数理解析研究所講究録 1399 巻 2004 年 93-111

Banach 空間上の集合の凸性について
(On Convexity of Subsets of Banach Spaces)

東京工業大学・情報理工学研究科　江下 和章 (Kazutaka Eshita)
高橋 渉 (Wataru Takahashi)
Department of Mathematical and Computing Sciences,
Tokyo Institute of Technology

1 序

本論文は，筆者の既発表論文 [9] の内容のうち，特に以下に述べる目的に関する部分を邦訳し，命題が簡潔になるように一部修正，例などを加筆したものである．

本論文の目的は,「一様凸 Banach 空間上の有界閉凸集合」と「狭義凸 Banach 空間上のコンパクト凸集合」という 2 つの概念の統合にある．本論文では，この 2 概念の統合形の一つとして，**uniform convex-like** という概念を導入した．本論文では，Banach 空間上の凸集合 C が uniform convex-like なとき，いわゆるタイプ (γ) 定理が成り立つことを示す．さらに C が凸近似性をみたすならば，C 上の nonexpansive 写像の ergodic retraction の存在定理がいえる．

以下，歴史的背景を述べる．E を Banach 空間，C を E 上の有界閉凸集合とし，T を C から C への nonexpansive 写像とする．1965 年，Browder[4] と Göhde[11] はそれぞれ，E が一様凸のとき，C 上の nonexpansive 写像は不動点をもつことを証明した．これとは別に，同年，Kirk[15] は E が回帰的で C が正規構造をもつとき T が不動点をもつことを証明した．他方，1975 年， Baillon[3] は以下の nonexpansive 写像に対する非線型エルゴード定理を証明した.「C を Hilbert 空間上の閉凸集合とし，T を C から C への nonexpansive 写像とする．もし T の不動点全体の集合 $F(T)$ が空でないなら，任意の $x \in C$ に対し，Cesàro mean

$$S_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k x$$

がある $z \in F(T)$ に弱収束する.」特にこのとき，$z = Px$ とおくと，P は C から $F(T)$ の上への nonexpansive retraction となり，$PT = TP = P$ および $Px \in \overline{\mathrm{co}}\{T^n x : n \geq 0\}$ をみたす．このような retraction を "ergodic retraction" とよぶ（高橋 [20] による）．以後，ergodic retraction は多くの数学者によって研究されている（たとえば，[13, 16, 17, 21]）．Bruck[5] は，E を Fréchet 微分可能な一様凸 Banach 空間 E とし，C を E 上の有界閉凸集合とし，T を C から C への nonexpansive 写像としたとき，T の Cesàro mean がある $z \in F(T)$ に弱収束することを証明した．その過程で，彼はタイプ (γ) の概念を導入し，興味深い結果を示した．後に，厚芝・高橋 [1] は，Bruck のアイデアを用い，E が狭義凸 Banach 空間で C が E 上のコンパクト凸集合のとき，nonexpansive 写像 T の Cesàro mean がある $z \in F(T)$ に強収束することを証明した．

本論文の構成を述べる．3 節では，**uniformly convex-like (ucl)** の概念を導入し，(ucl) 集合の例と (ucl) でない集合の例をあげる．4 節では，(ucl) 集合が弱コンパクトでかつ正規構造をもつこと

を示す．5節では，(ucl) 集合上でのタイプ (γ) 定理を証明する．6節および7節では，(ucl) 集合が凸近似性をみたすときの，nonexpansive 写像の ergodic retraction の存在定理を示す．

2 準備

E を実 Banach 空間（以後，Banach 空間はすべて実 Banach 空間とする）とし，そのノルムを $\|\ \|$ で表す．E の双対空間を E^* で表す．$\mathbb{N}$ を自然数全体，$\mathbb{R}$ を実数全体とする．E の部分集合 C に対し，

$$I(C) = \{\|x-y\| : x, y \in C\}$$

を定義する．$d(C)$ を C の直径，すなわち $d(C) = \sup I(C)$ とする．特に C が凸のとき，$I(C)$ は凸区間 $[0, d(C))$ あるいは $[0, d(C)]$ になる．M を Banach 空間 E の空でない部分集合とする．このとき，$\mathrm{co}_p M$（ただし p は自然数）を

$$\mathrm{co}_p M = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i : \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1,\ x_i \in M \right\}$$

と定義する．また，M の**凸包** $\mathrm{co}\, M$ を

$$\mathrm{co}\, M = \bigcup_{p=1}^{\infty} \mathrm{co}_p M$$

で定義し，その閉包を $\overline{\mathrm{co}}\, M$ で表す．Banach 空間 E が**狭義凸**であるとは，線形独立なベクトル $x, y \in E$ に対してつねに

$$\|x+y\| < \|x\| + \|y\|$$

となることである．これは，$x, y \in E$ が $\|x\| = \|y\| = \|(x+y)/2\|$ となるとき $x = y$ となることと同値である．Banach 空間 E の**凸性の modulus** $\delta : [0,2] \to [0,1]$ は

$$\delta(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| : \|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1,\ \|x-y\| \geq \varepsilon \right\}$$

で定義される．E が**一様凸**であるとは，すべての $\varepsilon \in (0,2]$ に対して $\delta(\varepsilon) > 0$ となることである．C を Banach 空間 E 上の空でない凸集合で，$d(C) > 0$ をみたすものとする．C **の凸性の modulus** $\delta_C : [0,2] \to [0,1]$ は以下で定義される．(石原・高橋 [14] による)

$$\delta_C(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \frac{1}{r} \left\| \frac{u+v}{2} - w \right\| : \begin{array}{l} r > 0,\ u, v, w \in C, \\ \|u-w\| \leq r,\ \|v-w\| \leq r,\ \|u-v\| \geq \varepsilon r \end{array} \right\}.$$

