Mo-4] 等を参照)。一方, $GL(2)$ の尖点保型表現 σ は必ず Whittaker 模型をもつから, σ_∞ は次の2つのクラスに分けられる:

(i) $\sigma_\infty|_{SL(2, \mathbf{R})} = D_l \oplus D_{-l}$, $\sigma_\infty(z_\infty) = z_\infty^{c''}$. この表現 σ_∞ を $D_l[c''_\infty]$ で表す。ここで, D_l は極小 $SO(2)$ -type $l \in \{\pm 1, \pm 2, \dots\}$ の離散系列表現またはその極限である。

(ii) σ_∞ が既約主系列表現のとき:

$$\sigma_\infty = \text{Ind}_{\mathbf{B}'_{\mathbf{R}}}^{GL(2)_{\mathbf{R}}} \left(\begin{pmatrix} b_1 & * \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \mapsto |b_1 b_2|^{c''_\infty/2} \epsilon_1(b_1) \epsilon_2(b_2) |b_1/b_2|^{(\nu+1)/2} \right), \quad \text{Re}(\nu) \geq 0.$$

ここで, $\epsilon_i: \mathbf{R}^\times \rightarrow \mathbf{R}^\times / \mathbf{R}_{>0} \rightarrow \{\pm 1\}$ は指標。この表現を, $\text{Ind}_{\mathbf{B}'_{\mathbf{R}}}^{GL(2)_{\mathbf{R}}}(\epsilon_1, \epsilon_2; c''_\infty, \nu)$ で表す。

したがって, $(\Pi_\infty, \sigma_\infty)$ の可能性は, 次の表のようになる:

Π_∞ の種類	(L)DS.	P_J -主系列	P_{\min} -主系列	P_S -主系列
σ_∞ : (L)DS.	今回	左と同様に扱える	yet	yet
σ_∞ : PS.	今回	左と同様に扱える	Niwa	yet

仮定2は, この表の1列目に対応する。表の2列目もほぼ同様に扱えるがここでは略す。また, 3列目の一部 ("spherical case") は [Ni] で扱われている。

(1.2) L -関数.

Π, σ を上のものとするとき, それぞれの中心指標を $\omega_\Pi, \omega_\sigma$ とする。以下, 一般性を損なわないので, 次の約束をしておく。

約束. $\omega_\Pi, \omega_\sigma$ はユニタリとし, $\omega_\Pi \cdot \omega_\sigma = |\cdot|^\rho$, $\rho \in \sqrt{-1}\mathbf{R}$ ならば, $\rho = 0$ とする。

このとき, 各有限素点 $v = p$ においては, 後述の定義-命題3.3によって局所的な L -因子 $L(s, \Pi_p \times \sigma_p)$ および ϵ -因子 $\epsilon(s, \Pi_v \times \sigma_v, \psi_v)$ が定義される。これは, ほとんどすべての素点では, 8次のオイラー因子を定める。また, 実素点 $v = \infty$ においては, $\Pi_\infty, \sigma_\infty$ の Langlands parameter から $L(s, \Pi_\infty \times \sigma_\infty)$ および $\epsilon(s, \Pi_\infty \times \sigma_\infty, \psi_\infty)$ を定める (具体形は (4.2) に与える)。このとき, 本稿の考察対象である degree 8 L -関数とその ϵ -因子が

$$L(s, \Pi \times \sigma) := \prod_v L(s, \Pi_v \times \sigma_v), \quad \epsilon(s, \Pi \times \sigma) := \prod_v \epsilon(s, \Pi_v \times \sigma_v, \psi_v)$$

で定義される。また,

$$\begin{aligned} \Pi^\vee &:= \{\tilde{F} | F \in \Pi\}, & \tilde{F}(g) &= \omega_\Pi(\nu(g))^{-1} F(g) \\ \sigma^\vee &:= \{\tilde{\varphi} | \varphi \in \sigma\}, & \tilde{\sigma}(h) &= \omega_\sigma(\det(h))^{-1} \varphi(h) \end{aligned}$$

とおくと, これらはそれぞれ Π, σ の反傾表現で, Π^\vee も仮定1, 仮定2を満たすので

$$L(s, \Pi^\vee \times \sigma^\vee) := \prod_v L(s, \Pi_v^\vee \times \sigma_v^\vee)$$

が定義される。このとき, 本稿の主結果は次のとおり:

定理 1.1. 上の 仮定1,2 および 約束 のもとで, 次が成立:

(i) $L(s, \Pi \times \sigma)$ は全 s -平面に有理型に解析接続され, 関数等式

$$L(s, \Pi \times \sigma) = \epsilon(s, \Pi \times \sigma) \times L(1-s, \Pi^\vee \times \sigma^\vee)$$

を満たす。

(ii) $\omega \neq 1$ のときは, $L(s, \Pi \times \sigma)$ は整関数であり, $\omega = 1$ のときは $s = 0, 1$ で高々一位の pole を持つほかは holomorphic である。

★ 注意と訂正: (i) Gamma 因子 $L(s, \Pi_\infty \times \sigma_\infty)$, ϵ -因子 $\epsilon(s, \Pi_\infty \times \sigma_\infty, \psi_\infty)$ は講演のときとは異なるものを用いている (関数等式を成立させる Gamma 因子は, 一通りではない)。また, [Mo-3, 定理 1.1, p.177] では, $L_\infty(s, F \times \varphi)$ の定義を

$$L_\infty(s, F \times \varphi) = \Gamma_{\mathbf{C}}\left(s + \frac{-\lambda_2}{2}\right) \Gamma_{\mathbf{C}}\left(s + \frac{-\lambda_2}{2}\right) \Gamma_{\mathbf{C}}\left(s + \frac{2\lambda_1 + \lambda_2 - 2}{2}\right) \Gamma_{\mathbf{C}}\left(s + \frac{2\lambda_1 - \lambda_2 - 2}{2}\right)$$

とすべきである。この誤りは, [Mo-3, p.178] の f_∞ の定義式で $\Gamma_{\mathbf{R}}(2s + \lambda_2)$ を $\Gamma_{\mathbf{R}}(2s - \lambda_2)$ とすべきであったことに由来する。

(ii) §4 の計算を見れば, $L(s, \Pi \times \sigma)$ が $s = 0, 1$ で pole を持つための必要条件はもっと精密に与えることができるが, ここでは略す。

§2. Eisenstein Series on $GL(2)$

$GL(2)$ 上の Eisenstein Series について, 必要事項をまとめる ([J])。

(2.1) Induced representation (local).

k_v^\times の二つのユニタリ指標 $\xi_i : k_v^\times \rightarrow \mathbf{C}^{(1)}$ ($i = 1, 2$) をとって固定し,

$$\chi_1(x) = \chi_1(s, x) := \xi_1(x)|x|^s, \quad \chi_2(x) = \chi_2(s, x) := \xi_2(x)|x|^{-s}, \quad s \in \mathbf{C}, \quad i = 1, 2,$$

とおく。誘導表現の空間 $I(\chi_1, \chi_2)$ を

$$I(\chi_1, \chi_2) := \left\{ f : GL(2)_{k_v} \rightarrow \mathbf{C} \mid f\left(\begin{pmatrix} b_1 & * \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} h_1\right) = \chi_1(b_1)\chi_2(b_2)f(h_1), \right. \\ \left. \forall \begin{pmatrix} b_1 & * \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \in B'_{k_v}, \forall h_1 \in GL(2)_{k_v} \right\}$$

で定義する。 \mathbf{C} を底空間とする (ファイバーが無限次元の) 「ベクトル束」

$$I(\xi_1, \xi_2; s) := \sqcup_{s \in \mathbf{C}} I(\xi_1|\cdot|^s, \xi_2|\cdot|^{-s}) \rightarrow \mathbf{C},$$

が定義される。

定義 2.1 (standard section). (i) 関数 $f : \mathbf{C} \times GL(2)_{k_v} \rightarrow \mathbf{C}$ が $I(\xi_1, \xi_2; s)$ の standard section とは, 次の 2 条件を満たすことを言う:

(a) 任意の $s \in \mathbf{C}$ に対して, 関数

$$GL(2)_{k_v} \ni h_1 \mapsto f(s, h_1) \in \mathbf{C}$$

は $I(\xi_1|\cdot|^s, \xi_2|\cdot|^{-s})$ に属す。

(b) $K_v \ni k \mapsto f(s, k) \in \mathbf{C}$ は $s \in \mathbf{C}$ によらない右 K_v -有限な関数。

standard section の全体を, $\mathcal{I}^{std}(\xi_1, \xi_2; s)$ と書く。

(ii) 関数 $f : \mathbf{C} \times GL(2)_{k_v} \rightarrow \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ は, 有限個の standard section $f_i \in \mathcal{I}^{std}(\xi_1, \xi_2; s)$ を用いて,

$$f(s, h_1) = \sum_i a_i(s) f_i(s, h_1), \quad a_i(s) \text{ は holomorphic (resp. meromorphic)}$$

