数理解析研究所講究録 1398 巻 2004 年 137-148

ジーゲル保型形式の志村対応の予想の定式化および cubic zeta lifting の実例

伊吹山知義 (Tomoyoshi IBUKIYAMA)
大阪大学大学院理学研究科数学教室
(Department of Math., Graduate School of Sci., Osaka Univ.)

1変数保型形式について、ウェイトが整数の保型形式とウェイトが半整数の保型形式の間の対応は志村対応として有名である。特に、もっとも基本的な場合、すなわち群のレベルが1の場合は、W. Kohnen によるより詳しい記述があり、$SL_2(\mathbb{Z})$ の保型形式と $\Gamma_0(4)$ の保型形式の空間のプラススペースと呼ばれる部分空間が1対1に対応することが知られている。

しかし、筆者の知る限り、ジーゲル保型形式については、このような予想を述べた例は皆無であったと思う。この講演では、次数2のジーゲル保型形式について、レベル1のものについて1対1の対応予想を、かなり複雑な数値的な証拠とともに述べた。

この数値的な例の構成で、ベクトル値の保型形式の具体例を多数とりあつかったので、そのいわば技術的な副産物として、Kim-Shahidi による、ウェイト2の1変数保型形式の Symmetric cube zeta 関数がウェイト3の正則ジーゲル保型形式からくるであろうという予想について、これのベクトル値版を考え、予想例を構成した。これについても述べた。以上を以下で報告する。詳しくは、準備中の論文 [8],[9], [7] を参照されたい。

1　1変数の時の志村対応予想の復習

次数2の場合を説明する前に1変数の復習をしておく。ここで復習するのは、W. Kohnen によるもっとも単純な場合である。正整数 k に対して、$S_{2k-2}(SL_2(\mathbb{Z}))$ で $SL_2(\mathbb{Z})$ に関するウェイト $2k-2$ のカスプ形式の空間を表す。また $S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ でウェイトが $k-1/2$ のカスプ形式の空間を表す。ここで、ウェイトが $k-1/2$ という定義は次のとおりである。簡単のため、

$e(x) = e^{2\pi ix}$ と書くことにして、上半平面 H_1 で定義された正則関数

$$\theta(\tau) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} e(p^2\tau) \ (\tau \in H_1)$$

を考えると、$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ 4c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)$ に対して

$$(\theta(\gamma\tau)/\theta(\tau))^2 = \left(\frac{-1}{d}\right)(c\tau + d)$$

が成立するから、$\theta(\gamma\tau)/\theta(\tau)$ を $\Gamma_0(4)$ に関するウェイト 1/2 の保型因子と考えることができる。よって H_1 上の正則関数 $f(\tau)$ で、任意の $\gamma \in \Gamma_0(4)$ に対して

$$f(\gamma\tau) = f(\tau)(\theta(\gamma\tau)/\theta(\tau))^{2k-1}$$

を満たし、かつ各カスプで消えるものを、ウェイト $k - 1/2$ のカスプ形式という。さて、$S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ はレベルが 4 であるから、この空間の中でレベル 1 に相当するものを抽出したい。これは一種の new forms であり、これが Kohnen のプラス空間である。具体的には、$f \in S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ のとき f のフーリエ展開を

$$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n)e(n\tau)$$

とするとき、$n \equiv 0$ or $(-1)^{k-1} \bmod 4$ でないと $c(n) = 0$ となるようなもののなす $S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ の部分空間を $S^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ と書いて、Kohnen のプラス空間という。

定理（Shimura, Kohnen) L 関数を保つ次の同型が存在する。

$$S_{2k-2}(SL_2(\mathbb{Z})) \cong S^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4)).$$

ここで左辺の L 関数は普通の Hecke の意味での L 関数である。右辺は、平方のところだけで決まるヘッケ作用素で定義された L 関数であるが、詳しくは略す。

ちなみにプラス空間は、k が偶数ならば index 1 の正則ヤコービ形式の空間に、また k が奇数ならば index 1 の歪正則ヤコービ形式の空間に同型である。(それぞれ Zagier と Skoruppa による。)