すべての $\varepsilon \in (0,2]$ に対して $\delta_C(\varepsilon) > 0$ が成り立つとき，C が**一様凸**であるという．等式 $\delta_C(\varepsilon) \geq \delta_E(\varepsilon) = \delta(\varepsilon)$ が $\varepsilon \in [0,2]$ に対して成り立つ．

3 Uniformly convex-like 集合

C を Banach 空間 E 上の空でない凸集合する．このとき，関数 $\eta_C : I(C) \to [0,\infty)$ を以下で定める：任意の $t \in I(C)$ に対し，

$$\eta_C(t) = \inf\left\{(\|x-z\| \vee \|y-z\|) - \left\|\frac{x+y}{2} - z\right\| : x,y,z \in C,\ \|x-y\| \geq t\right\}.$$

ただし，$\|x-z\| \vee \|y-z\| = \max\{\|x-z\|, \|y-z\|\}$ とする．Banach 空間上の空でない有界な凸集合 C が**uniformly convex-like**（以下，**(ucl)** と略す）とは，任意の $t \in I(C)\setminus\{0\}$ に対し $\eta_C(t) > 0$ となることである．

命題 3.1. C を Banach 空間上の有界な凸集合で，$d(C) > 0$ をみたすものとする．もし C が一様凸のとき，C は (ucl) である．特にこのとき，任意の $t \in I(C)$ に対し，不等式

$$\frac{t}{2}\cdot\delta_C\left(\frac{t}{d(C)}\right) \leq \eta_C(t)$$

をみたす．

証明. C を一様凸とする．$t \in I(C)\setminus\{0\}$ とし，$\|x-y\| \geq t$ なる $x,y,z \in C$ をかってにとる．$r = \|x-z\| \vee \|y-z\|$ とおく．このとき $t/2 \leq r \leq d(C)$ となることに注意する．いま，

$$\|x-z\| \leq r, \qquad \|y-z\| \leq r, \qquad \|x-y\| \geq t \geq \frac{t}{d(C)}\cdot r$$

が成り立つことから，

$$\begin{aligned}(\|x-z\| \vee \|y-z\|) - \left\|\frac{x+y}{2} - z\right\| &= r\cdot\left(1 - \frac{1}{r}\left\|\frac{x+y}{2} - z\right\|\right)\\ &\geq \frac{t}{2}\cdot\delta_C\left(\frac{t}{d(C)}\right)\end{aligned}$$

を得る．いま，$x,y,z \in C$ は $\|x-y\| \geq t$ をみたすところで任意であったので，

$$\eta_C(t) \geq \frac{t}{2}\delta_C\left(\frac{t}{d(C)}\right) > 0$$

を得る． □

命題 3.2. E を一様凸 Banach 空間とし，C をその空でない有界な凸集合とする．このとき C は (ucl) である．

証明. C が 1 点集合のときは C は (ucl) になるので，特に C は 2 点以上，すなわち $d(C) > 0$ としてよい．いま Banach 空間 E が一様凸なので，その凸部分集合 C も一様凸になる．よって前命題から C は (ucl) である． □

命題 3.3. E を狭義凸な Banach 空間とし，C をそのコンパクト凸集合とする．このとき C は (ucl) である．

証明. C が (ucl) でないと仮定する．これより，ある $t \in I(C) \setminus \{0\}$ に対し，$\eta_C(t) = 0$ となるとする．いま C がコンパクトなので，$\|u - v\| \geq t$ および

$$(\|u-w\| \vee \|v-w\|) - \left\| \frac{u+v}{2} - w \right\| = \eta_C(t) = 0$$

をみたす 3 点 $u, v, w \in C$ が存在する．すなわち

$$\|u-w\| = \|v-w\| = \left\| \frac{u+v}{2} - w \right\|$$

を得る．いま，Banach 空間 E が狭義凸であることより $u = v$ となるが，これは $\|u - v\| \geq t > 0$ に矛盾する．よって，C は (ucl) である． □

ここで，(ucl) であって一様凸でない凸集合の例をひとつあげる．X を有界閉区間 $[0,1]$ 上の実数値連続関数の全体とする．また，$f \in X$ に対して，

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(s)|^2 \, ds \right)^{1/2}$$
$$\|f\|_\infty = \max\{|f(s)| : s \in [0,1]\}$$
$$\|f\|_{2,\infty} = \|f\|_2 + \|f\|_\infty$$

とし，また

$$K = \left\{ f \in X : f(s) \in [0,1],\ |f(s) - f(t)| \leq |s - t|,\ \forall s, t \in [0,1] \right\}$$

とする．さらに

$$E_2 = (X, \|\ \|_2)$$
$$E_\infty = (X, \|\ \|_\infty)\ (= C[0,1])$$
$$E_{2,\infty} = (X, \|\ \|_{2,\infty})$$

とする．Arzelà-Ascoli の定理より，K は $E_\infty (= C[0,1])$ 上でコンパクトである．

命題 3.4. (1) $E_{2,\infty}$ は狭義凸 Banach 空間である．(2) K は $E_{2,\infty}$ 上のコンパクト凸集合である．(3) K は $E_{2,\infty}$ 上で一様凸ではない．

証明. (1) $E_{2,\infty}$ はノルム空間であり，さらに

$$\|f\|_\infty \leq \|f\|_{2,\infty} = \|f\|_2 + \|f\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty \quad (f \in X)$$

