数理解析研究所講究録 1399 巻 2004 年 71-75

一般のＢＡＮＡＣＨ空間における
無限個の非拡大写像族の共通不動点への収束定理

九州工業大学・工学部　鈴木 智成 (Tomonari SUZUKI)

1. 序

非拡大写像族の共通不動点に関する定理の中で, 筆者が最も気に入っているのは, 次の２つである.

- １９７４年, Bruck により証明された可換な非拡大写像族の共通不動点の存在定理 [5].
- １９７９年, Ishikawa により証明された可換な有限個の非拡大写像族の共通不動点への収束定理 [11].

最近, 筆者は後者の定理を改良するような, 無限個の写像族の共通不動点への収束定理を得た [20]. この稿ではその定理に関連した事柄について述べる. Ishikawa の定理が発表されたのが２５年前であるから, 「２５年間解かれなかった問題が解けた！」と言える. もちろん, これは冗談であって, 筆者はそのように大袈裟に考えてはいない.

2. 準備

本稿で使われる概念について若干の説明をする. なお, 文献 [21] に詳しい説明があるので, 必要ならば参照されたい.

Banach 空間 E が狭義凸 (strictly convex) であるとは, $x, y \in E, \|x\| = \|y\| = 1, x \neq y$ ならば

$$\frac{\|x+y\|}{2} < 1$$

が成立することである. ノルムの凸性から, この不等式は「$\leq$」として「$=$」付きで常に成立するから, 狭義凸性というのはこの「$=$」が付かないという条件である. 具体的な空間の例を挙げると, $1 < p < \infty$ のとき, L^p は狭義凸であり, L^1, L^∞ は狭義凸ではない. 従って, 定理において狭義凸性を仮定することは, L^1, L^∞ を除くということになる.

T を Banach 空間 E の閉凸集合 C 上の写像とする. 写像 T が非拡大 (nonexpansive) であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

が成立することである. T を作用する前の２点間の距離に比べて, 作用した後の２点間の距離が—文字通り— 拡大していない写像のことである. T の不動点集合を $F(T)$ と書く. すなわち

$$F(T) = \{x \in C : Tx = x\}$$

である．非拡大写像は連続写像であるから, Schauder の不動点定理 [17] により C がコンパクトの場合は $F(T) \neq \varnothing$, すなわち T は不動点を持つ．また, 文献 [2, 3, 4, 9, 12] に, C がコンパクトでない場合の不動点の存在定理が証明されている．不動点の存在性は空間 E の幾何学的性質と密接な関係があり, 現在においても積極的に研究されている．

I を添え字集合とする．非拡大写像族 $\{T_j : j \in I\}$ が可換であるとは, すべての $i, j \in I$ にたいして,

$$T_i \circ T_j = T_j \circ T_i$$

が成立することである．$\{T_j : j \in I\}$ の共通不動点集合を $F(\mathcal{T})$ と書く．すなわち

$$F(\mathcal{T}) = \bigcap_{j \in I} F(T_j)$$

である．C がコンパクトの場合は $F(\mathcal{T}) \neq \varnothing$ であることが知られている DeMarr [6]. この定理は後に様々な数学者により拡張されたが, 冒頭で述べた Bruck [5] の定理により一応の決着を得た．

$\{\alpha_n\}$ を $[0,1]$ 区間の数列とするとき,

$$x_1 \in C, \qquad x_{n+1} = \alpha_n T x_n + (1 - \alpha_n) x_n$$

で定義される iteration は Krasnoselskii & Mann iteration と呼ばれる [13, 15]. 本稿では, この iteration の不動点への収束定理, および写像族用に改良された iteration の共通不動点への収束定理を主な話題とする．C のコンパクト性を仮定するが, もちろん, それ以外の設定でも研究されている．たとえば, Atsushiba & Takahashi [1], Edelstein & O'Brien [8], Reich [16] 等を参照のこと．

3. 狭義凸性を仮定する定理

この節では, 狭義凸性を仮定する収束定理について述べる．

１９６６年, Edelstein は以下の定理を証明した．狭義凸性の条件が有効に働いていることをみるために, 証明も記す．

定理 1 (Edelstein [7]). C を狭義凸 Banach 空間 E のコンパクト凸集合とし, T を C 上の非拡大写像とする．点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 \in C, x_{n+1} = \frac{1}{2} T x_n + \frac{1}{2} x_n$ で定義する．このとき $\{x_n\}$ は T の不動点に収束する．