2 ベクトル値のジーゲル保型形式、整数ウェイトの場合

§1 の結果を一般化するためには、本質的な部分でベクトル値の保型形式をあつかう必要が生ずる。このためベクトル値のジーゲル保型形式について、復習する。簡単のために、次数 2 に限ることにする。$GL_2(\mathbb{C})$ の有理既約表現は $\rho_{k,j}(g) = \det(g)^k Sym(j)(g)$ の形のものしかない。ここで $Sym(j)$ は j 次の対称テンソル表現である。

H_2 を次数 2 のジーゲル上半空間とする。また $Sp(2,\mathbb{R})$ を行列サイズが 4 の実シンプレクティック群とする。まず整数ウェイトについて述べる。H_2 上の正則関数 F に対して

$$(F|_{k,j}[g])(Z) = \rho_{k,j}(CZ+D)^{-1}F(gZ)$$

とおく。ただし $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(2,\mathbb{R})$ とした。これにより、H_2 上の正則関数のなす空間に $Sp(2,\mathbb{R})$ が作用する。正則関数 F がこの作用について $Sp(2,\mathbb{Z})$ で不変なときに、これをウェイト $\rho_{k,j} = \det^k Sym(j)$ の正則保型形式という。またカスプでゼロのとき、つまり今の場合は

$$\Phi(F)(\tau) = \lim_{\lambda\to\infty} F\begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & i\lambda \end{pmatrix}$$

とおいて、$\Phi(F) = 0$ となるときに、F をカスプ形式という。ウェイトが $\rho_{k,j}$ のカスプ形式全体の空間を $S_{k,j}(Sp(2,\mathbb{Z}))$ と書くことにする。ここで k は整数なので、あとの k が半整数の場合と対比させる意味で、これをベクトル値かつ整数ウェイトと呼ぶことにする。

(ちなみに k, j のどちらを先に書くかは人によって違う。最初にベクトル値に関する結果を述べた荒川氏の論文では上のような順序になっているので、これに従う。)

3 ベクトル値のジーゲル保型形式、半整数ウェイトの場合

今 $\det^k(g)$ の部分のべきを、半整数に変えたい。これについては、1 変数のときとほぼ同様だが、大きく違う部分もある。まず、$Z \in H_2$ の関数 $\theta(Z)$ を

$$\theta(Z) = \sum_{p\in\mathbb{Z}^2} e({}^t pZp)$$

と定義する。また、$Sp(2,\mathbb{Z})$ の部分群を

$$\Gamma_0(4)=\left\{\gamma=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in Sp(2,\mathbb{Z}); C\equiv 0 \bmod 4\right\}$$

と定義する。このとき $\gamma=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ に対して、$\psi(\gamma)=\left(\frac{-1}{\det(D)}\right)$ と置くとこれは $\Gamma_0(4)$ の指標になる。さて、

$$(\theta(\gamma Z)/\theta(Z))^2=\psi(\gamma)\det(CZ+D)$$

が知られている。よって、$\theta(\gamma Z)/\theta(Z)$ を $\Gamma_0(4)$ のウェイト 1/2 の保型因子として用いることができる。

さて、整数ウェイトの時と異なり、保型形式の定義で $\Gamma_0(4)$ のなんらかの指標 χ を考慮に入れることにする。$\Gamma_0(4)$ に関するウェイト $\det^{k-1/2}Sym(j)$ かつ指標 χ の保型形式 F というのを、H_2 上の正則関数で任意の $\gamma\in\Gamma_0(4)$ について

$$F(\gamma Z)=\chi(\gamma)(\theta(\gamma Z)/\theta(Z))^{2k-1}Sym(j)(CZ+D)F(Z)$$

となるものと定義する。各カスプで消滅するものをカスプ形式という。このようなカスプ形式の空間を $S_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4),\chi)$ と書くことにする。χ は典型的には単位指標、または ψ である。Hecke の用語法にならって、$S_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4),\chi)$ の元を、χ が単位指標のとき Haupt type, $\chi=\psi$ のとき Neben type と呼ぶことにする。実は 1 変数のときは、Neben type を同じように定義しても恒等的にゼロになるものしかないから無意味である。これは -1_2 の作用が、-1 倍になるためである。しかし次数 2 のときは -1_4 の作用は、$\det(-1_2)=1$ となるせいで、恒等写像となり、Neben type のものが多数存在する。