から，$E_{2,\infty}$ は Banach 空間 $E_\infty (= C[0,1])$ と同値である．よって $E_{2,\infty}$ も Banach 空間である．ところで，E_2 が Hilbert 空間 $L_2[0,1]$ の部分空間であることに注意すると，$f, g \in X$ が線形独立のとき

$$\begin{aligned} \|f+g\|_{2,\infty} &= \|f+g\|_2 + \|f+g\|_\infty \\ &< \|f\|_2 + \|g\|_2 + \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \\ &= \|f\|_{2,\infty} + \|g\|_{2,\infty} \end{aligned}$$

となる．よって $E_{2,\infty}$ は狭義凸 Banach 空間である．(2) K が凸集合であることは明らかである．K が $E_{2,\infty}$ 上でコンパクトであることを示す．$\{f_n\}$ を K 上のかってな点列とする．いま K は $E_\infty(=C[0,1])$ 上でコンパクトなので，$\{f_n\}$ のある部分列 $\{f_{n_i}\}$ が存在して $\|f_{n_i}-f\|_\infty \to 0$ となる．このとき $\|f_{n_i}-f\|_{2,\infty} \leq 2\|f_{n_i}-f\|_\infty \to 0$. となるので，$K$ が $E_{2,\infty}$ 上でコンパクトとなることがわかる．(3) K が $E_{2,\infty}$ 上で一様凸でないことを示す．$f_n, g_n \in K$ $(n \geq 2)$ を

$$f_n(t) = \begin{cases} t & (t \in [0,1/n]) \\ 1/n & (t \in (1/n,1]) \end{cases},$$
$$g_n(t) = f_n(1-t) \quad (t \in [0,1])$$

と定義する．このとき

$$\|f_n\|_{2,\infty} \leq 2\|f_n\|_\infty = \frac{2}{n},$$
$$\|g_n\|_{2,\infty} = \|f_n\|_{2,\infty} \leq \frac{2}{n},$$
$$\|f_n - g_n\|_{2,\infty} \geq \|f_n - g_n\|_\infty = \frac{1}{n}$$

を得る．また

$$\left\|\frac{f_n+g_n}{2}\right\|_{2,\infty} \geq 2\left\|\frac{f_n+g_n}{2}\right\|_2 = \|f_n+g_n\|_2 = \frac{2}{n}\sqrt{1-\frac{5}{6n}}$$

である．実際

$$\begin{aligned}
\|f_n+g_n\|_2^2 &= \int_0^1 |f_n(t)+g_n(t)|^2\,dt \\
&= \int_0^{1/n}\left(\frac{1}{n}+t\right)^2 dt + \int_{1/n}^{1-1/n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 dt + \int_{1-1/n}^{1}\left(\frac{1}{n}+1-t\right)^2 dt \\
&= 2\int_0^{1/n}\left(\frac{1}{n}+t\right)^2 dt + \left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{4}{n^2} \\
&= \frac{2}{3}\left(\left(\frac{2}{n}\right)^3 - \left(\frac{1}{n}\right)^3\right) + \left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{4}{n^2} \\
&= \frac{4}{n^2}\left(1-\frac{5}{6n}\right)
\end{aligned}$$

である．これより

$$\delta_K(1/2) \leq 1 - \frac{1}{2/n}\left\|\frac{f_n+g_n}{2} - 0\right\|_{2,\infty} \leq 1 - \sqrt{1-\frac{5}{6n}}$$

がすべての $n \geq 2$ で成り立つ．$n \to \infty$ とすれば，$\delta_K(1/2) \leq 1-1=0$ を得る．これは K が $E_{2,\infty}$ 上で一様凸でないことを意味する． □

命題 3.3 より，K はノルム $\|\ \|_{2,\infty}$ の意味で (ucl) である．よって，これは (ucl) であって一様凸でない集合の例となっている．

4 (ucl) 集合の正規構造性と弱コンパクト性

一様凸 Banach 空間は回帰的であり，その閉凸集合が正規構造をもつことは良く知られている．また，[14] によれば，C を Banach 空間 E の一様な閉凸集合とすると，それは弱コンパクトでかつ正規構造をもつ．本節では，Banach 空間上の有界閉凸集合が (ucl) であるとき，それが正規構造をもち，かつ弱位相でコンパクトになることを示す．これを示すことで，(ucl) 集合上で定義された nonexpansive 写像は不動点をもつことがわかる．

E を Banach 空間とし，D をその有界閉凸集合とする．このとき，$x \in D$ に対し

$$r(x, D) = \sup\{\|x - y\| : y \in D\}$$

とし，さらに

$$r(D) = \inf\{r(x, D) : x \in D\}$$

を定める．E の空でない閉凸集合 C が**正規構造** (normal structure) をもつとは，$d(D) > 0$ なるすべての C の有界閉凸部分集合 D に対し，$r(D) < d(D)$ となることである．

補題 4.1. C を Banach 空間 E 上の空でない有界閉凸集合で，(ucl) であるとする．いま，関数 $\nu_C : [0, \infty) \to [0, \infty)$ を

$$\nu_C(t) = \sup\{r(D) : D \text{ は } C \text{ の空でない閉凸部分集合で，} d(D) \le t\}$$

と定める．このとき、ν_C は以下の性質をみたす．

(1) $\nu_C(0) = 0$;

(2) $t > 0$ に対して $\nu_C(t) < t$;

(3) $t_1 \le t_2 \implies \nu_C(t_1) \le \nu_C(t_2)$;

(4) $0 < t_1 \le t_2 \implies \nu_C(t_1)/t_1 \ge \nu_C(t_2)/t_2$.

