数理解析研究所講究録 1399 巻 2004 年 123-136

ψ 直和空間の smooth 性について

新潟大自然科学 三谷 健一 (Ken-ichi Mitani)
新潟大自然科学 大城覚 (Satoru Oshiro)
新潟大理 斎藤 吉助 (Kichi-Suke Saito)

1 序文

バナッハ空間の幾何学的構造の研究は, 1930 年代の Clarkson による一様凸性の導入が発端とされる. バナッハ空間 X が一様凸であるとは, 任意の ε $(0 < \varepsilon \leq 2)$ に対して $0 < \delta < 1$ が定まり, $\|x\| = \|y\| = 1$, $\|x-y\| \geq \varepsilon$ を満たす X の任意の元 x, y に対して,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1-\delta$$

が成り立つことである.Clarkson は L_p 空間が $(1 < p < \infty)$ のとき, 一様凸であることを示した. また, バナッハ空間の単位球の丸さ (Rotundity) 度合いを表す定数として, 次の von Neumann-Jordan 定数を導入した. X をバナッハ空間とする. このとき,

$$\frac{1}{C} \leq \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2(\|x\|^2 + \|y\|^2)} \leq C \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

をみたす C の最小値を X の von Neumann-Jordan 定数 $C_{\mathrm{NJ}}(X)$ と言い, ヒルベルト空間や L_p 空間など古典的なバナッハ空間に対して, 計算や評価がされている. また, このような幾何学的性質の多くはその空間のノルム（距離）に依存するので, 例え有限次元空間であってもノルムによって, 性質が大いに異なってくる. 例えば, 平面（2次元）において, 単位球を考えると通常, 円形になるが, ℓ_1, ℓ_∞ ノルムの場合, 球が真四角やダイヤのような形になるように, 同じ空間であっても, ノルムを変えてしまうと球の形状がかなり異なる. 他にも, 単位球が常に丸いという意味を持つ狭義凸性や, 単位球が真四角であるかどうかを表す一様 non-squareness, さらにその一様 non-squareness 度合いを表す James 定数など, 今までに多くの幾何学的概念が導入され, 単位球の形状が多くの研究者によって調べられている. 特に, L_p 空間などの古典的なバナッハ空間について今までにいろいろと調べられてきたが, しかし, 具体的な有限次元空間においては, あまり多く研究されていない.

最近, absolute ノルムをもつ $\mathbb{C}^n$ 上において, そのノルムの性質や幾何学的性質に関する結果が得られている. 斎藤-加藤-高橋 [10, 11] は,$\mathbb{C}^2$ 上の absolute norm における von Neumann-Jordan 定数を計算した. また,$\mathbb{C}^n$ 上の absolute norm をある凸関数で特徴づけ, 狭義凸性を調べている. また, それに関連して,ℓ_p 直和空間を一般化した空間として ψ 直和空間が導入され, 加藤-斎藤 [9], 加藤-斎藤-田村 [5] などによって, その空間での狭義凸性や一様凸性, 一様 non-squareness などについて特徴づけている.

本講演では ψ 直和空間において, smooth の幾何学的性質についての結果を述べることを目的とする. X をバナッハ空間とし, X^* を X の共役空間とする. また,$x \in X$, $x \neq 0$ とする. このとき $\alpha \in X^*$ が x の norming functional であるとは

$$\|\alpha\| = 1, \langle \alpha, x \rangle = \|x\|$$

を満たす時をいい, さらに, 任意の $x \in X$, $x \neq 0$ に対して, x の norming functional が一意に存在する時, X が smooth であるという. 三谷-斎藤-鈴木 [7] は, $\mathbb{C}^n$ 上の absolute norm における norming functional を凸関数を用いて与え, smooth 性を特徴付けた. 本論文では,ψ 直和空間 $(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n)_\psi$ の norming functional を, 凸関数やそれぞれのバナッハ空間 $X_1, X_2, \cdots X_n$ を用いて与え, smooth 性を特徴付ける. 特に, 2つの直和空間 $(X_1 \oplus X_2)_\psi$ を中心に結果を述べる. また, ψ 直和空間の uniform smooth 性を特徴付ける.

2 バナッハ空間の幾何学的性質

この章では準備として, 本研究に関係する幾つかのバナッハ空間の幾何学的性質について, 定義及び性質を述べる.(詳しくは [1, 6] を参照.)