と書けるとき, $I(\xi_1, \xi_2; s)$ の holomorphic (resp. meromorphic) section であるという。以下, 慣習に従って, f が極を持つときにも, $f : \mathbf{C} \times GL(2)_{k_v} \rightarrow \mathbf{C}$ と書く。

次に、以下で有用な有理型切断である Jacquet section を導入する。まず、有限素点 v に対しては、 k_v^2 上の Schwarz 関数の空間を

$$\mathcal{S}(k_v^2) := \{\Phi : k_v^2 \rightarrow \mathbf{C} \mid \text{局所定数, コンパクト台を持つ}\},$$

で定義する。 $\Phi \in \mathcal{S}(k_v^2)$ に対して、

$$f_\Phi(h_1) := \xi_1(\det(h_1)) \times |\det(h_1)|^s \times \int_{k_v^\times} \Phi((0, t)h_1)(\xi_1 \cdot \xi_2^{-1})(t) |t|^{2s} d^\times t$$

とおく。

命題 2.2. $f_\Phi(h)$ は、 $\operatorname{Re}(s) > 0$ で絶対収束し、解析接続によって有理型切断を定める。しかも、 $\xi_1 \cdot \xi_2^{-1} = |\cdot|^\lambda$ のときに

$$s \in -\frac{\lambda}{2} + \frac{\pi\sqrt{-1}\mathbf{Z}}{\log q_v}$$

に *simple pole* を持つほかは、正則である。このようにして得られた有理型切断を *Jacquet section* という。

次に、無限素点における Jacquet section を定義する。 $k_v \cong \mathbf{R}$ のときには、

$$\mathcal{S}(k_v^2, \psi_v) := \{p(x, y) \exp(-\pi(x^2 + y^2)) \mid p \in \mathbf{C}[X, Y]\}$$

と置き、 $k_v \cong \mathbf{C}$ のときには、

$$\mathcal{S}(k_v^2, \psi_v) := \{p(x, \bar{x}, y, \bar{y}) \exp(-\pi(x\bar{x} + y\bar{y})) \mid p \in \mathbf{C}[X_1, X_2, Y_1, Y_2]\}$$

と置く。 $\Phi \in \mathcal{S}(k_v^2, \psi_v)$ に対して、 $GL(2)_{k_v}$ 上の関数 $f_\Phi(s, h_{1,v})$ を上と同じ式で定める。

命題 2.3. v を無限素点とし、 $\Phi \in \mathcal{S}(k_v^2, \psi_v)$ をとる。すると、 $f_\Phi(s, h_1)$ は、 $\operatorname{Re}(s) > 0$ で絶対収束し、解析接続によって有理型切断を定める。この有理型切断を *Jacquet section* という。

正則切断、有理型切断、Jacquet 切断の全体をそれぞれ、 $\mathcal{I}^{holo}(\xi_1, \xi_2; s)$, $\mathcal{I}^{mero}(\xi_1, \xi_2; s)$, $\mathcal{I}^J(\xi_1, \xi_2; s)$ で表す。

(2.2) Intertwining operators (local).

$f(s, h) \in \mathcal{I}^{std}(\xi_1, \xi_2; s)$ に対して、

$$Mf(s, h_1) := \int_{k_v} f(s, w_0 \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h_1) dx, \quad w_0 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

とおく。

命題 2.4. $f(s, h_1) \in \mathcal{I}^{std}(\xi_1, \xi_2; s)$ を *standard section* とする。

(i) $\operatorname{Re}(s) > 1/2$ なる $s \in \mathbf{C}$ に対して、 $Mf(s, h)$ は収束し $I(\xi_2 |\cdot|^{1-s}, \xi_1 |\cdot|^{-(1-s)})$ に属す。

(ii) 任意の $h \in GL(2)_{k_v}$ に対して、

$$\{s \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 1/2\} \ni s \mapsto Mf(s, h_1) \in \mathbf{C}$$

は全 s -平面上の有理型関数として解析接続される。

(iii) こうして定義される関数

$$Mf : \mathbf{C} \times GL(2)_{k_v} \rightarrow \mathbf{C}$$

は $I(\xi_2, \xi_1; 1-s)$ の有理型切断である。

有理型切断 $f(s, h_1) = \sum_i a_i(s) f_i(s, h_1)$ に対して, $Mf(s, h_1) := \sum_i a_i(s) [Mf_i](s, h_1)$ と定義することにより, 絡作用素の定義域を有理型切断にまで拡張しておく:

$$M : \mathcal{I}^{mero}(\xi_1, \xi_2; s) \rightarrow \mathcal{I}^{mero}(\xi_2, \xi_1; 1-s).$$

同様に, $f \in \mathcal{I}^{std}(\xi_2, \xi_1; 1-s)$ に対して

$$\widetilde{M}f(s, h_1) := \int_{k_v} f(s, w_0 \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h_1) dx$$

とおく。今度は $\text{Re}(s) < 1/2$ で絶対収束し, それを解析接続することで絡作用素

$$\widetilde{M} : \mathcal{I}^{mero}(\xi_2, \xi_1; 1-s) \rightarrow \mathcal{I}^{mero}(\xi_1, \xi_2; s)$$

が定義される。

命題 2.5 (絡作用素の性質). (i) $L(2s-1, \xi_1 \xi_2^{-1})^{-1} M$ は holomorphic. すなわち, $f \in \mathcal{I}^{holo}(\xi_1, \xi_2; s)$ を $\mathcal{I}^{holo}(\xi_2, \xi_1; 1-s)$ へ写す。

(ii) 次の等式が成立:

$$\widetilde{M} \circ M = \epsilon'(1-2s, \xi_2 \cdot \xi_1^{-1}, \psi_v)^{-1} \times \epsilon'(2s-1, \xi_1 \cdot \xi_2^{-1}, \psi_v)^{-1} \times \text{id}.$$

ここで, $\epsilon'(s, \xi, \psi_v) := \epsilon(s, \xi, \psi_v) \times \frac{L(1-s, \xi^{-1})}{L(s, \xi)}$ である ($GL(1)$ の ϵ' -因子)。

(iii) v を不分岐有限素点とする。すなわち ξ_1, ξ_2 は不分岐ユニタリ指標であつて, ψ_v も不分岐 (i.e. $d_v = 0$) を仮定する。 f^0 及び \widetilde{f}^0 をそれぞれ $I(\xi_1, \xi_2; s)$ 及び $I(\xi_2, \xi_1; 1-s)$ の $f^0(s, u) = \widetilde{f}^0(s, u) = 1$ ($\forall u \in K'_v$) で正規化された不分岐な standard section とすると, 次が成立:

$$Mf^0 = \frac{L(2s-1, \xi_1 \cdot \xi_2^{-1})}{L(2s, \xi_1 \cdot \xi_2^{-1})} \times \widetilde{f}^0.$$

命題 2.5 (ii) の証明の核心部分は次の補題である:

補題 2.6 ([J, page 14-15]). v を有限素点 (resp. 無限素点) とするとき $\Phi \in \mathcal{S}(k_v^2)$ (resp. $\Phi \in \mathcal{S}(k_v^2, \psi_v)$) に対して, その Fourier 変換 $\widehat{\Phi} \in \mathcal{S}(k_v^2)$ (resp. $\widehat{\Phi} \in \mathcal{S}(k_v^2, \psi_v)$) を

$$\widehat{\Phi}(u, v) := \int_{k_v^2} \Phi(x, y) \psi_v(-yu + xv) dx dy$$

で定義する。すると, $\Phi = \widehat{\widehat{\Phi}}$ がすぐ分かる。ここで,

$$\widetilde{f}_{\widehat{\Phi}}(s; h_1) := \xi_2(\det(h_1)) |\det(h_1)|^{1-s} \times \int_{k_v^{\times}} \Phi((0, t)h_1) (\xi_2 \cdot \xi_1^{-1})(t) |t|^{2-2s} d^{\times} t$$

と置けば, 次の等式が成立する:

$$(2.1) \quad [Mf_{\widehat{\Phi}}](s, h_1) = (\xi_1 \cdot \xi_2^{-1})(-1) \times \epsilon'(2s-1, \xi_1 \cdot \xi_2^{-1}, \psi_v)^{-1} \times \widetilde{f}_{\widehat{\Phi}}(s, h_1).$$

例. (i) v を上の (iii) の意味で不分岐な有限素点とする。 $\Phi^{\circ} := \mathcal{D}_v^{\oplus 2}$ の特性関数 とすると,

$$f_{\Phi^{\circ}}(s, k_v) = L(2s, \xi_1 \cdot \xi_2^{-1}) = [1 - \xi_1 \cdot \xi_2^{-1}(\varpi_v) q_v^{-2s}]^{-1}$$