証明. T の不動点 w を１つ固定する．T の非拡大性から, すべての自然数 n について

$$\|x_{n+1} - w\| \leq \|x_n - w\| \quad \text{および} \quad \|T x_{n+1} - x_{n+1}\| \leq \|T x_n - x_n\|$$

が成り立つ．すなわち, 数列 $\{\|x_n - w\|\}$ および $\{\|T x_n - x_n\|\}$ は非増加である．よって極限を持つ．それぞれの極限値を η, d と置く．C のコンパクト性から, $\{x_n\}$ は収束する部分列 $\{x_{f(n)}\}$ を持つ．ここで, f は自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ 上の狭義単調増加写像である．部分点列 $\{x_{f(n)}\}$ の収束先を $z_1 \in C$ とし, $z_2 \in C$ を $z_2 = \frac{1}{2} T z_1 + \frac{1}{2} z_1$ と置く．ここで $\{x_{f(n)+1}\}$ が z_2 に収束していることに注意しよう．すなわち, z_1 も z_2 もともに $\{x_n\}$ の収積点である．よって,

$$\|T z_1 - z_1\| = \|T z_2 - z_2\| = d \quad \text{および} \quad \|z_1 - w\| = \|z_2 - w\| = \eta$$

が成り立つ．最後の等式より，$\|Tz_1 - w\| = \eta$ が分かる．さて，$d > 0$ を仮定して矛盾を導こう．この仮定により，$Tz_1 \neq z_1$ が言える．したがって狭義凸性から，$\|z_2 - w\| < \|z_1 - w\|$ が言え，矛盾を得る．$d = 0$ から $z_1 \in F(T)$ であることと $\{x_n\}$ が z_1 へ収束していることが分かる． □

Linhart は定理 1 を無限個の写像族へと拡張した．

定理 2 (Linhart [14]). C を狭義凸 Banach 空間 E のコンパクト凸集合とし，$\{T_j : j \in \mathbb{N}\}$ を C 上の可換な非拡大写像族とする．$\{\alpha_j : j \in \mathbb{N}\}$ を $(0,1)$ 区間の数列とし，$S_j x = \alpha_j T_j x + (1-\alpha_j)x$ と置く．f を $\mathbb{N}$ 上の写像で，$\sharp(f^{-1}(j)) = \infty$ がすべての $j \in \mathbb{N}$ で成り立つものとする．ここで，「$\sharp$」は集合の濃度を表す記号とする．点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 \in C$ および

$$x_{n+1} = S_{f(n)} \circ S_{f(n-1)} \circ \cdots \circ S_{f(1)} x_1$$

で定義する．このとき，$\{x_n\}$ は $\{T_j : j \in \mathbb{N}\}$ の共通不動点へ収束する．

最近，筆者は別の iteration を用いることで，写像族の可換性を仮定しない設定で収束定理を証明している [19].

4. 狭義凸性を仮定しない定理

１９７６年，Edelstein が定理 1 を証明してから１０年後に，Ishikawa は狭義凸性の条件が必要でないことを示した．

定理 3 (Ishikawa [10]). C を Banach 空間 E のコンパクト凸集合とし，T を C 上の非拡大写像とする．点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 \in C$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}Tx_n + \frac{1}{2}x_n$ で定義する．このとき $\{x_n\}$ は T の不動点に収束する．

詳しい証明は述べないが，定理 1 の証明において，$d > 0$ から矛盾を導くのは簡単ではない．

1 個の写像の収束定理の証明ですら簡単とは言えないのであるから，これが有限個の写像族になればさらに難しくなる．Ishikawa は以下の定理を証明した [11]. これは冒頭で述べた 2 番目の定理である．また，[18] も参照のこと．