証明. (1) と (3) は明らか．(4) を示す．$0 < t_1 \le t_2$ を固定する．D_2 として，C の空でない閉凸部分集合で $d(D_2) \le t_2$ をみたすものをかってにとる．$z \in D_2$ をとり，$D_1 = (1 - (t_1/t_2))z + (t_1/t_2)D_2$ と定める．このとき，

$$d(D_1) = (t_1/t_2)d(D_2) \le t_1$$

および

$$\nu_C(t_1) \ge r(D_1) = (t_1/t_2)r(D_2)$$

が成り立つ．これより，不等式 $\nu_C(t_1) \ge (t_1/t_2)\nu_C(t_2)$ すなわち (4) を得る．(2) を示す．C が (ucl) であるとする．C が一点集合のときは明らかなので，$d(C) > 0$ を仮定してよい．また，$t > d(C)$ のときも明らかである．いま $t \in (0, d(C)]$ をかってにとり，$s = t/2$ とおく．まず，$\nu_C(t) \le \max\{s, t - \eta_C(s)\}$ なることを示す．D を C の空でない閉凸部分集合で，$d(D) \le t$ なるものとする．求める不等式を示すため

には，$r(D) \le \max\{s, t-\eta_C(s)\}$ をいえば十分である．すなわち，$r(D) > s$ のとき，$r(D) \le t-\eta_C(s)$ をいえばよい．$r(D) > s$ とする．このとき $d(D) \ge r(D) > s$ であるので，$\|x-y\| \ge s$ なる $x, y \in D$ を選ぶことができる．ここで，$w = (x+y)/2$ とおき，$z \in D$ をかってにとると，$\eta_C(s)$ の定義から

$$\|w-z\| \le (\|x-z\| \vee \|y-z\|) - \eta_C(s) \le d(D) - \eta_C(s) \le t - \eta_C(s)$$

となる．よって，

$$r(D) \le r(w, D) \le t - \eta_C(s)$$

となり，$\nu_C(t) \le \max\{s, t-\eta_C(s)\}$ なることがわかった．いま，C が (ucl) であることから，$\eta_C(s) > 0$ であるので，

$$\nu_C(t) \le \max\{s, t-\eta_C(s)\} < t$$

となる．これで証明を終了する． □

補題 4.2. C を Banach 空間 E 上の空でない有界閉凸集合とする．C が (ucl) のとき，以下をみたす関数 $b_C : [0, d(C)] \to [0, \infty)$ が存在する．

(1) $t_1 \le t_2 \implies b_C(t_1) \le b_C(t_2)$;

(2) $b_C(t_n) \to 0 \implies t_n \to 0$;

(3) 任意の C の空でない閉凸部分集合 D に対し，ある $x \in D$ が存在して，$r(x, D) \le d(D) - b_C(d(D))$ をみたす．

証明． 補題 4.1 の ν_C を用いて，関数 $b_C : [0, d(C)] \to [0, \infty)$ を以下で定める．任意の $t \in [0, d(C)]$ に対し

$$b_C(t) = \frac{t - \nu_C(t)}{2}.$$

まず(1) を示す．$t_1, t_2 \in [0, d(C)]$ として $t_1 \le t_2$ をみたすものをとる．一般性を失うことなく，$t_2 > 0$ としてよい．補題 4.1 より $\nu_C(t_1) \ge (t_1/t_2)\nu_C(t_2)$ が成り立つので，

$$\begin{aligned} b_C(t_1) &= \frac{1}{2}(t_1 - \nu_C(t_1)) \le \frac{1}{2}\left(t_1 - \frac{t_1}{t_2} \cdot \nu_C(t_2)\right) \\ &= \frac{t_1}{t_2} \cdot \frac{1}{2}(t_2 - \nu_C(t_2)) = \frac{t_1}{t_2} \cdot b_C(t_2) \\ &\le b_C(t_2) \end{aligned}$$

を得る．次に，(2) を示す．$b_C(t_n) \to 0$ および $t_n \not\to 0$ を仮定する．このとき，$\{t_n\}$ の部分列 $\{t_{n_j}\}$ と $\varepsilon > 0$ が存在し，$t_{n_j} \ge \varepsilon > 0$ とできる．いま，(1) および補題 4.1 より，

$$b_C(t_{n_j}) \ge b_C(\varepsilon) = \frac{\varepsilon - \nu_C(\varepsilon)}{2} > 0$$

を得る．これは $b_C(t_n) \to 0$ に矛盾し，背理法より (2) を得る．最後に (3) を示す．D を C の空でない閉凸部分集合とする．もし $d(D) = 0$ のとき，$D = \{x\}$ とかけるので，$r(x, D) = 0 = d(D) - b_C(d(D))$ となる．そこで，$d(D) > 0$ を仮定してよい．いま，$\nu_C(d(D)) < d(D)$ であることから，

$$r(D) \le \nu_C(d(D)) < \frac{\nu_C(d(D)) + d(D)}{2} = d(D) - b_C(d(D)).$$

を得る．よって，ある $x \in D$ が存在して，$r(x, D) < d(D) - b_C(d(D))$ となる．これで証明を終了する． □

定理 4.3 を示すために，次のŠmulian の定理を用いる.「C を Banach 空間 E 上の空でない閉凸集合とする．このとき，C が E 上で弱コンパクトであることと，任意の C の空でない閉凸部分集合からなる減少列が空でない共通集合をもつことは同値である.」(証明等はたとえば [8, pp. 430–434] を参照.)