となっている。 $\widehat{\Phi}^{\circ} = \Phi^{\circ}$ に注意すると,

$$Mf_{\Phi^{\circ}} = \frac{L(2s-1, \xi_1 \cdot \xi_2^{-1})}{L(2-2s, \xi_2 \cdot \xi_1^{-1})} \times \widetilde{f}_{\Phi^{\circ}}$$

となる。

(ii) $k_v \cong \mathbf{R}$ のときに, $\mathcal{I}^J(1, \omega^{-1}; s)$ を考える. $\Phi \in \mathcal{S}(k_v^2, \psi_v)$ の基底 $\{\Phi_m(x, y) | m \in \mathbf{Z}\}$ を次で定める:

$$\Phi_m(x, y) := \begin{cases} (-x\sqrt{-1} + y)^m \exp(-\pi(x^2 + y^2)) & \text{if } m \geq 0 \\ (x\sqrt{-1} + y)^{-m} \exp(-\pi(x^2 + y^2)) & \text{if } m \leq 0. \end{cases}$$

Fourier 変換すると, $\widehat{\Phi}_m = \Phi_m$ ($m \geq 0$), $\widehat{\Phi}_m = (-1)^m \Phi_m$ ($m \leq 0$) である. $f_{\Phi_m}(s, h_1)$ は $SO(2)$ への制限によって決まるが, 計算すれば

$$f_{\Phi_m}(s, \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}) = e^{\sqrt{-1}m\theta} \times \Gamma_{\mathbf{R}}(2s + |m| + c_{\infty}) \times \delta([(-1)^m = \omega(-1)])$$

である. これから, 補題 2.6 を直接に確かめることもできる.

(2.3) Eisenstein series.

$\omega := \omega_{\Pi} \cdot \omega_{\sigma}$ と置く. $\xi_1 = 1, \xi_2 = \omega^{-1}$ のときを考える. $f \in \mathcal{I}^{std}(1, \omega^{-1}; s)$ に対して,

$$E(h_1, s; f) := \sum_{\gamma \in \mathbf{B}'_k \backslash GL(2)_k} f(s, \gamma h_1)$$

と置く. これは, $\text{Re}(s) > 1$ で広義一様に絶対収束し, そこで $GL(2)_{\mathbf{A}_k}$ 上の保型形式を定める. さらに, 各 $h \in GL(2)_{\mathbf{A}_k}$ に対して, \mathbf{C} 上の有理型関数として解析接続される. これは, $h_1 \in GL(2)_{\mathbf{A}_k}$ によらない, 集積点を持たない \mathbf{C} の部分集合で極をもつ以外では, $GL(2)_{\mathbf{A}_k}$ 上の保型形式を定める. 有理型切断 $f = \sum_i a_i(s) f_i$, $f_i \in \mathcal{I}^{std}(1, \omega^{-1}; s)$ に対して,

$$E(h_1, s; f) := \sum_i a_i(s) E(h_1, s; f_i)$$

と置くことで定義が拡張される. 同様にして,

$$Mf = \sum_i b_i(s) f_i, \quad f_i \in \mathcal{I}^{std}(\xi_2, \xi_1; 1-s)$$

とかくとき,

$$E(h_1, s; Mf) := \sum_i b_i(s) E(h_1, s; f_i)$$

が右辺 ($\text{Re}(s) \ll 0$ で絶対収束する) の解析接続として定義される.

関数等式・極の位置・留数

命題 2.7 (e.g. [J-S, lemma 4.2]). (i) $f \in \mathcal{I}^{mero}(\xi_1, \xi_2, s)$ に対して, 次の関数等式が成立:

$$E(h_1, s; f) = E(h_1, s; Mf).$$

したがって, 特に, $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbf{A}_k^2, \psi)$ に対して, 次が成立:

$$E(h_1, s; f_{\Phi}) = E(h_1, s; \tilde{f}_{\Phi})$$

(ii) $E(h_1, s; f_{\Phi})$ は, $\omega \neq 1$ のときは整関数である.

(iii) $\omega = 1$ のときは, ある正定数 $c > 0$ が存在して,

$$E(h_1, s; f_{\Phi}) = \frac{c |\det(h_1)|^{s-1} \widehat{\Phi}(0)}{s-1} - \frac{c |\det(h_1)|^{-s} \Phi(0)}{s} + R(h_1, s)$$

となる. ここで, $R(h_1, s)$ は, h_1 を止めるごとに, s について整関数である.

(2.4) 絡作用の正規化.

大域的な Jacquet 切断 $\mathcal{I}^J(1, \omega^{-1}; s)$ の空間を $\{f_{\Phi_0} | v: \text{不分支}\}$ に関する制限テンソル積

$$\mathcal{I}^J(1, \omega^{-1}; s) := \otimes'_v \mathcal{I}^J(1, \omega_v^{-1}; s)$$

で定義する。大域的な絡作用素 $M: \mathcal{I}^J(1, \omega^{-1}; s) \rightarrow \mathcal{I}^J(\omega^{-1}, 1; 1-s)$ 及び $\widetilde{M}: \mathcal{I}^J(\omega^{-1}, 1; 1-s) \rightarrow \mathcal{I}^J(1, \omega^{-1}; s)$ が $M := \otimes'_v M_v$ 及び $\widetilde{M} := \otimes'_v \widetilde{M}_v$ によって定義される。さて、補題 2.7 を踏まえて、正規化された絡作用素 M_v^* 及び \widetilde{M}_v^* を

$$M_v^* = \omega_v(-1)\epsilon'(2s-1, \xi_{1,v} \cdot \xi_{2,v}^{-1}, \psi_v) M_v: \mathcal{I}^J(1, \omega_v^{-1}; s) \rightarrow \mathcal{I}^J(\omega_v^{-1}, 1; 1-s)$$

$$\widetilde{M}_v^* = \omega_v(-1)\epsilon'(1-2s, \xi_{2,v} \cdot \xi_{1,v}^{-1}, \psi_v) \widetilde{M}_v: \mathcal{I}^J(\omega_v^{-1}, 1; 1-s) \rightarrow \mathcal{I}^J(1, \omega_v^{-1}; s),$$

で定義する。すると、不分支有限素点では、 $M_v^* f_{\Phi_0} = \widetilde{f}_{\Phi_0}$ である。また、容易にわかるように、

$$M = \otimes'_v M_v^*, \quad \widetilde{M} = \otimes'_v \widetilde{M}_v^*.$$

§3. Basic identity

この節では、局所-大局の関係を与える Basic identity を定式化する (詳しくは, [So-1], [Bu]).

(3.1) Zeta integrals (global)

Π, σ を $G_{\mathbb{A}_k}$ 及び $GL(2)_{\mathbb{A}_k}$ の尖点保型表現とする。有理型切断 $f \in \mathcal{I}^{mero}(1, \omega^{-1}; s)$ をとり、(2.3) の方法で、Eisenstein series $E(h_1, s; f)$ を定義する。尖点形式の組 $(F, \varphi) \in \Pi \times \sigma$ に対して、大域的ゼータ積分 $Z(s, F \otimes \varphi, f)$ 及び $\widetilde{Z}(s, F \otimes \varphi, f)$ を

$$\begin{aligned} Z(s, F \otimes \varphi, f) &:= \int_{Z_{\mathbb{A}_k} H_k \backslash H_{\mathbb{A}_k}} F(h) \varphi(h_2) E(h_1, s; f) dh, \\ \widetilde{Z}(s, F \otimes \varphi, f) &:= \int_{Z_{\mathbb{A}_k} H_k \backslash H_{\mathbb{A}_k}} F(h) \varphi(h_2) E(h_1, s; Mf) dh \\ &= \int_{Z_{\mathbb{A}_k} H_k \backslash H_{\mathbb{A}_k}} \widetilde{F}(h) \widetilde{\varphi}(h_2) \omega(\det(h_1)) E(h_1, s; Mf) dh \end{aligned}$$

で定義する。このとき、次が成立:

命題 3.1. (i) 上の二つの積分は、Eisenstein series の極以外で絶対収束し、 $s \in \mathbb{C}$ の有理型関数を定める。

(ii)

$$\widetilde{Z}(s, F \otimes \varphi, f) = Z(s, F \otimes \varphi, f).$$

(iii) $Z(s, F \otimes \varphi, f_{\Phi})$ は $\omega \neq 1$ のときは整型である。

(iv) $Z(s, F \otimes \varphi, f_{\Phi})$ は $\omega = 1$ のときは、 $s = 0, 1$ で極を持つほかは正則であり、留数は次で与えられる:

$$\begin{aligned} \text{Res}_{s=1} Z(s, F \otimes \varphi, f) &= c \times \widehat{\Phi}(0) \times \int_{Z_{\mathbb{A}} H_{\mathbb{Q}} \backslash H_{\mathbb{A}}} F(h) \varphi(h_2) dh; \\ \text{Res}_{s=0} Z(s, F \otimes \varphi, f) &= -c \times \Phi(0) \times \int_{Z_{\mathbb{A}} H_{\mathbb{Q}} \backslash H_{\mathbb{A}}} F(h) \varphi(h_2) dh. \end{aligned}$$

(3.2) 大域的 Whittaker 関数と Basic identity.