Definition 2.1 X をバナッハ空間とする. このとき X が狭義凸であるとは, 任意の元 $x, y \in X$ に対して

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1$$

であるときをいう.

Example 2.2 (i) ℓ_p $(1 < p < \infty)$ は狭義凸だが, ℓ_1, ℓ_∞ は狭義凸でない.
(ii) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を狭義凸なバナッハ空間の列とする. このとき, $(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n)_p$ $1 < p < \infty$ は狭義凸.

Definition 2.3 X をバナッハ空間とする. X^* を X の共役空間とし, $x \in X$, $x \neq 0$ とするとき, $\alpha \in X^*$ が x の *norming functional* であるとは

$$\|\alpha\| = 1, \langle \alpha, x \rangle = \|x\|$$

を満たす時をいう.

ここで $D(X,x)$ を X における x の norming functional 全体とする.

Definition 2.4 バナッハ空間 X が *smooth* であるとは, 任意の $x \in X,\ x \neq 0$ に対して, x の *norming functional* が一意に存在する時をいう. 即ち $^{\#}D(X,x) = 1$ であるときをいう.

Example 2.5 (i) ℓ_p $(1 < p < \infty)$ は *smooth* だが, ℓ_1, ℓ_∞ は *smooth* でない.
(ii) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を *smooth* であるバナッハ空間の列とする. このとき, $(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n)_p$ $1 < p < \infty$ は *smooth* である.

X が smooth であることと, $\|\cdot\|$ が Gâteaux 微分可能であること, 即ち任意の $x, y \in X, x \neq 0$ に対して,

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$$

が存在することとは同値である. また,X^* が狭義凸ならば, X はsmooth であり, X^* が smooth ならば, X は狭義凸である.

Definition 2.6 バナッハ空間 X が一様凸であるとは, 任意の ε $(0 < \varepsilon \leq 2)$ に対して $0 < \delta < 1$ が定まり, $\|x\| = \|y\| = 1$, $\|x - y\| \geq \varepsilon$ を満たす X の任意の元 x, y に対して,

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta$$

が成り立つことである.

定義から, 一様凸ならば狭義凸であることが容易にわかる.

Definition 2.7 バナッハ空間 X が *uniformly smooth* であるとは
$\lim_{\tau \to 0} \rho_X(\tau)/\tau = 0$ であるときをいう. ここで,

$$\rho_X(\tau) = \sup\{(\|x - y\| + \|x + y\|)/2 - 1; x, y \in X, \|x\| = 1, \|y\| = \tau\}.$$

uniformly smooth ならばsmooth である. また X が一様凸 (resp. uniformly smooth) であることと X^* が uniformly smooth (resp. 一様凸) であることとは同値である.

3 $\mathbb{C}^n$ 上の absolute norm

$\mathbb{C}^n$ 上のノルム $\|\cdot\|$ が *absolute* であるとは

$$\|(|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|)\| = \|(x_1, x_2, \cdots, x_n)\| \quad \forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$$

が成立するときを言う. $\|\cdot\|$ が *normalized* とは

$$\|(1, 0, \cdots, 0)\| = \|(0, 1, 0, \cdots, 0)\| = \cdots = \|(0, \cdots, 0, 1)\| = 1.$$

をいう. 例えば ℓ_p-norms $\|\cdot\|_p$ は absolute normalized である:

$$\|(x_1, x_2, \cdots, x_n)\|_p = \begin{cases} (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p} & \text{if } 1 \le p < \infty, \\ \max(|x_1|, \cdots, |x_n|) & \text{if } p = \infty. \end{cases}$$

AN_n を $\mathbb{C}^n$ 上の absolute normalized norm 全体とする. $\mathbb{C}^2$ 上の absolute normalized norm について, Bonsall-Duncan([3]) の中で, 次のような記述が見られる. 任意の $\|\cdot\| \in AN_2$ に対して

$$\psi(t) = \|(1-t, t)\| \qquad (0 \le t \le 1).$$

とおく. このとき,ψ は $[0,1]$ 上の連続な凸関数で

$$\psi(0) = \psi(1) = 1, \qquad \max\{1-t, t\} \le \psi(t) \le 1$$

を満たす. そこで, このような関数の全体を Ψ_2 とおくことにする.