次にプラス空間を定義する。$l=0$ または 1 として、$F\in S_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4),\psi^l)$ とする。フーリエ展開が

$$F(Z)=\sum_T a(T)e(tr(TZ))$$

(T は半正定値半整数対称行列) と書けるのは普通通りである。ただしここで $a(T)$ は $j+1$ 次のベクトルである。さて、ある $\mu\in\mathbb{Z}^2$ について $(-1)^{k+l}T\equiv {}^t\mu\mu \bmod 4$、つまり $(-1)^{k+l}T$ と $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ のどれかとの差が $\begin{pmatrix}4a & 2b\\ 2b & 4c\end{pmatrix}$ (a, b, $c\in\mathbb{Z}$) の形の場合以外は

$a(T)=0$ となる、という条件を満たす F 全体の空間をプラス空間と定義し、$S^+_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4),\psi^l)$ と書く。実際には、この空間の様子は数値実験などから見る限り、$l=0$ と $l=1$ (Haupt と Neben) でかなり異なっている。(Haupt では大量にリフティングがあるらしいのが観測されるのに Neben では、ほとんど観測されないなど)

次の定理はかなり以前に得られたものであり、一般の次数でも良いのだが、ここでは次数2に特化して述べる。

定理 (Hayashida and Ibukiyama) $S^+_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4),\psi^l)$ は、$k+l$ が偶数ならば、$Sp(2,\mathbb{Z})$ に関する index 1 の正則ヤコービ形式の空間に、また $k+l$ が奇数ならば、$Sp(2,\mathbb{Z})$ に関する index 1 の歪正則ヤコービ形式の空間に 2 以外の素点での Hecke 作用素の作用をこめて同型である。

ヤコービ形式の空間の定義はここでは省略するが、ポイントはヤコービ形式サイドではレベルが1だということで、従ってプラス空間がレベル1のように振舞うという理由づけになっている。

4 志村対応予想

予想
k を3以上の整数、j を非負の**偶数**とする。L 関数を保つような次の同型が存在する。

$$S^+_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4),\psi)\cong S_{j+3,2k-6}(Sp(2,\mathbb{Z}))$$

ただしここで右辺は Spinor L 関数、左辺は Zhuravlev の定義した L 関数をとる。また左辺では、素数 2 での Euler factor の定義は、ヤコービ形式の 2 でのヘッケ作用素を引き戻すことにより得られる。
いくつか注意を述べる。
(1) j が奇数とすると、上の予想は正しくない。j が奇数ならば左辺はゼロだが、右辺はゼロとは限らないからである。
(2) 右辺は $j+3$ が奇数であることより、実際にはカスプ形式以外の保型形式は存在しない。また左辺も、指標 ψ がついているという事情により、カスプ形式しか存在しない。したがって1変数ならばアイゼンシュタイン級数が対応のプロトタイプとして理解の助けになるのに、今の場合は残念ながらこのようなものが存在せず、わかりにくい。
(3) 上の同型対応は本質的にベクトル値のものが絡んでいる。両辺ともにスカ