N_{A_k} のユニタリ指標 $\psi_N : N_{A_k} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)}$ を

$$\psi_N(n(x_0, x_1, x_2, x_3)) = \psi(-x_0 - x_3) \in \mathbf{C}^{(1)},$$

で定める。 F の大域的 Whittaker 関数を

$$\mathcal{W}_F(g) := \int_{N_k \backslash N_{A_k}} F(n g) \psi_N(n^{-1}) dn, \quad g \in G_{A_k},$$

で定義する。同じく φ の大域的 Whittaker 関数を

$$\mathcal{W}_\varphi(h_2) := \int_{k \backslash A_k} \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h_2\right) \psi(-x) dx, \quad h_2 \in GL(2)_{A_k},$$

で定義する。Eisenstein 級数を unfold することで次が証明される：

命題 3.2 (Basic identity, cf.[B1, §3]). 全ての無限素点 v において, 下に定義する局所ゼータ積分 $Z^{(v)}(s, \mathcal{W}_F^{(v)}, \mathcal{W}_\varphi^{(v)}, f^{(v)})$ が $\text{Re}(s) \gg 0$ で絶対収束すると仮定する。

(i) 積分

$$(3.2) \quad \int_{Z_{A_k} N^H_{A_k} \backslash H_{A_k}} \mathcal{W}_F(h) \mathcal{W}_\varphi(h_2) f(s, h_1) dh,$$

は $\text{Re}(s) > 3$ で (f の極以外で) 絶対収束して, $Z(s, F \otimes \varphi, f)$ に等しい。

(ii) 積分

$$(3.3) \quad \int_{Z_{A_k} N^H_{A_k} \backslash H_{A_k}} \mathcal{W}_F(h) \mathcal{W}_\varphi(h_2) M f(s, h_1) dh,$$

は $\text{Re}(s) < -1$ で (Mf の極以外で) 絶対収束して, $\tilde{Z}(s, F \otimes \varphi, f)$ に等しい。

さて, 尖点形式 F および φ が decomposable とすると, 大域的 Whittaker 関数 \mathcal{W}_F および \mathcal{W}_φ は

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_F(g) &= \prod_v \mathcal{W}_F^{(v)}(g_v), \quad \text{for } g = (g_v) \in G_{A_k}, \\ \mathcal{W}_\varphi(h_2) &= \prod_v \mathcal{W}_\varphi^{(v)}(h_{2,v}), \quad \text{for } h_2 = (h_{2,v}) \in GL(2)_{A_k}. \end{aligned}$$

と局所 Whittaker 関数の積に分解する。

記号: 局所 Whittaker 関数 $\mathcal{W}_F^{(v)}$ および $\mathcal{W}_\varphi^{(v)}(h_{2,v})$ の属す Π_v や σ_v の属す Whittaker 模型を, それぞれ $\text{Wh}(\Pi_v, \psi_v)$, $\text{Wh}(\sigma_v, \psi_v)$ で表す。

さらに, 有理型切断 $f \in \mathcal{I}^{\text{mero}}(1, \omega^{-1}; s)$ も

$$f(s, h_1) = \prod_v f^{(v)}(s, h_{1,v}), \quad f^{(v)} \in \mathcal{I}^J(1, \omega_v^{-1}; s)$$

と decomposable なものを考える。すると, 上述の Basic identity によって,

$$(i) \quad Z(s, F \otimes \varphi, f) = \prod_v Z^{(v)}(s, \mathcal{W}_F^{(v)}, \mathcal{W}_\varphi^{(v)}, f),$$

$$Z^{(v)}(s, \mathcal{W}_F^{(v)}, \mathcal{W}_\varphi^{(v)}, f^{(v)}) := \int_{Z_{A_k} N^H_{A_k} \backslash H_{A_k}} \mathcal{W}_F^{(v)}(h_v) \mathcal{W}_\varphi^{(v)}(h_{2,v}) f^{(v)}(s, h_{1,v}) dh_v;$$

および

$$(ii) \tilde{Z}(s, F \otimes \varphi, f) = \prod_v Z^{(v)}(s, \mathcal{W}_F^{(v)}, \mathcal{W}_\varphi^{(v)}, f),$$

$$\tilde{Z}^{(v)}(s, \mathcal{W}_F^{(v)}, \mathcal{W}_\varphi^{(v)}, f^{(v)}) := \int_{Z_{\mathbf{A}_k} \mathbf{N}^{\mathbf{H}_{\mathbf{A}_k}} \backslash \mathbf{H}_{\mathbf{A}_k}} \mathcal{W}_F^{(v)}(h_v) \mathcal{W}_\varphi^{(v)}(h_{2,v}) M_v^* f^{(v)}(s, h_{1,v}) dh_v,$$

$$= \int_{Z_{\mathbf{A}_k} \mathbf{N}^{\mathbf{H}_{\mathbf{A}_k}} \backslash \mathbf{H}_{\mathbf{A}_k}} \tilde{\mathcal{W}}_F^{(v)}(h_v) \tilde{\mathcal{W}}_\varphi^{(v)}(h_{2,v}) \omega_v(\det(h_{1,v})) M_v^* f^{(v)}(s, h_{1,v}) dh_v,$$

と書ける。ここで,

$$\tilde{\mathcal{W}}_F^{(v)}(h_v) = \omega_\Pi(\nu(h_v))^{-1} \mathcal{W}_F^{(v)}(h_v) \quad \tilde{\mathcal{W}}_\varphi^{(v)}(h_{2,v}) = \omega_\sigma(\det(h_{2,v}))^{-1} \mathcal{W}_\varphi^{(v)}(h_{2,v}),$$

と置いた。なお,

$$\omega_v(\det(h_{1,v})) M_v^* f^{(v)}(s, h_{1,v}) \in \mathcal{I}^{mero}(1, \omega_v; 1-s)$$

であることに注意する。

(3.3) 有限素点における局所関数等式

以下, 切断として Jacquet 切断 $f \in \mathcal{I}^J(1, \omega_v^{-1}; s)$ を主に考える。

定義-命題 3.3 ([So-1, §2]). (i) $P_v(0) = 1$ となる多項式 $P_v(X) \in \mathbf{C}[X]$ で次を満たすものがただ一つ存在する:

$$\mathbf{C}\text{-span}\{Z^{(v)}(s, W, W', f^{(v)}) \mid W \in \text{Wh}(\Pi_v, \psi_v), W' \in \text{Wh}(\sigma_v, \psi_v), f^{(v)} \in \mathcal{I}^J(1, \omega_v^{-1}; s)\}$$

$$= P_v(q_v^{-s})^{-1} \mathbf{C}[q_v^{-s}, q_v^s].$$

有限素点 v における L -因子を

$$L(s, \Pi_v \times \sigma_v) := P_v(q_v^{-s})^{-1}$$

で定める。

(ii) q_v^{-s} の単項式 $\epsilon(s, \Pi_v \times \sigma_v, \psi_v) = a q_v^{-bs}$ ($a \in \mathbf{C}^\times, b \in \mathbf{Z}$) が存在して,

$$\frac{\tilde{Z}^{(v)}(s, W, W', f)}{L(1-s, \Pi_v \times \sigma_v)} = \epsilon(s, \Pi_v \times \sigma_v, \psi_v) \times \frac{Z^{(v)}(s, W, W', f)}{L(s, \Pi_v \times \sigma_v)}$$

が, 全ての $W \in \text{Wh}(\Pi_v, \psi_v), W' \in \text{Wh}(\sigma_v, \psi_v), f \in \mathcal{I}^J(1, \omega_v^{-1}; s)$ に対して存在する。

(3.4) 不分岐有限素点における計算

Π_v, σ_v が不分岐主系列表現で ψ_v も不分岐とするとき, 局所ゼータ積分を計算する。 $W^0 \in \text{Wh}(\Pi_v, \psi_v), W'^0 \in \text{Wh}(\sigma_v, \psi_v), f^{(v)} \in \mathcal{I}^J(1, \omega_v^{-1}; s)$ が全て不分岐とする。ただし, $W^0(1_4) = 1, W'^0(1_2) = 1, f^{0,(v)}(s, 1) = L(2s, \omega_v^{-1})$ と正規化されているとする。

$$Z^{(v)}(s, W^0, W'^0, f^{0,(v)})$$

$$= L(2s, \omega_v^{-1}) \times \sum_{k,l \geq 0} W^0(\text{diag}(\varpi_v^{k+l}, \varpi_v^l, \varpi_v^{-l}, 1)) W'^0(\text{diag}(\varpi_v^l, 1)) \omega_v(\varpi_v^l) q_v^{-(k+2l)s+2(k+l)}$$