定理 4.3. C を Banach 空間 E 上の空でない有界閉凸集合とする．もし C が (ucl) ならば，C は弱コンパクトでかつ正規構造をもつ．

証明. C が (ucl) であるとする．D を C の閉凸部分集合で $d(D) > 0$ なるものとすると，補題 4.1 より $r(D) \leq \nu_C(d(D)) < d(D)$ となるので，C は正規構造をもつ．以下では C が弱コンパクトになることを示す．$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ を C の空でない閉凸部分集合からなる列で $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots$ をみたすものとする．C が弱コンパクトであることを示すためには，Šmulian の定理から，$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$ となることをいえば十分である．いま，$m = 0, 1, 2, \ldots$ に対し，C の部分集合列 $\{C_n^{(m)}\}_{n=1}^{\infty}$ と C 上の点列 $\{x_n^{(m)}\}_{n=1}^{\infty}$ を以下で構成する．まず $\{C_n^{(0)}\}_{n=1}^{\infty}$ を $C_n^{(0)} = C_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ で与える．いま，$\{C_n^{(m)}\}_{n=1}^{\infty}$ が与えられている場合，補題 4.2 により，$\{x_n^{(m)}\}_{n=1}^{\infty}$ を $x_n^{(m)} \in C_n^{(m)}$ でかつ

$$r(x_n^{(m)}, C_n^{(m)}) \leq d(C_n^{(m)}) - b_C(d(C_n^{m})) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

をみたすようにとる．次に $\{C_n^{(m+1)}\}_{n=0}^{\infty}$ を $C_n^{(m+1)} = \overline{\mathrm{co}}\{x_k^{(m)} : k \geq n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ で与える．ただし，ここでいう b_C は補題 4.2 で得た関数である．ここで $C_n \supset C_n^{(m)} \supset C_n^{(m+1)}$ および $C_n^{(m)} \supset C_{n+1}^{(m)}$ となることに注意する．いま，定数 a を

$$a = \inf_{n,m} b_C(d(C_n^{(m)})) = \lim_{n,m \to \infty} b_C(d(C_n^{(m)}))$$

で定義する．このとき，$a = 0$ となる．実際，任意の m に対し，

$$\begin{aligned} d(C_1^{(m+1)}) &= d(\overline{\mathrm{co}}\{x_k^{(m)} : k \geq 1\}) = \sup_{i,j} \left\| x_i^{(m)} - x_j^{(m)} \right\| \\ &= \sup_i \sup_{j \geq i} \left\| x_i^{(m)} - x_j^{(m)} \right\| \leq \sup_i r(x_i^{(m)}, C_i^{(m)}) \\ &\leq \sup_i \left(d(C_i^{(m)}) - b_C(d(C_i^{(m)})) \right) \\ &\leq \sup_i d(C_i^{(m)}) - a \\ &= d(C_1^{(m)}) - a \end{aligned}$$

となり，よって

$$ma \leq \sum_{k=0}^{m-1} \left(d(C_1^{(k)}) - d(C_1^{(k+1)}) \right) \leq d(C_1^{(0)}) < \infty.$$

を得る．m が任意の自然数であることから，$a = 0$ を得る．いま，ある増加列 $\{n_k\}, \{m_k\}$ をとって $\lim_{k \to \infty} b_C(d(C_{n_k}^{(m_k)})) = 0$ とできるが，補題 4.2 の(2) により，$\lim_{k \to \infty} d(C_{n_k}^{(m_k)}) = 0$ となる．よっ

て，Cantor の定理から，

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_{n_k} \supset \bigcap_{k=0}^{\infty} C_{n_k}^{(m_k)} \neq \emptyset$$

となる．これで証明を終了する． □

上の結果から，Kirk の不動点定理より，次がいえる．

系 4.4. C を Banach 空間 E 上の空でない有界閉凸集合とし，C が (ucl) であるとする．また T を C から C への nonexpansive 写像とする．このとき，T は不動点をもつ．

5 タイプ (γ) 写像

本節では，C を Banach 空間 E の空でない有界閉凸集合とし，B を E 上の空でない凸集合とする．集合 Γ を

$$\Gamma = \{\gamma : [0,\infty) \to [0,\infty),\ 連続,\ 凸,\ 狭義単調増加,\ \gamma(0) = 0\}$$

と定義する．いま，$\gamma \in \Gamma$ としたとき，B から E への関数 T がタイプ (γ) であるとは，任意の $x, y \in B$ と $c \in [0,1]$ に対し，不等式

$$\gamma(\|cTx + (1-c)Ty - T(cx + (1-c)y)\|) \leq \|x - y\| - \|Tx - Ty\|$$

が成り立つことである．あきらかに，タイプ (γ) 関数は nonexpansive である．Bruck[5] は，Banach 空間 E が一様凸で B が有界閉凸集合のとき，ある $\gamma \in \Gamma$ が存在して，すべての B から E への nonexpansive 写像がタイプ (γ) であることを証明した．この結果は，nonexpansive 写像に対するエルゴード定理を証明するのに非常に有効なものである．本節では，Bruck の結果を (ucl) 集合にまで拡張することを試みる．

補題 5.1. 任意の $s, t \in I(C) \setminus \{0\}$ $(s \leq t)$ に対し，

$$\frac{\eta_C(s)}{s} \leq \frac{\eta_C(t)}{t} \leq \frac{1}{2}.$$

証明. まず $\eta_C(t) \leq t/2$ を示す．$t \in I(C)$ より，$\|x_0 - y_0\| = t$ なる $x_0, y_0 \in C$ をとることができる．このとき，$z_0 = (x_0 + y_0)/2$ とすると，

$$(\|x_0 - z_0\| \vee \|y_0 - z_0\|) - \left\|\frac{x_0 + y_0}{2} - z_0\right\| = \left\|\frac{x_0 - y_0}{2}\right\| = \frac{t}{2}$$