ラー値とすると、$j=0, k=3$ となる。このときは両辺ともにゼロであり、つまらない。また、左辺がスカラー値であると右辺のウェイトは $\det^3 Sym(2k-6)$ であり、右辺がスカラー値であると左辺のウェイトは $\det^{5/2} Sym(j)$ (Neben) であり、スカラー値はおおむねベクトル値に対応する。一般にはベクトル値対ベクトル値の対応である。以上により、ベクトル値のジーゲル保型形式をとるのが本質的である。
(4) ウェイトの対応はもともと次のようなアイデアで得られたものである。$Sp(2,\mathbb{R})$ とそのコンパクト実型 $Sp(2)$ の間には Ihara, Langlands 予想により保型形式の対応があるはず。このウェイトの対応がどうあるべきかはわかっている。一方で、$Sp(2)/\{\pm 1_2\} \cong SO(5)$ である。$SO(5)$ と $Sp(2,\mathbb{R})$ の 2 重被覆の間にはテータ対応がある。このときのウェイトの対応もわかる。これらをあわせると、$SP(2,\mathbb{R})$ と $Sp(2,\mathbb{R})$ の 2 重被覆の (ウェイトの) 対応がどうあるべきかがわかる。これを具体的に記述したのが、上述のウェイトの関係であって、これ以外の対応は考えられないと思う。
(4) このように述べると証明も (3) のテータ対応で得られると思うかもしれない。しかしこれは正しくない。まずコンパクト実形を経由する限り、離散群にレベルがつくのを避けることができない。第 2 に、$Sp(2)$ と $SO(5)$ の差は大きい。$Sp(2)$ から $SO(5)$ に移行すると情報はかなり失われるはずである。さらに、コンパクト実形を用いるのをやめていきなり $SO(3,2)$ をとってテータ対応を考えたりすると、たぶん正則なものがでてこない。以上の理由から正しい証明法は跡公式であると考える。実際、あとで述べるように、これはかなり見込みがある。

5 L 関数の定義

どのような L 関数を用いているのかを、もう少し詳しく解説する。まず整数ウェイトの時には、荒川恒男氏による Spinor L 関数の関数等式の証明 (Andrianov の結果のベクトル値への拡張) が知られているが、それにならって定義する. $F \in S_{k,j}(Sp(2,\mathbb{Z}))$ をヘッケ作用素の同時固有関数とすると、以下のようになる。

$$L(s,F) = \prod_p (1 - \lambda(p)p^{-s} + (\lambda(p)^2 - \lambda(p^2) - p^{\mu-1})p^{-2s} - \lambda(p)p^{\mu-3s} + p^{2\mu-4s})^{-1}$$

ここで $\mu = 2k+j-3$ とおいた。 また、整数 δ に対して、$\lambda(p^\delta)$ は Hecke 作用素

$$T(p^\delta) = \{g \in M_4(\mathbb{Z}); {}^t gJg = p^\delta J\}$$

の固有値とした。ここで $J = \begin{pmatrix} 0 & -1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix}$ である。

なお、ヘッケ作用素の作用の定義は normalization をどうとるかという問題があるので、以下に正確に定義を書いておく。$GSp^+(2,\mathbb{R}) = \{g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}),\ {}^tgJg = n(g)J\ (n(g) > 0)\ \}$ の元 g と $F \in S_{k,j}(Sp(2,\mathbb{Z})$ に対して、

$$F|_{k,j}[g] = \rho_{k,j}(CZ+D)^{-1}F(gZ)$$

と定義する。またダブルコセットを

$$T(p^\delta) = \cup_{g_i} Sp(2,\mathbb{Z})g_i \text{ (disjoint)}$$

と片側コセットに分解しておき、

$$F|_{k,j}T(p^\delta) = p^{\delta(2k+j-3)}\sum_i F|[g_i]$$

と定義する。$F|_{k,j}T(p^\delta) = \lambda(p^\delta)F$ として固有値を定義した。

一方で、半整数ウェイトの時は、ヘッケ作用素の理論は Zhuravlev により知られている。Zhuravlev の論文では L 関数の形が必ずしもわかりやすく書かれていないため、少しきちんと復習する。まず、$\Gamma_0(4)$ を $\Gamma_0(4) \ni \gamma \to (\gamma, \theta(\gamma Z)/\theta(Z))$ によりメタプレクティック群に埋め込み、この埋め込みの像を $\tilde{\Gamma}_0(4)$ とする。$g \in M_4(\mathbb{R}),\ {}^tgJg = m^2g$ なる元に対して、

$$g_1 = m^{-1}g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

とおいて、任意の H_2 上の正則関数に対して

$$F|_{k-1/2,j}[(g,\phi(Z))] = Sym(j)(CZ+D)^{-1}\phi(Z)^{-2k+1}F(gZ)$$

と定義する。任意の奇素数 p について、

$$K_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, p^{1/2}\right) \qquad K_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p^2 \end{pmatrix}, p\right)$$