Kato-Casselman-Shalika 公式によれば,

$$W^0(\text{diag}(\varpi_v^{k+l}, \varpi_v^l, \varpi_v^{-k}, 1)) = \alpha_0^l \times q_v^{(-4k-3l)/2} \times \frac{\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_2} \sum_{\epsilon_j = \pm 1} \text{sgn}(\sigma) \epsilon_1 \epsilon_2 \alpha_{\sigma(1)}^{\epsilon_1(k+l+2)} \alpha_{\sigma(2)}^{\epsilon_1(k+1)}}{(\alpha_1 + \alpha_1^{-1} - \alpha_2 - \alpha_2^{-1})(\alpha_1 - \alpha_1^{-1})(\alpha_2 - \alpha_2^{-1})},$$

$$W'^0(\text{diag}(\varpi_v^l, 1)) = q_v^{-l/2} \times \frac{\beta_1^{l+1} - \beta_2^{l+1}}{\beta_1 - \beta_2}.$$

ここで、不分岐主系列表現 Π_v, σ_v の Satake parameter をそれぞれ

$$A_v = \text{diag}(\alpha_0 \alpha_1, \alpha_0 \alpha_2, \alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}) \in GSp(2, \mathbf{C}), \quad B_v = \text{diag}(\beta_1, \beta_2) \in GL(2, \mathbf{C})$$

と書いた。これを代入して、少々面倒だが計算すれば、

$$Z^{(v)}(s, W^0, W'^0, f^{0,(v)}) = [\det(1_8 - A_v \otimes B_v \cdot q_v^{-s})]^{-1}.$$

同様にして、

$$\tilde{Z}^{(v)}(s, W^0, W'^0, f^{0,(v)}) = [\det(1_8 - A_v^\vee \otimes B_v^\vee \cdot q_v^{-(1-s)})]^{-1},$$

を得る。但し、ここで A_v^\vee, B_v^\vee は不分岐主系列表現 $\Pi_v^\vee, \sigma_v^\vee$ の Satake parameter で、それぞれ $A_v^\vee = \omega_\Pi(\varpi_v)^{-1} \cdot A_v (\sim A_v^{-1}) \in GSp(2, \mathbf{C}), B_v^\vee = \omega_\sigma(\varpi_v)^{-1} \cdot B_v (\sim B_v^{-1}) \in GL(2, \mathbf{C})$ で与えられる。さらに、局所 Whittaker 関数の漸近挙動 (germ expansion) を調べることで、

$$L(s, \Pi_v \times \sigma_v) = [\det(1_8 - A_v \otimes B_v \cdot q_v^{-s})]^{-1},$$

$$L(s, \Pi_v^\vee \times \sigma_v^\vee) = [\det(1_8 - A_v^\vee \otimes B_v^\vee \cdot q_v^{-s})]^{-1},$$

が証明される。したがって不分岐有限素点では $\epsilon(s, \Pi_v \times \sigma_v, \psi_v) = 1$ となることがわかる。

§4. 証明 (実素点における局所関数等式)

§2, 3 でまとめたことから、主定理の証明のためには、局所ゼータ積分 $Z^{(\infty)}(s, W, W', f)$ の解析接続され、しかるべき「局所関数等式」を満たすことをいえばよい。ここでは、Whittaker 関数の明示公式を使って $Z^{(\infty)}(s, W, W', f)$ を計算することで、これらのことを証明する。

★ 注意: [Mo-3, 注意 2.8(1)] で「Whittaker 関数の明示公式なしでは L -関数の解析接続が証明できない」と述べたが、序でも述べたように Whittaker 関数の漸近挙動を見ることで明示公式を使わずに $Z^{(\infty)}(s, W, W', f)$ の (したがって、 L -関数の) 解析接続が証明できると思われる。いずれにせよ、今の場合は、局所ゼータ積分を計算しきることが可能なので、このような「定性的な」議論は用いない。

(4.1) Weil group の表現と L, ϵ -因子.

実数体 \mathbf{R} の Weil 群は、 $W_{\mathbf{R}} := \mathbf{C}^\times \sqcup \mathbf{C}^\times \cdot j \subset \mathbf{H}^\times$ である。 $W_{\mathbf{R}}$ の既約連続表現とそれに付随する L -因子、 ϵ -因子をリストアップしておく。

(i) 指標 ϕ_μ^+, ϕ_μ^- , ($\mu \in \mathbf{C}$)

$$\phi_\mu^+(z) = |z|^{2\mu} = |z|_{\mathbf{C}}^\mu, \quad \phi_\mu^+(j) = 1,$$

$$\phi_\mu^-(z) = |z|^{2\mu} = |z|_{\mathbf{C}}^\mu, \quad \phi_\mu^-(j) = -1,$$

に対しては、

$$L(s, \phi_\mu^+) := \Gamma_{\mathbf{R}}(s + \mu) \quad \epsilon(s, \phi_\mu^+, \psi_\infty) = 1,$$

$$L(s, \phi_\mu^-) := \Gamma_{\mathbf{R}}(s + \mu + 1) \quad \epsilon(s, \phi_\mu^-, \psi_\infty) = \sqrt{-1}$$

と定める。また、 ϕ_μ^+, ϕ_μ^- に対応する $GL_1(\mathbf{R})$ の表現は、

$$\phi_\mu^+ \leftrightarrow [\mathbf{R}^\times \ni x \mapsto |x|^\mu \in \mathbf{C}^\times], \quad \phi_\mu^- \leftrightarrow [\mathbf{R}^\times \ni x \mapsto |x|^\mu \text{sgn}(x) \in \mathbf{C}^\times],$$

である。

(ii) 2次元表現 $\phi_{\mu,N} : W_{\mathbf{R}} \rightarrow GL(2, \mathbf{C})$ ($\mu \in \mathbf{C}, N \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$)

$$\phi_{\mu,N}(re^{\sqrt{-1}\theta}) = \begin{pmatrix} r^{2\mu-N} e^{-\sqrt{-1}N\theta} & 0 \\ 0 & r^{2\mu-N} e^{+\sqrt{-1}N\theta} \end{pmatrix},$$

$$\phi_{\mu,N}(j) = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^N \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

に対しては,

$$L(s, \phi_{\mu,N}) := \Gamma_{\mathbf{C}}(s + \mu), \quad \epsilon(s, \phi_{\mu,N}, \psi_{\infty}) = (\sqrt{-1})^{N+1},$$

と定める。

注意. 形式的に $\phi_{\mu,0}$ を考えると,

$$\phi_{\mu,0} \cong \phi_{\mu}^{+} \oplus \phi_{\mu}^{-}.$$

これは,

$$\Gamma_{\mathbf{C}}(s + \mu) = \Gamma_{\mathbf{R}}(s + \mu) \Gamma_{\mathbf{R}}(s + \mu + 1),$$

$$\sqrt{-1} = \epsilon(s, \phi_{\mu}^{+}, \psi_{\infty}) \epsilon(s, \phi_{\mu}^{-}, \psi_{\infty}),$$

に対応していると考えられる。

テンソル積

$$\phi_{\mu_1}^{+} \otimes \phi_{\mu_2}^{+} \cong \phi_{\mu_1 + \mu_2}^{+}, \quad \phi_{\mu_1}^{+} \otimes \phi_{\mu_2}^{-} \cong \phi_{\mu_1 + \mu_2}^{-}, \quad \phi_{\mu_1}^{-} \otimes \phi_{\mu_2}^{-} \cong \phi_{\mu_1 + \mu_2}^{+},$$

$$\phi_{\mu_1, N_1} \otimes \phi_{\mu_2}^{\pm} \cong \phi_{\mu_1 + \mu_2, N_1}, \quad \phi_{\mu_1, N_1} \otimes \phi_{\mu_2, N_2} \cong \phi_{\mu_1 + \mu_2, N_1 + N_2} \oplus \phi_{\mu_1 + \mu_2 - N_2, N_1 - N_2} \quad \text{if } N_1 \geq N_2.$$