Theorem 3.1 ([10]) *AN_2 と Ψ_2 は上記の対応で, 1 対 1 に対応する. 即ち, 任意の $\psi \in \Psi_2$ に対して,*

$$\|(z, w)\|_\psi = \begin{cases} (|z| + |w|)\psi\left(\frac{|w|}{|z|+|w|}\right) & ((z, w) \ne (0, 0)) \\ 0 & ((z, w) = (0, 0)) \end{cases}$$

によって定義すると, $\|\cdot\|_\psi \in AN_2$ でかつ $\psi(t) = \|(1-t, t)\|_\psi$ $(0 \le t \le 1)$ を満たす.

例えば,ℓ_p ノルムに対応する凸関数は $\psi_p(t) = \{(1-t)^p + t^p\}^{1/p}$ で与えられる. また, ℓ_p ノルム以外に多くの absolute normalized なノルムが沢山あることが分かる.

斎藤-加藤-高橋 [11] において $\mathbb{C}^n$ 上の absolute norm を次のように特徴付けた.

$$\Delta_n = \{(s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}) : s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1} \le 1, \; s_i \ge 0 \; (\forall i)\}.$$

とおく. 任意の $\|\cdot\| \in AN_n$ に対して,

$$\psi(s) = \|(1 - s_1 - s_2 - \cdots - s_{n-1}, s_1, \cdots, s_{n-1})\| \qquad (\forall s = (s_1, \cdots, s_{n-1}) \in \Delta_n)$$

とすると, ψ は Δ_n 上で連続な凸関数であり, 次の条件を満たす.

$$\begin{array}{llll}
(A_0) & \psi(0, \cdots, 0) & = & \psi(1, 0, \cdots, 0) = \cdots = \psi(0, \cdots, 0, 1) = 1, \\
(A_1) & \psi(s_1, \cdots, s_{n-1}) & \geq & (s_1 + \cdots + s_{n-1})\psi(\frac{s_1}{s_1 + \cdots + s_{n-1}}, \cdots, \frac{s_{n-1}}{s_1 + \cdots + s_{n-1}}), \\
(A_2) & \psi(s_1, \cdots, s_{n-1}) & \geq & (1 - s_1)\psi(0, \frac{s_2}{1 - s_1}, \cdots, \frac{s_{n-1}}{1 - s_1}), \\
 & \cdots\cdots\cdots & & \\
(A_n) & \psi(s_1, \cdots, s_{n-1}) & \geq & (1 - s_{n-1})\psi(\frac{s_1}{1 - s_{n-1}}, \cdots, \frac{s_{n-2}}{1 - s_{n-1}}, 0).
\end{array}$$

Ψ_n を Δ_n 上の凸連続関数で $(A_0), (A_1), \cdots, (A_n)$ を満たすもの全体とする. ℓ_p-norm に対応する関数は次のものになる.

$$\psi_p(s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}) = \begin{cases} ((1 - \sum_{i=1}^{n-1} s_i)^p + s_1^p + \cdots + s_{n-1}^p)^{1/p} & \text{if } 1 \leq p < \infty, \\ \max(1 - \sum_{i=1}^{n-1} s_i, s_1, \cdots, s_{n-1}) & \text{if } p = \infty. \end{cases}$$

Theorem 3.2 ([11]) 任意の $\|\cdot\| \in AN_n$ に対して,

$$\psi(s) = \|(1 - s_1 - s_2 - \cdots - s_{n-1}, s_1, \cdots, s_{n-1})\| \qquad (\forall s = (s_1, \cdots, s_{n-1}) \in \Delta_n) \qquad (1)$$

と定義すると,$\psi \in \Psi_n$ である. 逆に, 任意の $\|\cdot\| \in AN_n$ に対して,

$$\|(x_1, \cdots, x_n)\|_\psi = \begin{cases} (|x_1| + \cdots + |x_n|)\psi\left(\frac{|x_2|}{|x_1|+\cdots+|x_n|}, \cdots, \frac{|x_n|}{|x_1|+\cdots+|x_n|}\right) & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{if } (x_1, \cdots, x_n) \neq (0, \cdots, 0), \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \textit{if } (x_1, \cdots, x_n) = (0, \cdots, 0). \end{cases}$$

によって定義すると, $\|\cdot\|_\psi \in AN_n$ であり, (1) を満たす. 従って, AN_n と Ψ_n は, 1 対 1 対応に対応する.