となり，$\eta_C(t) \leq t/2$ がいえた．あとは，$\eta_C(s) \leq (s/t)\eta_C(t)$ がいえればよい．いま，$\|x - y\| \geq t$ なる $x, y, z \in C$ をかってにとる．ここで $c = s/t$, $u = cx + (1-c)z$, $v = cy + (1-c)z$ とおく．このとき，$u, v \in C$ でかつ

$$\|u - v\| = c\|x - y\| \geq c \cdot t = s$$

であるので，不等式

$$\begin{aligned}\eta_C(s) &\leq (\|u - z\| \vee \|v - z\|) - \left\|\frac{u + v}{2} - z\right\| \\ &= c\left((\|x - z\| \vee \|y - z\|) - \left\|\frac{x + y}{2} - z\right\|\right)\end{aligned}$$

がいえる．いま，$x, y, z \in C$ が $\|x-y\| \geq t$ で任意であったので，$\eta_C(s) \leq c \cdot \eta_C(t)$ がいえる．これで証明を終了する． □

補題 5.2. $u, v, w \in C$, $R \geq 0$, $t \in I(C)$ が $\|u-w\| \leq R$, $\|v-w\| \leq R$, $\|u-v\| \geq t$ をみたすとき，かってな $c \in [0,1]$ に対し，

$$\begin{aligned}\|cu+(1-c)v-w\| &\leq R-2\min\{c, 1-c\}\eta_C(t)\\ &\leq R-2c(1-c)\eta_C(t)\end{aligned}$$

がいえる．

証明. 一般性を失うことなく，$c \leq 1/2$ としてよい．このとき，$\eta_C(t)$ の定義から，

$$\left\|\frac{u+v}{2}-w\right\| \leq R-\eta_C(t)$$

を得る．よって，

$$\begin{aligned}\|cu+(1-c)v-w\| &= \left\|2c\frac{u+v}{2}+(1-2c)v-w\right\|\\ &\leq 2c\left\|\frac{u+v}{2}-w\right\|+(1-2c)\|v-w\|\\ &\leq 2c(R-\eta_C(t))+(1-2c)R\\ &= R-2c\eta_C(t)\\ &= R-2\min\{c,1-c\}\eta_C(t)\\ &\leq R-2c(1-c)\eta_C(t)\end{aligned}$$

となり，結論を得る． □

定理 5.3. C を Banach 空間 E 上の空でない有界閉凸集合とし，さらに C を (ucl) であるとする．このとき，ある $\gamma \in \Gamma$ が存在して，かってな E 上の凸集合 B と，かってな B から C への nonexpansive 写像 T に対して，T はタイプ (γ) となる．

証明. かってな $s > 0$ に対し，$f(s)$ を

$$f(s) = \begin{cases}\eta_C(s)/s & (s \in I(C) \setminus \{0\})\\ 1/2 & (s \in (0,\infty) \setminus I(C))\end{cases}$$

で定める．補題 5.1 から，関数 $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ は単調非減少である．いま $\gamma : [0,\infty) \to [0,\infty)$ を

$$\gamma(t) = 2\int_0^t f(s)\,ds \quad (t \geq 0)$$

で定義する．$\gamma \in \Gamma$ である．B を E の凸集合とし，T を B から C への nonexpansive 写像とする．このとき，T がタイプ (γ) であることを示せばよい．$x, y \in B$, $c \in (0,1)$ をかってにとる．ここで，

$$t_0 = \|cTx+(1-c)Ty-T(cx+(1-c)y)\|$$

とおき，さらに $u,v,w\in C$ を

$$
\begin{aligned}
u &= cTx+(1-c)Ty,\\
v &= T(cx+(1-c)y),\\
w &= cT(cx+(1-c)y)+(1-c)Ty
\end{aligned}
$$

とおく．このとき，

$$
\begin{aligned}
\|u-w\| &= c\,\|Tx-T(cx+(1-c)y)\| \le c(1-c)\,\|x-y\|,\\
\|v-w\| &= (1-c)\,\|T(cx+(1-c)y)-Ty\| \le c(1-c)\,\|x-y\|,\\
\|u-v\| &= \|cTx+(1-c)Ty-T(cx+(1-c)y)\| = t_0,\\
\|(1-c)u+cv-w\| &= c(1-c)\,\|Tx-Ty\|
\end{aligned}
$$

を得る．補題 5.2 から，

$$c(1-c)\,\|Tx-Ty\| \le c(1-c)\,\|x-y\| - 2c(1-c)\eta_C(t_0)$$

すなわち

$$\|Tx-Ty\| \le \|x-y\| - 2\eta_C(t_0)$$

を得る．このことから，$t_0\neq 0$ のときは

$$\gamma(t_0) \le 2\cdot t_0 f(t_0) = 2\cdot t_0\cdot\frac{\eta_C(t_0)}{t_0} = 2\eta_C(t_0) \le \|x-y\| - \|Tx-Ty\|$$

となり，$t_0=0$ のときは

$$\gamma(t_0)=\gamma(0)=0\le \|x-y\|-\|Tx-Ty\|$$

となるので，T はタイプ (γ) である．これで証明を終了する． □

前定理から，Bruck の結果 [5, Lemma 1.1] を得ることができる．

系 5.4. E を一様凸な Banach 空間とし，B を E 上の空でない有界凸集合とする．このとき，ある $\gamma\in\Gamma$ が存在し，すべての B から E への nonexpansive 写像 T はタイプ (γ) になる．