(4.2) L, ϵ -因子の定義

$\Pi_{\infty}|_{G_0} = D_{(\lambda_1, \lambda_2)} \oplus D_{(-\lambda_2, -\lambda_1)}$, $\Pi_{\infty}(z_{\infty}) = z_{\infty}^{c'_{\infty}}$, ($1 - \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq 0$). とする。この表現 Π_{∞} の Langlands parameter $\phi[\Pi_{\infty}]$ は

$$\phi[\Pi_{\infty}] = \phi_{\mu_1, N_1} \oplus \phi_{\mu_2, N_2}$$

with

$$\mu_1 = \frac{c'_{\infty} + \lambda_1 - \lambda_2 - 1}{2}, \quad N_1 = \lambda_1 - \lambda_2 - 1;$$

$$\mu_2 = \frac{c'_{\infty} + \lambda_1 + \lambda_2 - 1}{2}, \quad N_2 = \lambda_1 + \lambda_2 - 1,$$

である。

case (i) $\sigma_{\infty} = D_l[c''_{\infty}]$ のとき。 $\sigma_{\infty}|_{SL(2, \mathbf{R})}$ の Langlands parameter $\phi[\sigma_{\infty}]$ は

$$\phi[\sigma_{\infty}] = \phi_{\mu_3, N_3} \quad \mu_3 = \frac{c''_{\infty} + l - 1}{2}, \quad N_3 = l - 1,$$

である。これから, $\Pi_{\infty} \times \sigma_{\infty}$ の L -因子, ϵ -因子は, 次のようになる ($c_{\infty} = c'_{\infty} + c''_{\infty}$):

$$L(s, \Pi_{\infty} \times \sigma_{\infty}) = \Gamma_{\mathbf{C}}\left(s + \frac{c_{\infty} + \lambda_1 - \lambda_2 + l - 2}{2}\right) \Gamma_{\mathbf{C}}\left(s + \frac{c_{\infty} + |\lambda_1 - \lambda_2 - l|}{2}\right)$$

$$\times \Gamma_{\mathbf{C}}\left(s + \frac{c_{\infty} + \lambda_1 + \lambda_2 + l - 2}{2}\right) \Gamma_{\mathbf{C}}\left(s + \frac{c_{\infty} + |\lambda_1 + \lambda_2 - l|}{2}\right),$$

$$\epsilon(s, \Pi_{\infty} \times \sigma_{\infty}, \psi_{\infty}) = \begin{cases} 1 & \text{if } |l - \lambda_1| \geq -\lambda_2; \\ (-1)^{l + \lambda_1 - \lambda_2} & \text{if } |l - \lambda_1| \leq -\lambda_2. \end{cases}$$

case (ii) $\sigma_\infty = \text{Ind}_{\mathbf{B}'_{\mathbf{R}}}^{GL(2)_{\mathbf{R}}}(\epsilon_1, \epsilon_2; c''_\infty, \nu)$ のとき: この表現 σ_∞ の Langlands parameter $\phi[\sigma_\infty]$ は

$$\phi[\sigma_\infty] = \phi_{\mu_3}^{\epsilon_1} \oplus \phi_{\mu_4}^{\epsilon_1} \quad \mu_3 = \frac{c''_\infty + \nu}{2}, \quad \mu_4 = \frac{c''_\infty - \nu}{2},$$

である。したがって、これから、 $\Pi_\infty \times \sigma_\infty$ の L -因子, ϵ -因子は、次のようになる:

$$L(s, \Pi_\infty \times \sigma_\infty) = \Gamma_{\mathbf{C}}\left(s + \frac{c_\infty + \lambda_1 - \lambda_2 + \nu - 1}{2}\right) \Gamma_{\mathbf{C}}\left(s + \frac{c_\infty + \lambda_1 - \lambda_2 - \nu - 1}{2}\right) \\ \times \Gamma_{\mathbf{C}}\left(s + \frac{c_\infty + \lambda_1 + \lambda_2 + \nu - 1}{2}\right) \Gamma_{\mathbf{C}}\left(s + \frac{c_\infty + \lambda_1 + \lambda_2 - \nu - 1}{2}\right),$$

$$\epsilon(s, \Pi_\infty \times \sigma_\infty, \psi_\infty) = 1.$$

(4.3) $Z^{(\infty)}(s, W, W', f)$ の計算.

$c_\infty = 0$ としてよく、そのとき

$$\tilde{Z}^{(\infty)}(s, W, W', f_{\Phi_m}) = Z^{(\infty)}(1-s, W, W', f_{\Phi_m})$$

なので、局所関数等式のためには、

$$Q(s) \equiv Q(s; W, W', f) := \frac{Z^{(\infty)}(s, W, W', f)}{L(s, \Pi_\infty \times \sigma_\infty)}$$

が、 $Q(s) = Q(1-s)$ をみたすことが言えれば良い。実際に、 $Z^{(\infty)}(s, W, W', f)$ を計算する。そのために次を用意しておく (証明は、Barnes' Lemma を用いれば容易):

補題 4.1. $\alpha_i \in \mathbf{C}$ ($1 \leq i \leq 6$), $\alpha_2 + \alpha_5 = 2$ とする。

$$Z^{(\infty)}(s; \alpha_1, \dots, \alpha_6) \\ = \int_0^\infty d^\times y_1 \int_0^\infty d^\times y_2 e^{-2\pi y_1} \int ds_1 \int ds_2 (4\pi^3 y_1^2 y_2)^{(-s_1 + \alpha_1)/2} (4\pi y_1)^{(-s_1 + \alpha_2)/2} \\ \times \Gamma\left(\frac{s_1 + s_2 + \alpha_3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s_1 + s_2 + \alpha_4}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s_1}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{s_2}{2}\right) \times m(s_1) \\ \times \left\{ e^{2\pi y_1} \int ds_3 (4\pi y_1)^{-s_3} \frac{\Gamma(s_3 + (\nu + 1)/2) \Gamma(s_3 + (-\nu + 1)/2)}{\Gamma(s_3 + \alpha_5/2)} \right\} \\ \times y_1^{s-2} y_2^{2s-2} \times \Gamma_{\mathbf{R}}(2s + \alpha_6)$$

は、 $\text{Re}(s) \gg 0$ で絶対収束し次に等しい:

$$\pi^{-4s+4-\alpha_6/2} 2^{-2s+4} \Gamma\left(s + \frac{\alpha_1 - 2}{2}\right) \Gamma\left(s + \frac{\alpha_6}{2}\right) m(2s + \alpha_1 - 2) \\ \times \Gamma\left(s + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \nu - 3}{2}\right) \Gamma\left(s + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + \nu - 3}{2}\right) \\ \times \Gamma\left(s + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \nu - 3}{2}\right) \Gamma\left(s + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 - \nu - 3}{2}\right) \\ \times \Gamma\left(2s + \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} - 3\right)^{-1}.$$

計算 - Case (ii): $W \in \text{Wh}(\Pi_\infty, \psi_\infty)$ を, $D_{(-\lambda_2, -\lambda_1)}$ の極小 K -タイプに属す「ウェイト」 $(k - \lambda_1, -k - \lambda_2)$ のベクトル v_k に対応するものとする。すると, $[O], [Mo-4]$ によって,

$$W(y_1, y_2) = e^{-2\pi y_1} \int ds_1 \int ds_2 (4\pi^3 y_1^2 y_2)^{(-s_1 + \alpha_1)/2} (4\pi y_1)^{(-s_1 + \alpha_2)/2} \\ \times \Gamma\left(\frac{s_1 + s_2 + \alpha_3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s_1 + s_2 + \alpha_4}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s_1}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{s_2}{2}\right) \times (s_1)_k$$

with

$$\alpha_1 = \lambda_1 + 1 - k, \quad \alpha_2 = \lambda_2 + k, \quad \alpha_3 = -2\lambda_2 + 1, \quad \alpha_4 = 1.$$

となることが分かる。一方, W' はウェイト $\lambda_2 + k$, $f(s; y_1, y_2)$ はウェイト $\lambda_1 - k$ にとる。すると,

$$W'(y_1) = e^{2\pi y_1} \int ds_3 (4\pi y_1)^{-s_3} \frac{\Gamma(s + (\nu + 1)/2) \Gamma(s + (-\nu + 1)/2)}{\Gamma(s_3 + \alpha_5/2)} \quad \text{with } \alpha_5 = 2 - \alpha_2,$$

$$f(s; y_1, y_2) = y_1^{s-2} y_2^{2s-2} \Gamma_{\mathbf{R}}(2s + \alpha_6) \quad \text{with } \alpha_6 = |\lambda_1 - k|.$$

である。補題を使って計算すると, $Q(s) = 1$ を得る。これから, 所望の関数等式が成立し, Eisenstein 級数の極で一位の possible pole をもつほかは正則と分かる。