Theorem 3.3 ([11]) $\psi \in \Psi_n$ とする. このとき,$(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\psi)$ が狭義凸であることと, ψ が関数として Δ_n 上狭義凸であることは同値である.

4 $\mathbb{C}^n$ 上の absolute norm の smooth 性

三谷-斎藤-鈴木 [7] は $\mathbb{C}^n$ 上の absolute norm の smooth 性を対応する凸関数を使って特徴付けた．この章では, この結果を中心に述べる．まず, $\mathbb{C}^2$ 上の場合を考える．$\psi \in \Psi_2$ とする．各 $t \in (0,1]$ に対して, $\psi'_L(t)$ を t における ψ の left derivative, また各 $t \in [0,1)$ に対して, $\psi'_R(t)$ を t における ψ の right derivative とする．また G を

$$G(t) = \begin{cases} [-1, \psi'_R(0)], & \text{if } t = 0, \\ [\psi'_L(t), \psi'_R(t)], & \text{if } 0 < t < 1, \\ [\psi'_L(1), 1], & \text{if } t = 1 \end{cases}$$

とする．まず, $(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi)$ が smooth であるときの ψ の必要かつ十分条件を考える．任意の $t \in [0,1]$ に対して

$$x(t) = \frac{1}{\psi(t)}(1-t, t) \in \mathbb{C}^2$$

とおく．このとき,

Theorem 4.1 ([3]) $\psi \in \Psi_2$ とする．このとき各 $t \in [0,1]$ に対して

$$D\big(\mathbb{C}^2, x(t)\big) = \begin{cases} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ c(1+a) \end{pmatrix} : a \in G(0), |c| = 1 \right\}, & \textit{if } t = 0, \\ \left\{ \begin{pmatrix} \psi(t) - at \\ \psi(t) + a(1-t) \end{pmatrix} : a \in G(t) \right\}, & \textit{if } 0 < t < 1, \\ \left\{ \begin{pmatrix} c(1-a) \\ 1 \end{pmatrix} : a \in G(1), |c| = 1 \right\}, & \textit{if } t = 1 \end{cases}$$

である．

この定理より $x = (x_0, x_1) \in \mathbb{C}^2 (\|(x_0, x_1)\|_\psi = 1)$ の norming functional はつぎのように表される．

Theorem 4.2 $\psi \in \Psi_2$ とする．$(x_0, x_1) \in \mathbb{C}^2$ $\left(\big\|(x_0, x_1)\big\|_\psi = 1\right)$ に対して,

$$t = \frac{|x_1|}{|x_0| + |x_1|}$$

とする. また,ρ_k を $x_k = e^{i\rho_k}|x_k|, \rho_k \in [0, 2\pi)$ を満たすものとする. このとき,

$$D\big(\mathbb{C}^2, (x_0, x_1)\big) = \begin{cases} \left\{ \begin{pmatrix} e^{-i\rho_0} \\ c(1+a) \end{pmatrix} : a \in G(0), |c| = 1 \right\}, & \text{if } x_1 = 0, \\ \left\{ \begin{pmatrix} e^{-i\rho_0}\big(\psi(t) - at\big) \\ e^{-i\rho_1}\big(\psi(t) + a(1-t)\big) \end{pmatrix} : a \in G(t) \right\}, & \text{if } x_0 \cdot x_1 \neq 0, \\ \left\{ \begin{pmatrix} c(1-a) \\ e^{-i\rho_1} \end{pmatrix} : a \in G(1), |c| = 1 \right\}, & \text{if } x_0 = 0 \end{cases}$$

である.

上の定理の結果から $(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi)$ が smooth であるときの $\psi \in \Psi_2$ の必要十分条件が得られる.

Theorem 4.3 $\psi \in \Psi_2$ とする. このとき, $(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi)$ が *smooth* であるための ψ の必要かつ十分条件は, ψ が $(0,1)$ 上微分可能かつ, $\psi'_R(0) = -1, \psi'_L(1) = 1$ であることである.

Remark 4.4 $\psi \in \Psi_2$ に対して φ を

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - t, & \text{if } t < 0, \\ \psi(t), & \text{if } 0 \le t \le 1, \\ t, & \text{if } t > 1 \end{cases}$$

と $\mathbb{R}$ 上に拡張すると, 上の定理は次のように表される.