証明. $C=\{y\in E: \|y\|\le d(B)\}$ とする．このとき，命題 3.2 より，C は (ucl) である．よって，定理 5.3 から，ある $\gamma\in\Gamma$ が存在し，すべての B から C への nonexpansive 写像はタイプ (γ) である．$x_0\in B$ をとる．いま，かってな B から E への nonexpansive 写像 T に対し，写像 $\tilde{T}$ を

$$\tilde{T}(x)=T(x)-T(x_0)\quad(x\in B)$$

で定める．このとき，$\tilde{T}$ は B から C への nonexpansive 写像となる．よって，$\tilde{T}$ はタイプ (γ) となるが，このことから T もタイプ (γ) になることはすぐわかる．これで証明を終了する． □

次の結果は Bruck[5, Remark] が証明を省略して与えられ，のちに厚芝・高橋 [1] によって厳密に証明されたものである．

系 5.5. E を狭義凸な Banach 空間とし，C を E 上のコンパクト凸集合とする．このとき，ある $\gamma \in \Gamma$ が存在して，すべての C から C への nonexpansive 写像 T がタイプ (γ) になる．

証明. 命題 3.3 より C は (ucl) である．よって，定理 5.3（$B = C$ とする）から，結論を得る． □

6 凸近似性と，Cesàro mean による不動点近似

C を Banach 空間 E 上の有界な凸集合とする．このとき，C が**凸近似性(convex approximation property)** をもつとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある自然数 p が存在し，かってな C の部分集合 M に対し

$$\mathrm{co}\, M \subset \mathrm{co}_p\, M + B_\varepsilon$$

が成り立つことである．ただし，B_ε を半径 ε の閉球，すなわち $B_\varepsilon = \{x \in E : \|x\| \leq \varepsilon\}$ とする．Bruck[6] によれば，一様凸な Banach 空間上の有界凸集合は凸近似性をもつ．また，厚芝・高橋 [1] は，Banach 空間上のコンパクト集合は凸近似性をもつことを示した．

本節では，C から C への nonexpansive 写像の全体を $\mathcal{N}(C)$ で表す．また，$\gamma \in \Gamma$ のとき，C から C へのタイプ (γ) 写像の全体を $\mathcal{N}_\gamma(C)$ で表す．定理 5.3 は，凸集合 C が (ucl) のとき，$\mathcal{N}(C) = \mathcal{N}_\gamma(C)$ なる $\gamma \in \Gamma$ が存在することを示している．

補題 6.1. C を Banach 空間 E 上の空でない有界閉凸集合とし，C が (ucl) でかつ凸近似性をもつとする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $\delta > 0$ が存在して，すべての $T \in \mathcal{N}(C)$ に対し

$$\overline{\mathrm{co}}\, F_\delta(T) \subset F_\varepsilon(T)$$

が成り立つ．ただし，$F_\varepsilon(T) = \{x \in C : \|x - Tx\| \leq \varepsilon\}$.

証明. 証明の大筋は [6] による．C が (ucl) であることから，定理 5.3 を用いると，$\mathcal{N}(C) = \mathcal{N}_\gamma(C)$ なる $\gamma \in \Gamma$ が存在する．いま，$[0, \infty)$ 上の全単射関数 $t \mapsto \gamma^{-1}(2t) + t$ の逆関数を σ で表すことにする．このとき，[5, Lemma 1.2] から

$$\mathrm{co}_2\, F_{\sigma(t)}(T) \subset F_t(T)$$

が任意の $t > 0$ と $T \in \mathcal{N}_\gamma(C) = \mathcal{N}(C)$ で成り立つ．このことから，帰納法を用いると，任意の自然数 n と $t > 0, T \in \mathcal{N}(C)$ に対して

$$\mathrm{co}_{2^n}\, F_{\sigma^n(t)}(T) = \mathrm{co}_2 \left(\mathrm{co}_{2^{n-1}}\, F_{\sigma^n(t)}(T)\right) \subset \mathrm{co}_2\, F_{\sigma(t)}(T) \subset F_t(T)$$

となることがわかる．$\varepsilon > 0$ をかってにとる．このとき，C が凸近似性をもつことから，ある自然数 p が存在して，任意の $M \subset C$ に対して

$$\mathrm{co}\, M \subset \mathrm{co}_p\, M + B_{\varepsilon/3}$$

が成り立つ．自然数 n を $2^n \geq p$ をみたすようにとり，$\delta = \sigma^n(\varepsilon/3)$ とおく．いま，任意の $T \in \mathcal{N}(C)$ に対して，

$$\mathrm{co}\, F_\delta(T) \subset \mathrm{co}_p\, F_\delta(T) + B_{\varepsilon/3} \subset \mathrm{co}_{2^n}\, F_\delta(T) + B_{\varepsilon/3} \subset F_{\varepsilon/3}(T) + B_{\varepsilon/3}$$

が成り立つ．次に $F_{\varepsilon/3}(T)+B_{\varepsilon/3}\subset F_\varepsilon(T)$ となることを示そう．いま $z\in \mathrm{co}\,F_{\varepsilon/3}(T)+B_{\varepsilon/3}$ とすると，ある $y\in F_{\varepsilon/3}(T)$ が存在して $\|z-y\|\le\varepsilon/3$ となる．したがって

$$\begin{aligned}\|z-Tz\| &= \|z-y\|+\|y-Ty\|+\|Ty-Tz\|\\ &\le 2\|z-y\|+\|y-Ty\|\\ &\le 2\cdot\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon\end{aligned}$$