計算 - Case (i) $l \leq \lambda_1$ のときは, Case (ii) と同様に扱えるので略。 $l \geq \lambda_1$ のときには, $\mathbf{G}_{\mathbf{R}}$ 上の Whittaker 関数として極小 K -タイプに属すベクトルに対応するものだけでは局所ゼータ積分を $\neq 0$ にできない。そこで, 極小 K -タイプから外れたベクトル ($\in \Pi_\infty$) に対して局所ゼータ積分を計算する。この計算は, 少し工夫を要する。まず $\mathbf{G}_{\mathbf{R}}$ のリー環の複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ の元 $X_{(1,-1)}, X_{(-1,-1)}$ を

$$X_{(1,-1)} := \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & & -i \\ -1 & & -i & \\ \hline & i & & 1 \\ & i & & -1 \end{array} \right), \quad X_{(-1,-1)} := \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & & -i \\ 1 & & -i & \\ \hline & -i & & -1 \\ & -i & & -1 \end{array} \right),$$

とおく。また, $X_{(0,-2)} := [X_{(1,-1)}, X_{(-1,-1)}]$ とおく。これらは, $Sp(2, \mathbf{R})$ の (標準的な) コンパクト Cartan 部分代数についてのルートベクトルになっている。

いま, $W \in \text{Wh}(\Pi_\infty, \psi_\infty)$, および $W' \in \text{Wh}(\sigma_\infty, \psi_\infty)$ が

$$W(g; X_{(1,-1)}) = 0, \quad W'(h; X_{(0,-2)}) = 0,$$

をそれぞれ満たすとする。また, $q_1, q_2, n \in \mathbf{Z}, n \geq 0$ が存在して,

$$W(g(r_{\theta_1}, r_{\theta_2})) = \exp(2\pi\sqrt{-1}(q_1\theta_1 + q_2\theta_2))W(g), \quad \forall g \in \mathbf{G}_{\mathbf{R}}, \forall \theta_i \in \mathbf{R}$$

$$W'(h_2 r_{\theta_2}) = \exp(2\pi\sqrt{-1}((-q_2 + n)\theta_2))W'(h_2), \quad \forall h_2 \in GL(2)_{\mathbf{R}}, \forall \theta_2 \in \mathbf{R}$$

だとする。ここで, $r_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ と書いた。

補題 4.2. この状況で, $f \in \mathcal{I}^J(1, \omega^{-1}; s)$ を

$$f(s, h_1 r_{\theta_1}) = \exp(2\pi\sqrt{-1}((-q_1 + n)\theta_1))f(s, h_1), \quad \forall h_1 \in GL(2)_{\mathbf{R}}, \forall \theta_1 \in \mathbf{R}$$

となるように取る。すると次が成立:

$$\begin{aligned} & Z^{(\infty)}(s, W(\cdot; (X_{(-1,-1)})^n), W', f) \\ &= \int_0^\infty d^\times y_1 \int_0^\infty d^\times y_2 W(y) W'(\text{diag}(y_1, 1)) f(s, \text{diag}(y_1 y_2, y_2^{-1})) (-4\pi\sqrt{-1}y_2)^n (y_1 y_2)^{-2} \end{aligned}$$

ただし, $y = \text{diag}(y_1 y_2, y_1, y_2^{-1}, 1) \in \mathbf{G}_{\mathbf{R}}$ と書いた。

Proof. まず, $X_{(1,-1)} + X_{(-1,-1)} \in \text{Lie}(\mathbf{N}_{\mathbf{R}}) \otimes \mathbf{C}$ に注意すると,

$$(-4\pi\sqrt{-1}y_2)^n W(y) = W(y; (X_{(1,-1)} + X_{(-1,-1)})^n)$$

なので,

$$\begin{aligned} \text{rhs.} &= \sum_{i_1, \dots, i_n = \pm 1} \int_0^\infty d^\times y_1 \int_0^\infty d^\times y_2 W(y; X_{(i_n, -1)} \cdots X_{(i_2, -1)} \cdot X_{(i_1, -1)}) \\ &\quad \times W'(\text{diag}(y_1, 1)) f(s, \text{diag}(y_1 y_2, y_2^{-1})) (y_1 y_2)^{-2} \end{aligned}$$

ここで, $\vec{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n) \neq (-1, -1, \dots, -1)$ の項がすべて消えることをいえばよい (W や W' が単位元を含まない連結成分上でゼロであることにも注意)。 $\vec{i} \neq (-1, -1, \dots, -1)$ なる \vec{i} をひとつ固定する。 $i_p = 1$ となる最小の $1 \leq p \leq n$ が存在する。以下, p に関する帰納法。 $p = 1$ ならば,

$$W(y; X_{(i_n, -1)} \cdots X_{(i_2, -1)} \cdot X_{(i_1, -1)}) = 0$$

となって当然, 積分の値もゼロ。 $p \geq 2$ とする。

$$\begin{aligned} & X_{(i_n, -1)} \cdots X_{(i_2, -1)} \cdot X_{(i_1, -1)} \\ &= X_{(i_n, -1)} \cdots X_{(i_{p+1}, -1)} \cdot X_{(1, -1)} \cdot (X_{(-1, -1)})^{p-1} \\ &= X_{(i_n, -1)} \cdots X_{(i_{p+1}, -1)} \cdot (X_{(-1, -1)} \cdot X_{(1, -1)} + X_{(0, -2)}) \cdot (X_{(-1, -1)})^{p-2} \\ &= X_{(i_n, -1)} \cdots X_{(i_{p+1}, -1)} \cdot X_{(-1, -1)} \cdot X_{(1, -1)} \cdot (X_{(-1, -1)})^{p-2} \\ &\quad + X_{(0, -2)} \cdot X_{(i_n, -1)} \cdots X_{(i_{p+1}, -1)} \cdot (X_{(-1, -1)})^{p-2} \end{aligned}$$

帰納法の仮定より, 第2項のみが問題である。 $\mathbf{G}_{\mathbf{R}}$ の部分群 M_J^+ を

$$M_J^+ := \left\{ m = (m_1, m_2) \in \mathbf{G}_{\mathbf{R}} \mid m_1 = \begin{pmatrix} y_1 y_2 & \\ & y_2^{-1} \end{pmatrix}, y_i > 0, m_2 \in GL^+(2, \mathbf{R}) \right\}$$

で定義すると,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty d^\times y_1 \int_0^\infty d^\times y_2 W(y; X_{(0, -2)} \cdot X_{(i_n, -1)} \cdots X_{(i_{p+1}, -1)} \cdot (X_{(-1, -1)})^{p-2}) \\ & \quad \times W'(\text{diag}(y_1, 1)) f(s, \text{diag}(y_1 y_2, y_2^{-1})) \times (y_1 y_2)^{-2} \\ &= \int_{\mathbf{Z}_{\mathbf{R}}(M_J^+ \cap \mathbf{N}_{\mathbf{R}}) \backslash M_J^+} dm W(m; X_{(0, -2)} \cdot X_{(i_n, -1)} \cdots X_{(i_{p+1}, -1)} \cdot (X_{(-1, -1)})^{p-2}) \\ & \quad \times W'(m_2) f(s, m_1) \times (y_1 y_2)^{-1} \end{aligned}$$

ここで積分の右不変性を使って

$$= \int_{\mathbf{Z}_R(M_{\mathbb{R}}^{\dagger} \cap \mathbf{N}_R) \setminus M_{\mathbb{R}}^{\dagger}} dm W(m; X_{(i_n, -1)} \cdots X_{(i_{p+1}, -1)} \cdot (X_{(-1, -1)})^{p-2}) \\ \times W'(m_2; -X_{(0, -2)}) f(s, m_1) (y_1 y_2^2)^{-1},$$

となるが, $W'(m_2; -X_{(0, -2)}) = 0$ よりこの積分はゼロとなる。□

この補題を, $(q_1, q_2) = (-\lambda_2, -\lambda_1)$, $-q_2 + n = l$ として用いると, やはり $Q(s) = 1$ となる。したがって, このときにも, 定理が成立することが言えた。□

付録. Basic identity の証明

[Bu] にも概略があるが, 念のため書いておく。代数群の間のうめこみ $\iota: GL(2) \hookrightarrow G$ を

$$\iota(\gamma) = \left(\begin{array}{cc|cc} \det(\gamma) & & & \\ & a & & b \\ \hline & & 1 & \\ & c & & d \end{array} \right), \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2)$$

で定める。このとき, つぎの補題をまず示す:

補題 4.3.

$$\int_{k \setminus \mathbf{A}_k} F(n(0, x_1, 0, 0)g) dx_1 = \sum_{\gamma \in \mathbf{N}'_k \setminus GL(2)_k} \mathcal{W}_F(\iota(\gamma)g).$$