Theorem 4.5 $(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi)$ が *smooth* であるための必要かつ十分条件は,φ が $[0,1]$ 上微分可能であることである.

次に,$\mathbb{C}^n$ 上の場合を考える. $t = (t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}) \in \Delta_n$ (但し $t_0 = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} t_j$) に対して,

$$x(t) = \frac{(t_0, t_1, \cdots, t_{n-1})}{\psi(t)} \in \mathbb{C}^n$$

とおく. さらに, $p_0 = (0,0,0,\cdots,0)$, $p_j = (0,0,\cdots,0,\overset{(j)}{1},0,0,\cdots,0) \in \Delta_n$,$j = 1,2,\ldots,n-1, I_n = \{0,1,\cdots,n-1\}$ とする. また X を実バナッハ空間とし, C を X

の凸部分集合とする. f を C から $\mathbb{R}$ への連続な凸関数とする．このとき,$x \in C$ に対して

$$\partial f(x) = \{a \in X^* : f(y) \geq f(x) + \langle a, y - x \rangle,\ \forall y \in C\}.$$

で定義される $\partial f(x)$ を $x \in C$ における f の劣微分という. $\psi \in \Psi_n$ に対して,関数 φ を $\mathbb{R}^{n-1}$ 上に次のように定義する.

$$\varphi(t) = \sup \left\{ \psi(s) + \langle a, t - s \rangle : \begin{array}{l} s = (s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}) \in \Delta_n, \\ a \in \partial\psi(s), \\ \psi(s) + \langle a, p_j - s \rangle \geq 0, j \in I_n \end{array} \right\}$$

Remark 4.6 $\psi \in \Psi_2$ ならば

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - t, & \textit{if}\ t < 0, \\ \psi(t), & \textit{if}\ 0 \leq t \leq 1, \\ t, & \textit{if}\ t > 1, \end{cases}$$

また $\partial\varphi(t) = G(t),\ \forall t \in [0, 1]$ である.

Theorem 4.7 ([7]) $\psi \in \Psi_n$ とする. このとき, 任意の $t = (t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}) \in \Delta_n$ に対して,

$$\begin{aligned} &D(\mathbb{C}^n, x(t)) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta_0}(\psi(t) + \langle a, p_0 - t \rangle) \\ e^{i\theta_1}(\psi(t) + \langle a, p_1 - t \rangle) \\ e^{i\theta_2}(\psi(t) + \langle a, p_2 - t \rangle) \\ \vdots \\ e^{i\theta_{n-1}}(\psi(t) + \langle a, p_{n-1} - t \rangle) \end{pmatrix} : \begin{array}{l} a \in \partial\varphi(t), \\ \theta_j \in [0, 2\pi) \\ \quad \textit{for}\ j \in I_n\ \textit{with}\ t_j = 0, \\ \theta_j = 0 \\ \quad \textit{for}\ j \in I_n\ \textit{with}\ t_j > 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

従って,

Theorem 4.8 ([7]) $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\psi)$ が *smooth* であることと, φ が Δ_n 上微分可能であることは同値である.

5 バナッハ空間の ψ-直和

$\psi \in \Psi_n$ とおく. また X_1, X_2, $\cdots$, X_n をバナッハ空間とする. このとき $X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$ 上のノルムを

$$\|(x_1, x_2, \cdots, x_n)\|_\psi = \|(\|x_1\|, \|x_2\|, \cdots, \|x_n\|)\|_\psi \quad (x_1 \in X_1, \cdots, x_n \in X_n).$$

$$= \begin{cases} (\|x_1\| + \|x_2\| + \cdots + \|x_n\|)\psi\left(\frac{\|x_2\|}{\|x_1\|+\cdots+\|x_n\|}, \cdots, \frac{\|x_n\|}{\|x_1\|+\cdots+\|x_n\|}\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\text{if } (x_1, \cdots, x_n) \neq (0, \cdots, 0), \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{if } (x_1, \cdots, x_n) = (0, \cdots, 0). \end{cases}$$

とする. このバナッハ空間を $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の直和とよび $(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n)_\psi$ と表す.