とおく。$\tilde{\Gamma}_0(4)$ 両側コセット

$$T_i(p) = \tilde{\Gamma}_0(4)K_i\tilde{\Gamma}_0(4) = \cup_j \tilde{\Gamma}_0(4)\tilde{g}_j$$

に対して、

$$F|_{k-1/2,\rho}T_i(p) = p^{i(k+j-7/2)}\sum_j F|_{k-1/2,\rho}[\tilde{g}_j]\psi(\det(D_j))$$

と定義する。ただし、D_j は $p^{-1}g_j$ の右下の２行２列のブロックをあらわす。$S^+_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4),\psi)$ は、この作用で不変である。今は奇素数のみについて述べたが、$p=2$ についても、対応するヤコービ形式の作用素を引き戻すと、やはり $S^+_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4),\psi)$ 上のヘッケ作用素が定義される。詳しくは略す。(cf [?]).

さて、$F\in S_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4))$ をすべての $T_i(p)$ の同時固有関数とするとき、固有値を $T_1(p)F=\lambda(p)F$, $T_2(p)F=\omega(p)F$ と書くことにして

$$\begin{aligned}&L(s,F)\\ =\ &\prod_p(1-\lambda(p)\psi(p)p^{-s}+(p\omega(p)+p^{2k+2j-5}(1+p^2))p^{-2s}-\lambda(p)\psi(p)p^{2k+2j-3}+p^{4k+4j-6})^{-1}\end{aligned}$$

と定義する。

以上が、予想で使用した L 関数である。

予想の補足 $a\le b\le d\le c$ となる整数をとる。また $a+c=b+d=\delta$ とする。すると前に与えた同型により、より詳しく整数ウェイトへのヘッケ作用素 $T(p^a,p^b,p^c,p^d)$ の作用は半整数ウェイトへのヘッケ作用素 $\psi(p^\delta)T(p^{a+b},p^{a+d},p^{c+d},p^{b+c})$ の作用に一致するであろう。

この予想により、予想の証明は跡公式の比較に帰着することになる。

6 予想の根拠

予想の根拠を述べる。なお予想のポイントは、対応があるらしいということよりも、１対１という点にある。１対１という予想であるから跡公式による証明が望めるからである。

(1) 次元が一致するらしいこと。まず整数ウェイトのベクトル値ジーゲル保型形式の次元公式は、$k\ge 5$ では対馬により知られている。一方で、半整数ウェイトのベクトル値ジーゲル保型形式の次元公式は、普通成立すると思われるコホモロジーの消滅定理を仮定するとやはり対馬により公式が知られている。(ただし $k\ge 5$ という条件はつく。) ここでコホモロジーの消滅定理は実際には証明されていないわけであるから、公式というよりは、予想である。しかし、予想といっても完全に具体的な式であるから、整数ウェイトと

半整数ウェイトの次元公式を比較することができる。この比較の計算を私は実際に実行してみた。すると j が偶数のとき、

$$\dim S^+_{k-1/2,j}(\Gamma_0) = \dim S_{j+3,2k-6}(Sp(2,\mathbb{Z}))$$

が上記の仮定のもとで成立する。ただし、k, j は次元公式（ないしは予想）が有効な範囲としている。両辺の公式はきわめて複雑であり、このようなものが一致するのは偶然とはとうてい思われない。

実際には次元公式がそのままでは有効かどうかわからない $k=3$ や $j=0$ の場合などでも、この関係は（明らかな補正をすれば）成立するのである。ということは実は**通常の次元公式は、ベクトル値でレベルが１のときは** $\det^3 Sym(j)$ **の部分でも有効らしい**という、ちょっと思いがけない観察が得られることになる。