定理 4 (Ishikawa [11]). C を Banach 空間 E のコンパクト凸集合とし，$\{T_1, T_2, \cdots, T_k\}$ を C 上の可換な非拡大写像族とする．$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k\}$ を $(0,1)$ 区間の有限数列とし，$S_j x = \alpha_j T_j x + (1-\alpha_j)x$ と置く．点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 \in C$ および

$$x_{n+1} = [\prod_{n_{k-1}=1}^{n} [S_k \prod_{n_{k-2}-1}^{n_{k-1}} [S_{k-1} \cdots [S_3 \prod_{n_1=1}^{n_2} [S_2 \prod_{n_0=1}^{n_1} S_1]] \cdots]]]x_1$$

で定義する．このとき，$\{x_n\}$ は $\{T_j : j = 1, 2, \cdots, k\}$ の共通不動点へ収束する．

やや複雑な命題であるので，$k = 4$ の場合の iteration を記述する．

$$\begin{aligned}
x_2 &= S_4 S_3 S_2 S_1 x_1 \\
x_3 &= S_4 S_3 S_2 S_1 S_1 S_2 S_1 S_3 S_2 S_1 x_2 \\
x_4 &= S_4 S_3 S_2 S_1 S_1 S_1 S_2 S_1 S_1 S_2 S_1 S_3 S_2 S_1 S_1 S_2 S_1 S_3 S_2 S_1 x_3
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_5 =& S_4S_3S_2S_1S_1S_1S_1S_2S_1S_1S_1S_2S_1S_1S_2S_1S_3S_2S_1S_1\\
& S_1S_2S_1S_1S_2S_1S_3S_2S_1S_1S_2S_1S_3S_2S_1x_4\\
x_6 =& S_4S_3S_2S_1S_1S_1S_1S_1S_2S_1S_1S_1S_1S_2S_1S_1S_1S_2S_1S_1\\
& S_2S_1S_3S_2S_1S_1S_1S_1S_2S_1S_1S_1S_2S_1S_1S_2S_1S_3S_2S_1\\
& S_1S_1S_2S_1S_1S_2S_1S_3S_2S_1S_1S_2S_1S_3S_2S_1x_5\\
x_7 =& S_4S_3S_2S_1S_1S_1S_1S_1S_1S_2S_1S_1S_1S_1S_1S_2S_1S_1S_1S_1\\
& S_2S_1S_1S_1S_2S_1S_1S_2S_1S_3S_2S_1S_1S_1S_1S_1S_2S_1S_1S_1\\
& S_1S_2S_1S_1S_1S_2S_1S_1S_2S_1S_3S_2S_1S_1S_1S_1S_2S_1S_1S_1\\
& S_2S_1S_1S_2S_1S_3S_2S_1S_1S_1S_2S_1S_1S_2S_1S_3S_2S_1S_1S_2\\
& S_1S_3S_2S_1x_6.
\end{aligned}
$$

「$S_iS_j = S_jS_i$」が一般には成立しないことに注意しよう．ある数学者はこの定理に関して以下のような発言をしている：「Ishikawa のこの定理はあまり知られていない．非常に理解し難い定理であるというのが，たぶん，理由の１つに挙げられるだろう．私もかつてこの定理を visualize するのに苦労し，１度理解することができた」理解することですら難しいのであるから，これを無限個にすることはさらに難しいと予想される．この稿の序で「２５年間解かれなかった問題」と書いたが，正確には「２５年間捨て置かれた問題」と書くべきであろうか．定理 4 がなければ，この問題は既に解かれていたであろう，と筆者は推測している．

筆者も定理 4 を visualize しようと何度も試みたが，結局できなかった．しかし，その過程で偶然にも次の定理を得ることができた．

定理 5 (Suzuki [20])**.** C を Banach 空間 E のコンパクト凸集合とし，$\{T_j : j \in \mathbb{N}\}$ を C 上の可換な非拡大写像族とする．λ を $\lambda \in (0,1)$ なる実数とし，$[0,1]$ 区間の数列 $\{\alpha_n\}$ は

$$\liminf_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \limsup_{n\to\infty} \alpha_n > 0 \quad \text{および} \quad \lim_{n\to\infty} (\alpha_n - \alpha_{n+1}) = 0$$

を満たしているとする．点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 \in C$ および

$$x_{n+1} = \lambda \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_n^j \right) T_1 x_n + \lambda \left(\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_n^j T_{j+1} x_n \right) + (1-\lambda) x_n$$