Example 5.1 $1 \le p \le \infty$ とする. このとき $(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n)_{\psi_p} = (X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n)_p$.

Example 5.2 $1 \le q < p \le \infty$,$2^{1/p-1/q} < \lambda < 1$ とする. また,$\psi_{p,q,\lambda} = \max\{\psi_p, \lambda\psi_q\} \in \Psi$ とおく. このとき $X \oplus_{\psi_{p,q,\lambda}} Y$ のノルムは

$$\|(x,y)\|_{\psi_{p,q,\lambda}} = \max\{\|(x,y)\|_p, \lambda\|(x,y)\|_q\}$$

と与えられる.

Example 5.3 $1/2 \le \alpha \le 1$ とする.

$$\psi_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{\alpha-1}{\alpha}t + 1 & \text{if } 0 \le t \le \alpha, \\ t & \text{if } \alpha \le t \le 1. \end{cases}$$

このとき $\psi_\alpha \in \Psi_2$ であり, $X \oplus_{\psi_\alpha} Y$ のノルムは

$$\|(x,y)\|_{\psi_\alpha} = \max\{\|x\| + (2 - \frac{1}{\alpha})\|y\|, \|y\|\}.$$

と与えられる.

Theorem 5.4 ([5, 12]) (i) $(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n)_\psi$ が狭義凸であることと $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が狭義凸かつ ψ が Δ_n 上で関数として狭義凸であることは同値.

(ii)$(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n)_\psi$ が一様凸であることと $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が一様凸かつ ψ が Δ_n 上で関数として狭義凸であることは同値.

次に, $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\psi)$ の共役空間を考える. $\psi \in \Psi_n$ とする. $\|\cdot\|_\psi^*$ を $\|\cdot\|_\psi$ の dual norm, 即ち, $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$\left\|(x_1, x_2, \cdots, x_n)\right\|_\psi^* = \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^n x_j y_j \right| : \left\|(y_1, y_2, \cdots, y_n)\right\|_\psi = 1 \right\}.$$

とおく. この $\|\cdot\|_\psi^*$ に対応する凸関数を $\psi^* \in \Psi_n$ とすると

$$\begin{aligned} &\psi^*(s_1, \cdots, s_{n-1}) \\ = &\sup_{(t_1, \cdots, t_{n-1}) \in \Delta_n} \frac{(1 - t_1 - \cdots - t_{n-1})(1 - s_1 - \cdots - s_{n-1}) + t_1 s_1 + \cdots + t_{n-1} s_{n-1}}{\psi(t_1, \cdots, t_{n-1})}. \end{aligned}$$

Example 5.5 $\psi_p^* = \psi_q$ ここで $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Example 5.6 $1/2 \le \alpha \le 1$ とする. $\|\cdot\|_\alpha \in AN_2$ を

$$\|(x_1, x_2)\|_\alpha = \max\{\|(x_1, x_2)\|_\infty, \alpha\|(x_1, x_2)\|_1\}$$

とする. このとき対応する凸関数は $\psi_\alpha(s) = \max\{1-t, t, \alpha\}$ このとき,

$$\psi_\alpha^*(s) = \frac{1}{\alpha} \max\{(1 - 2\alpha)s + \alpha, (2\alpha - 1)s + 1 - \alpha\}.$$

Proposition 5.7 $\psi \in \Psi_n$ とする. このとき

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|_\psi \|y\|_{\psi^*}, \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n$$

さらに, $(\mathbb{C}^n \|\cdot\|_\psi)^*$ と $(\mathbb{C}^n \|\cdot\|_{\psi^*})$ は等距離同型である.

このことから, ψ 直和空間の共役空間について, 次が成り立つ.

Proposition 5.8 $\psi \in \Psi_n$ とする. このとき $(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n)_\psi$ と $(X_1^* \oplus X_2^* \oplus \cdots \oplus X_n^*)_{\psi^*}$ は等距離同型である.

6. $(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n)_\psi$ の smooth 性

初めに,$(X_1 \oplus X_2)_\psi$ の smooth 性を考える. まず,$(X_1 \oplus X_2)_\psi$ の norming functional を求める.