(2) 数値例：一般に j を固定するとき、$\sum_{k=0}^{\infty} S_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4))$ は環 $A=\{f(4Z); f(Z)\in \oplus_{k=0}^{\infty} A_{2k}(Sp(2,\mathbb{Z}))\}$ 上の加群である。ただし $A_{2k}(Sp(2,\mathbb{Z}))$ はウェイト $2k$ のスカラー値のジーゲル保型形式の空間である。さて、$j=2$ または $j=4$ の時には、この加群の生成元を具体的に与えることができる。これから、その部分空間としてプラス空間の元を実験的に与えることができる。実際にはこのようなものの中から、半整数ウェイトの保型形式を９つとり、それらにに対応する整数ウェイトの保型形式もテータ関数で構成し、両者の２と３でのオイラーを比較したところ、すべて一致した。これもきわめて複雑な、しかも次元の異なるベクトルを比較しておりこのような一致が偶然とは到底思えない。以上の実例は講演では具体的に述べたが、紙数もないので、ここでは省略する。具体的に比較したのは次の９つの場合である。

$S^+_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4),\psi)$ で言えば、

(k,j)	$(12,2)$	$(13,2)$	$(14,2)$	$(15,2)$	$(16,2)$
次元	1	1	0	2	2
(k,j)	$(8,4)$	$(9,4)$	$(10,4)$	$(11,4)$	$(12,4)$
次元	0	1	1	1	2

（ただし以上の次元は対馬による予想値）

$S_{k,j}(Sp(2,\mathbb{Z})$ で言えば

(k,j)	$(5,18)$	$(5,20)$	$(5,22)$	$(5,24)$	$(5,26)$
次元	1	1	0	2	2
(k,j)	$(7,10)$	$(7,12)$	$(7,14)$	$(7,16)$	$(7,18)$
次元	0	1	1	1	2

(ここでは次元は確定値)

(3) なお、両者の関数等式についても一致するものと思うが、半整数の方にきちんとした文献がないかと思うので、正確には確かめていない。

7 Kim-Shahidi lifting

f を適当な群に関するウェイト k の1変数カスプ形式でヘッケ作用素の同時固有関数とする。$f=\sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n$ に対して

$$L(s,f)=\prod_{p:good}(1-a(p)p^{-s}+p^{k-1-2s})^{-1}$$

と定義されるが、$1-a(p)p^{-s}+p^{k-1-2s}=(1-\alpha p^{-s})(1-\beta p^{-s})$ とするとき、symmetric cube zeta は

$$L(s,f,Sym(3))=\prod_{p:good}((1-\alpha^3p^{-s})(1-\alpha^2\beta p^{-s})(1-\alpha\beta^2p^{-s})(1-\beta^3p^{-s}))^{-1}$$

と定義される。Kim と Shahidi は、GL(4) の逆定理に関連して、$k=2$ の時には $L(s,f,Sym(3))$ はウェイト3のジーゲル保型形式の Spinor zeta に等しいだろうという予想を述べた。この予想を私は白馬の研究集会の折に Kim から聞いたのだがベクトル値への一般化、および離散群の関係について
(1) 1変数のウェイト k からは、2次のジーゲル保型形式でウェイトが $\det^{k+1} Sym(k-2)$ のものに行くのではないか?
(2) 1変数の時の離散群が $\Gamma_0(p)$ ならば、行き先はIwahori subgroup なのではないか (つまり local rep. はSteinberg rep. ではないか)、ただし、level 1 は level 1 に行くのではないか？
との質問を Kim にした。その後、彼らの理論から考えて、そのようだというメールでの解答を得た。