Proof. $(x_0, x_2) \in (k \setminus \mathbf{A}_k)^2$ の関数 h を

$$h(x_0, x_2) := \int_{\mathbf{A}_k/k} F(n(x_0, x_1, x_2, 0)g) dx_1$$

で定めると,

$$\begin{aligned} r.h.s. &= \sum_{\gamma \in \mathbf{Q}_k \setminus GL(2)_k} \sum_{\delta \in k^{\times}} \mathcal{W}_F(\text{diag}(\delta, \delta, 1, 1)\iota(\gamma)g) \\ &= \sum_{\gamma \in \mathbf{Q}_k \setminus GL(2)_k} \int_{(\mathbf{A}_k/k)^3} dx_1 dx_2 dx_0 F(n(x_0, x_1, x_2, 0)\iota(\gamma)g) \psi(x_0) \\ &= \sum_{\gamma \in \mathbf{Q}_k \setminus GL(2)_k} \int_{(\mathbf{A}_k/k)^2} h(x'_0, x'_2) \psi(x_0) dx_0 dx_2 \\ &= \sum_{\gamma \in \mathbf{Q}_k \setminus GL(2)_k} \int_{(\mathbf{A}_k/k)^2} h(x'_0, x'_2) \psi(dx'_0 - cx'_2) dx_0 dx_2 \\ &= \sum_{(c,d) \in k^2, (c,d) \neq (0,0)} \int_{(\mathbf{A}_k/k)^2} h(x'_0, x'_2) \psi(dx'_0 - cx'_2) dx_0 dx_2 = l.h.s. \end{aligned}$$

ここで, 2つ目の等号で [Mo-2, 補題 9] を用いた。また, 3つ目の等号で G_k の元を左側へ移動させ, $x'_0 = \frac{ax_0 + cx_2}{ad - bc}$, $x'_2 = \frac{bx_0 + dx_2}{ad - bc}$ と変数変換した。□

次に, $P := H \cap (B' \times GL(2))$ と定義すると,

$$P_k \mathbf{Z}_{\mathbf{A}_k} \setminus H_k \mathbf{Z}_{\mathbf{A}_k} \cong P_k \setminus H_k \cong B'_k \setminus GL(2)_k$$

なので,

$$\begin{aligned}
& Z(s, F \otimes \varphi, f) \\
&= \int_{\mathbf{Z}_{\mathbf{A}_k} \mathbf{H}_k \backslash \mathbf{H}_{\mathbf{A}_k}} dh F(h) \varphi(h_2) \sum_{\gamma_1 \in \mathbf{B}'_k \backslash \mathbf{GL}(2)_k} f(s, \gamma_1 h_1) \\
&= \int_{\mathbf{P}_k \mathbf{Z}_{\mathbf{A}_k} \backslash \mathbf{H}_{\mathbf{A}_k}} dh F(h) \varphi(h_2) f(s, h_1) \\
&= \int_{\mathbf{P}_k (\mathbf{N}' \times 1)_{\mathbf{A}_k} \mathbf{Z}_{\mathbf{A}_k} \backslash \mathbf{H}_{\mathbf{A}_k}} dh \int_{\mathbf{P}_k \mathbf{Z}_{\mathbf{A}_k} \backslash \mathbf{P}_k (\mathbf{N}' \times 1)_{\mathbf{A}_k} \mathbf{Z}_{\mathbf{A}_k}} dn' F(n'h) (\varphi \cdot f)(s, n'h) \\
&= \int_{\mathbf{P}_k (\mathbf{N}' \times 1)_{\mathbf{A}_k} \mathbf{Z}_{\mathbf{A}_k} \backslash \mathbf{H}_{\mathbf{A}_k}} dh \int_{\mathbf{k} \backslash \mathbf{A}_k} dx_1 F(n(0, x_1, 0, 0)h) \varphi(h_2) f(s, h_1)
\end{aligned}$$

ここで, 上の補題を使って

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbf{P}_k (\mathbf{N}' \times 1)_{\mathbf{A}_k} \mathbf{Z}_{\mathbf{A}_k} \backslash \mathbf{H}_{\mathbf{A}_k}} dh \sum_{\gamma \in \mathbf{N}'_k \backslash \mathbf{GL}(2)_k} \mathcal{W}_F(\iota(\gamma)h) \varphi(h_2) f(s, h_1) \\
&= \int_{(\mathbf{H} \cap (\mathbf{B}' \times \mathbf{B}'))_k (\mathbf{N}' \times 1)_{\mathbf{A}_k} \mathbf{Z}_{\mathbf{A}_k} \backslash \mathbf{H}_{\mathbf{A}_k}} dh \mathcal{W}_F(h) \varphi(h_2) f(s, h_1) \\
&= \int_{\mathbf{Z}_{\mathbf{A}_k} \mathbf{N}_{\mathbf{A}_k}^{\mathbf{H}} \backslash \mathbf{H}_{\mathbf{A}_k}} dh \int_{\mathbf{N}'_k \backslash \mathbf{N}'_{\mathbf{A}_k}} dn \mathcal{W}_F((1, n')h) \varphi(h_2) f(s, h_1) \\
&= r.h.s.
\end{aligned}$$

REFERENCES

- [B-H] BÖCHERER, S. AND HEIM, B., *L-functions on $\mathrm{GSp}_2 \times \mathrm{GL}_2$ of mixed weights.*, *Math. Z.* **235** (2000), 11–51.
- [Bu] BUMP, D., *The Rankin-Selberg method: a survey.* Number theory, trace formulas and discrete groups, 49–109, Academic Press, (1989).
- [F] FURUSAWA, M., *On L-functions for $\mathrm{GSp}(4) \times \mathrm{GL}(2)$ and their special values.*, *J. Reine Angew. Math.* **438** (1993), 187–218.
- [H] HEIM, B., *Pullbacks of Eisenstein series, Hecke-Jacobi theory and automorphic L-functions.* Automorphic forms, automorphic representations, and arithmetic (Fort Worth, TX, 1996), 201–238, *Proc. Sympos. Pure Math.*, **66** Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [Is] ISHII, T., *On principal series Whittaker functions on $\mathrm{Sp}(2, \mathbf{R})$* , preprint (2002).
- [Is-Mo] ISHII, T. AND MORIYAMA, T., *Spinor L-functions for generic cusp forms on $\mathrm{GSp}(2)$ belonging to principal series representations (tentative)*, in preparation.
- [J] JACQUET, H., *Automorphic forms on $\mathrm{GL}(2)$* , *Lecture Notes in Mathematics* **278**, Springer-Verlag (1972).
- [J-S] JACQUET, H. AND SHALIKA, J. A., *On Euler products and the classification of automorphic representations. I.*, *Amer. J. Math.* **103** (1981), 499–558.
- [Mi-O1] MIYAZAKI, T. AND ODA, T., *Principal series Whittaker functions on $\mathrm{Sp}(2; \mathbf{R})$. II.*, *Tohoku Math. J. (2)* **50** (1998), no. 2, 243–260.
- [Mo-1] MORIYAMA, T., *A remark on Whittaker functions on $\mathrm{Sp}(2, \mathbf{R})$* , *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **9** (2002), no. 4, 627–635.
- [Mo-2] MORIYAMA, T., *$\mathrm{Sp}(2, \mathbf{R})$ 上の Whittaker 関数と Novodvorsky のゼータ積分について* In: 保型形式およびそれに付随するディリクレ級数の研究, 京都大学数理解析研究所講究録 **1281** (2002), 1–13.
- [Mo-3] MORIYAMA, T., *L-functions attached to non-holomorphic Siegel modular forms of degree 2* In: デイオファントス問題と解析的整数論, 京都大学数理解析研究所講究録 **1319** (2003), 174–182.

- [Mo-4] MORIYAMA, T., *Entireness of the Spinor L -functions for certain generic cusp forms on $GSp(2)$* , to appear in the American Journal of Mathematics.
- [Ni-2] NIWA, S., *Commutation Relations of Differential operators and Whittaker Functions on $Sp_2(\mathbf{R})$* , Proc. Japan Acad. **71** Ser A. 189-191, (1995).
- [No] NOVODVORSKY, M. E. , *Automorphic L -functions for symplectic group $GSp(4)$* . Proc. Sympos. Pure Math. **33** Part 2, 87-95, (1979).
- [O] ODA, T., *An explicit integral representation of Whittaker functions on $Sp(2, \mathbf{R})$ for large discrete series representations*, Tôhoku Math. J. **46**, 261-279 (1994).
- [So-1] SOUDRY, D., *The L and γ factors for generic representations of $GSp(4, k) \times GL(2, k)$ over a local non-Archimedean field k .*, Duke Math. J. **51**, 355-394, (1984).
- [So-2] SOUDRY, D., *On the Archimedean theory of Rankin-Selberg convolutions for $SO_{2l+1} \times GL_n$.*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **28** 161-224 (1995).

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SOPHIA UNIVERSITY, 7-1 KIOI-CHO, CHIYODA-KU, TOKYO, 102-8554 JAPAN

E-mail address: moriyama@mm.sophia.ac.jp