Theorem 6.1 $\psi \in \Psi_2$. とする. また $(x_1, x_2) \in (X_1 \oplus X_2)_\psi$, $||(x_1,x_2)||_\psi = 1$ とおく. このとき,

$$D\big((X_1 \oplus X_2)_\psi, (x_1,x_2)\big) = \tag{1}$$

$$= \left\{ (a_1 f_1, a_2 f_2) : \begin{array}{c} (a_1,a_2) \in D\big(\mathbb{C}^2, (||x_1||, ||x_2||)\big) \\ f_i \in S_{X_i^*} \ \textit{for } i \textit{ with } x_i = 0 \\ f_i \in D(X_i, x_i) \ \textit{for } i \textit{ with } x_i \neq 0 \end{array} \right\}.$$

証明 ($\subset$) を示す. まず, 上の式の右辺を B とする. $(f_1, f_2) \in D\big((X_1 \oplus X_2)_\psi, (x_1,x_2)\big)$ に対し,

$$||(f_1,f_2)||_{\psi^*} = \langle (f_1,f_2), (x_1,x_2)\rangle = ||(x_1,x_2)||_\psi = 1,$$

より,

$$\begin{aligned} 1 &= f_1(x_1) + f_2(x_2) \\ &\leq ||f_1|| ||x_1|| + ||f_2|| ||x_2|| \\ &= \big\langle (||f_1||, ||f_2||), (||x_1||, ||x_2||) \big\rangle \\ &\leq \big\|(||f_1||, ||f_2||)\big\|_{\psi^*} \big\|(||x_1||, ||x_2||)\big\|_\psi \\ &= \big\|(f_1,f_2)\big\|_{\psi^*} \big\|(x_1,x_2)\big\|_\psi = 1 \end{aligned}$$

である. よって

$$f_i(x_i) = ||f_i|| ||x_i|| \ (i = 1,2) \tag{2}$$

かつ

$$\big\langle (||f_1||, ||f_2||), (||x_1||, ||x_2||) \big\rangle = \big\|(||x_1||, ||x_2||)\big\|_\psi = 1. \tag{3}$$

ここで任意に $h_i \in D(X_i, x_i)$ for i with $x_i \neq 0$, $h_i \in S_{X_i^*}$ for i with $x_i = 0$ をとり, g_i を

$$g_i = \begin{cases} \frac{f_i}{||f_i||}, & \text{for } i \text{ with } f_i \neq 0 \\ h_i, & \text{for } i \text{ with } f_i = 0 \end{cases}$$

とおく. このとき

$$(f_1, f_2) = (||f_1|| g_1, ||f_2|| g_2)$$

が得られる. (3) より

$$(||f_1||, ||f_2||) \in D\big(\mathbb{C}^2, (||x_1||, ||x_2||)\big).$$

よって$(f_1, f_2) \in B$. 従って, $D\big((X_1 \oplus X_2)_\psi, (x_1, x_2)\big) \subset B$.

次に$(\supset)$を示す. $(a_1 f_1, a_2 f_2) \in B$を任意にとる. 但し$(a_1, a_2) \in D\big(\mathbb{C}^2, (\|x_1\|, \|x_2\|)\big)$, $f_i \in S_{X^*}$ for i with $x_i = 0$かつ$f_i \in D(X_i, x_i)$ for i with $x_i \neq 0$. このとき, $(a_1 f_1, a_2 f_2)$は(x_1, x_2)の norming functionalである. 実際,

$$\begin{aligned}\big\langle (a_1 f_1, a_2 f_2), (x_1, x_2) \big\rangle &= a_1 f_1(x_1) + a_2 f_2(x_2) \\ &= a_1 \|x_1\| + a_2 \|x_2\| \\ &= \big\langle (a_1, a_2), (\|x_1\|, \|x_2\|) \big\rangle \\ &= \big\| (\|x_1\|, \|x_2\|) \big\|_\psi = \|(x_1, x_2)\|_\psi = 1\end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned}\|(a_1 f_1, a_2 f_2)\|_{\psi^*} &= \|(a_1 \|f_1\|, a_2 \|f_2\|)\|_{\psi^*} \\ &= \|(a_1, a_2)\|_{\psi^*} = 1\end{aligned}$$

より$(a_1 f_1, a_2 f_2) \in D\big((X_1 \oplus X_2)_\psi, (x_1, x_2)\big)$. 従って, $D\big((X_1 \oplus X_2)_\psi, (x_1, x_2)\big) \supset B$.