で定義する．このとき，$\{x_n\}$ は $\{T_j : j \in \mathbb{N}\}$ の共通不動点へ収束する．

この定理の証明にあたり，以下の補助定理を用いている．この—有用ではないかと思われる— 補助定理を記述して，この稿を終えたい．

補助定理 1 (Suzuki [20])**.** Banach 空間 E における有界点列 $\{z_n\}$ および $\{w_n\}$ は $z_{n+1} = \alpha_n w_n + (1-\alpha_n) z_n$ および

$$\limsup_{n\to\infty} \Big(\|w_{n+1} - w_n\| - \|z_{n+1} - z_n\| \Big) \le 0$$

を満たしているとする．ここで $\{\alpha_n\}$ は $0 < \liminf_n \alpha_n \le \limsup_n \alpha_n < 1$ を満たす区間 $[0,1]$ の実数列とする．このとき $\lim_n \|w_n - z_n\| = 0$ が成立する．

参考文献

[1] S. Atsushiba and W. Takahashi, *"Approximating common fixed points of two nonexpansive mappings in Banach spaces"*, Bull. Austral. Math. Soc., **57** (1998), 117–127.

[2] J. B. Baillon, *"Quelques aspects de la théorie des points fixes dans les espaces de Banach. I, II."* (in French), Séminaire d'Analyse Fonctionnelle (1978–1979), Exp. No. 7-8, 45 pp., École Polytech., Palaiseau, 1979.

[3] F. E. Browder, *"Fixed-point theorems for noncompact mappings in Hilbert space"*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **53** (1965), 1272–1276.

[4] F. E. Browder, *"Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space"*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **54** (1965), 1041–1044.

[5] R. E. Bruck, *"A common fixed point theorem for a commuting family of nonexpansive mappings"*, Pacific J. Math., **53** (1974), 59–71.

[6] R. DeMarr, *"Common fixed points for commuting contraction mappings"*, Pacific J. Math., **13** (1963), 1139–1141.

[7] M. Edelstein, *"A remark on a theorem of M. A. Krasnoselski"*, Amer. Math. Monthly, **73** (1966), 509–510.

[8] M. Edelstein and R. C. O'Brien, *"Nonexpansive mappings, asymptotic regularity and successive approximations"*, J. London Math. Soc., **17** (1978), 547–554.

[9] D. Göhde, *"Zum Prinzip def kontraktiven Abbildung"*, Math. Nachr., **30** (1965), 251–258.

[10] S. Ishikawa, *"Fixed points and iteration of a nonexpansive mapping in a Banach space"*, Proc. Amer. Math. Soc., **59** (1976), 65–71.

[11] S. Ishikawa, *"Common fixed points and iteration of commuting nonexpansive mappings"*, Pacific J. Math., **80** (1979), 493–501.

[12] W. A. Kirk, *"A fixed point theorem for mappings which do not increase distances"*, Amer. Math. Monthly, **72** (1965), 1004–1006.

[13] M. A. Krasnoselskii, *"Two remarks on the method of successive approximations"* (in Russian), Uspehi Mat. Nauk **10** (1955), 123–127.

[14] J. Linhart, *"Beiträge zur Fixpunkttheorie nichtexpandierender Operatoren"*, Monatsh. Math., **76** (1972), 239–249.

[15] W. R. Mann, *"Mean value methods in iteration"*, Proc. Amer. Math. Soc., **4** (1953), 506–510.

[16] S. Reich, *"Weak convergence theorems for nonexpansive mappings"*, J. Math. Anal. Appl., **67** (1979), 274–276.

[17] J. P. Schauder, *"Der Fixpunktsatz in Funktionalraumen"*, Studia Math., **2** (1930), 171–180.

[18] T. Suzuki, *"Strong convergence theorem to common fixed points of two nonexpansive mappings in general Banach spaces"*, J. Nonlinear Convex Anal., **3** (2002), 381–391.

[19] T. Suzuki, *"Convergence theorems to common fixed points for infinite families of nonexpansive mappings in strictly convex Banach spaces"*, Nihonkai Math. J., **14** (2003), 43–54.

[20] T. Suzuki, *"Strong convergence theorems for infinite families of nonexpansive mappings in general Banach spaces"*, to appear in Fixed Point Theory Appl.

[21] 高橋渉, "凸解析と不動点近似", 横浜図書 (2000).