たとえばウェイト2ならば $\Gamma_0(11)$ を考える必要がある。このとき Ihara-Langlands 予想によれば、11 で Steinberg になるものの次元 (つまり level 11 での Iwahori subgroup での new form の次元) は1次元のはずである。よって非常に都合がよいように思われるが、このようなジーゲル保型形式を構成する実際的手段は難しいように見える (少なくとも私はどうすればいいのか知らない。) ところが、ウェイトに関する予想の拡張で、ウェイト2以外が扱えるようになるので、たとえば $k=12$ で $SL_2(\mathbb{Z})$ という選択肢ができる。これは有名な Ramanujan Delta 関数が取り扱えるということである。対応すべきジーゲル保型形式のウェイトは $\det^{13} Sym(10)$, つまり空間は

$S_{13,10}(Sp(2,\mathbb{Z}))$ である。$\dim S_{13,10}(Sp(2,\mathbb{Z}))=2$ であるが、基底はテータ関数で具体的に構成することができる。ここで固有関数分解をしてみると、そのうちの一方の Euler 2-factor と 3-factor が $L(,s,\Delta,Sym(3))$ の Euler factors と一致していることがわかり、上記の予想は実験的に支持されていることがわかる。[9]

References

[1] T. Arakawa, Vector Valued Siegel's Modular Forms of Degree Two and the Associated Andrianov L-functions. Manuscripta Math. 44(1983), 155-185.

[2] M. Eichler and D. Zagier, The Theory of Jacobi Forms, Birkhäuser, 1985, Boston-Basel-Stuttgart.

[3] S. Hayashida, Skew-holomorphic Jacobi forms of index 1 and Siegel modular forms of half integral weights, J. Number Theory 106(2004), 200-218.

[4] T. Ibukiyama, Construction of half integral weight Siegel modular forms of $Sp(n,\mathbb{R})$ from automorphic forms of the compact twist $Sp(2)$. J. reine u. angew. Math. 359 (1985), 188–220.

[5] T. Ibukiyama, On Jacobi forms and Siegel modular forms of half integral weights, *Comment. Math. Univ. St. Paul,* 41 (1992), no.2, 109-124.

[6] S. Hayashida and T. Ibukiyama, Siegel modular forms of half integral weight and a lifting conjecture、preprint.

[7] T. Ibukiyama, Vector valued Siegel modular forms of half integral weight, preprint.

[8] T. Ibukiyama, Conjecture on Shimura correspondence of Siegel modular forms of degree two, in preparation.

[9] T. Ibukiyama, Numerical example of a cubic zeta function coming from a Siegel modular form, in preparation.

[10] W. Kohnen, Modular forms of half-integral weight on $\Gamma_0(4)$, *Math. Ann.* 248 (1980), no.3, 249-266.

[11] N.-P. Skoruppa, Developments in the theory of Jacobi forms, Automorphic functions and their applications (Khabarovsk, 1988), 167-185, Acad. Sci. USSR, Inst. Appl. Math., Khabarovsk, 1990. See also MPI-preprint 89-40 (1989).

[12] G. Shimura, On modular forms of half integral weight, Ann. of Math. 97(1973),440-481.

[13] R. Tsushima, An explicit dimension formula for the spaces of generalized Siegel modular forms with respect to $Sp(2,\mathbb{Z})$, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 59(1983), no. 4, 139–142.

[14] R. Tsushima, Dimension Formula for the Spaces of Siegel Cusp Forms of Half Integral Weight and Degree Two, Comm. Math. Univ. St. Pauli Vol. 52 No. 1(2003), 69–115.

[15] R. Tsushima, Dimension Formula for the Spaces of Jacobi Forms of Degree Two, in preparation.

[16] V. G. Zhuravlev, Hecke rings for covering of a symplectic group, Math. Sbornik 121(163) (1983), 381–402.

[17] V. G. Zhuravlev, Euler expansions of theta transforms of Siegel modular forms of half-integral weight and their analytic properties, Math. Sbornik 123(165)(1984),174-194.

Tomoyoshi Ibukiyama
Department of Mathematics, Graduate School of Science
Osaka University
Machikaneyama 1-16, Toyonaka,
Osaka 560-0043 Japan