Theorem 6.1から, 次が得られる.

Theorem 6.2 ([8]) $\psi \in \Psi_2$とする. このとき, $(X_1 \oplus X_2)_\psi$が*smooth*であることと, X_1, X_2が*smooth*かつ$(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_\psi)$が*smooth*であることは同値. 即ち, X_1, X_2が*smooth*でかつφが$[0,1]$上微分可能でであることと同値である.

一般に, $(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n)_\psi$の smooth 性を考える. $n = 2$の場合と同様に, 最初にこの空間の norming functionalを与える.

Theorem 6.3 ([8]) $\psi \in \Psi_n$とする. また$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in (X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n)_\psi$ *with* $\|x\|_\psi = 1$とする. このとき,

$$D\big((X_1 \oplus \cdots \oplus X_n)_\psi, x\big) = \\ = \left\{ (a_1 f_1, \cdots, a_n f_n) : \begin{array}{l} (a_1, \cdots, a_n) \in D\big(\mathbb{C}^n, (\|x_1\|, \cdots, \|x_n\|)\big) \\ f_i \in S_{X_i^*} \ for\ i\ with\ x_i = 0 \\ f_i \in D(X_i, x_i)\ for\ i\ with\ x_i \neq 0. \end{array} \right\}.$$

Theorem 6.4 ([8]) $\psi \in \Psi_n$とする. このとき, $(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n)_\psi$が*smooth*であることと, 任意の$i$に対して$X_i$が*smooth*かつ$\varphi$が$\Delta_n$上微分可能であることと同値である.

最後に, ψ-直和の uniform smooth 性についての結果を述べる. 一般のバナッハ空間に対して次が成り立つ.

Proposition 6.5 X をバナッハ空間とする. また,X^* を X の共役空間とする. このとき, X が一様凸 *(resp. uniformly smooth)* であることと X^* が *uniformly smooth (resp.* 一様凸*)* であることは同値である.

また, ψ-直和の一様凸性については次のように特徴付けられている.

Theorem 6.6 ([5, 12]) $(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n)_\psi$ が一様凸であることと, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が一様凸かつ ψ が Δ_n 上で関数として狭義凸であることは同値.

従って, 次が成り立つ.

Theorem 6.7 ([8]) $\psi \in \Psi_n$ とする. このとき, $(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n)_\psi$ が *uniformly smooth* であることと φ が Δ_n 上微分可能かつ任意の $i(1 \leq ln)$ に対して X_i が *uniformly smooth* であることとは同値である.

参考文献

[1] B. Beauzamy, Introduction to Banach Spaces and Their Geometry, 2nd ed., North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1985.

[2] R. Bhatia, Matrix analysis, Springer, 1997.

[3] F. F. Bonsall and J. Duncan, Numerical Ranges II, London Math. Soc. Lecture Note Series, Vol.10, 1973.

[4] R.T. Rockafellar, Convex analysis, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[5] M. Kato, K. -S. Saito, T. Tamura, *On ψ-direct sums of Banach spaces and convexity*, J. Austral. Math. Soc., 75(2003), 413-422.

[6] R. E. Megginson, An Introduction to Banach Space Theory, Grad. Texts in Math. 183, Springer, New York, 1998.

[7] K. Mitani, K. -S. Saito, T. Suzuki, *Smoothness of absolute norms on $\mathbb{C}^n$.*, J. Convex. Anal., 10, (2003), 89-107.

[8] K. Mitani, S. Oshiro and K.-S. Saito, Smoothness of ψ-direct sums of Banach spaces, to appear in Math. Inequal. Appl.

[9] K.-S. Saito, M. Kato, *Uniform convexity of ψ-direct sums of Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., 277, (2003), no.1, 1-11.

[10] K. -S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, *Von Neumann-Jordan constant of absolute normes on $\mathbb{C}^2$*, J. Math. Anal. Appl., 244(2000), 515-532.

[11] K.-S. Saito, M. Kato, Y. Takahashi, *Absolute norms on $\mathbb{C}^n$*, J. Math. Anal. Appl., 252(2000), 879–905.

[12] Y. Takahashi, M. Kato and K. -S. Saito, *Strict convexity of absolute normes on $\mathbb{C}^2$ and direct sums of Banach spaces*, J. Inequal. Appl., 7(2002), 179-186.