より $z\in F_\varepsilon(T)$ となる．よって，$F_{\varepsilon/3}(T)+B_{\varepsilon/3}\subset F_\varepsilon(T)$ が示せた．これより

$$\mathrm{co}\,F_\delta(T)\subset F_{\varepsilon/3}(T)+B_{\varepsilon/3}\subset F_\varepsilon(T)$$

となるが，$F_\varepsilon(T)$ は閉集合なので，$\overline{\mathrm{co}}\,F_\delta(T)\subset F_\varepsilon(T)$ がいえる．これで証明を終了する． □

次の補題は Bruck[5, Lemma 1.5] によって証明された．

補題 6.2. C を Banach 空間 E 上の空でない有界閉凸集合とする．$\gamma\in\Gamma$ とし，$T\in\mathcal{N}_\gamma(C)$ とする．C 上の点列 $\{y_i\}$, $\{z_i\}$ と数列 $\{\delta_n\}$ $(\delta_n>0)$ が $(1/n)\sum_{i=0}^{n-1}\|y_{i+1}-Ty_i\|\le\delta_n$ および $(1/n)\sum_{i=0}^{n-1}\|z_{i+1}-Tz_i\|\le\delta_n$ をみたすとする．このとき，かってな $\lambda\in[0,1]$ に対し

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\|\lambda y_{i+1}+(1-\lambda)z_{i+1}-T(\lambda y_i+(1-\lambda)z_i)\|\le\gamma^{-1}(d(C)/n+2\delta_n)+\delta_n$$

が成り立つ．

定理 6.4 の証明で，次の補題を用いる．

補題 6.3. C を Banach 空間 E 上の空でない有界閉凸集合とし，さらに C が (ucl) であるとする．$\varepsilon>0$ とする．このとき，ある $p\in\mathbb{N}$, $\delta>0$, $N\in\mathbb{N}$ が存在し，$T\in\mathcal{N}(C)$ と C 上の点列 $\{x_i\}$ が $\|x_{i+1}-Tx_i\|\le\delta$ $(i=0,1,2,\dots)$ をみたすならば，すべての $n\ge N$ に対して

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left\|\overline{x_i^p}-T\overline{x_i^p}\right\|<\varepsilon$$

が成り立つ．ただし，$\overline{x_i^p}=(1/p)\sum_{j=0}^{p-1}x_{j+i}$ である．

証明. C が (ucl) であるので，$\mathcal{N}(C)=\mathcal{N}_\gamma(C)$ となる $\gamma\in\Gamma$ が存在する．ここで，$d(C)/p<\varepsilon/2$ をみたす $p\in\mathbb{N}$ を選ぶ．さらに $\beta(t)=\gamma^{-1}(2t)+t$ とし，$\beta^{p-1}(\delta)<\varepsilon/2$ となる $\delta>0$ を選ぶ．さらに $\beta_n(t)=\gamma^{-1}(d(C)/n+2t)+t$ とする．いま，γ^{-1} の連続性から $\lim_{n\to\infty}\beta_n(t)=\beta(t)$ が成り立つ．よって，ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して，任意の $n\ge N$ に対して $\beta_n^{p-1}(\delta)<\varepsilon/2$ が成り立つ．いま，$T\in\mathcal{N}(C)=\mathcal{N}_\gamma(C)$ と C 上の点列 $\{x_i\}$ が $\|x_{i+1}-Tx_i\|\le\delta$ $(i=0,1,2,\dots)$ をみたすとする．このとき，すべての i に対し

$$\left\|\overline{x_{i+1}^p}-\overline{x_i^p}\right\|=\frac{1}{p}\|x_{p+i}-x_i\|\le\frac{d(C)}{p}<\frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．また，すべての $n\in\mathbb{N}$ と $q\in\mathbb{N}$ $(1\le q\le p)$ に対し

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left\|\overline{x_{i+1}^q}-T\overline{x_i^q}\right\|\le\sigma_n^{q-1}(\delta)$$

が成り立つ．実際，$q=1$ のときは，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left\|\overline{x_{i+1}^1}-T\overline{x_i^1}\right\|=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\|x_{i+1}-Tx_i\|\leq\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta=\delta$$

となるのでよい．$2\leq q\leq p$ のときは，補題 6.2 を用いて，帰納的に以下の不等式で示すことができる．

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left\|\overline{x_{i+1}^q}-T\overline{x_i^q}\right\| &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left\|\left(1-\frac{1}{q}\right)\overline{x_{i+1}^{q-1}}+\frac{1}{q}x_{q+i}-T\left(\left(1-\frac{1}{q}\right)\overline{x_i^{q-1}}+\frac{1}{q}x_{q+i-1}\right)\right\| \\ &\leq \sigma_n\left(\max\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left\|\overline{x_{i+1}^{q-1}}-T\overline{x_i^{q-1}}\right\|,\ \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\|x_{q+i}-x_{q+i-1}\|\right\}\right) \\ &\leq \sigma_n(\max\{\sigma_n^{q-2}(\delta),\ \delta\}) \\ &= \sigma_n(\sigma_n^{q-2}(\delta))=\sigma_n^{q-1}(\delta).\end{aligned}$$

特に $q=p$ とし，また $n\geq N$ のときは，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left\|\overline{x_{i+1}^p}-T\overline{x_i^p}\right\|\leq\sigma_n^{p-1}(\delta)<\varepsilon/2$$

となる．よって，$n\geq N$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left\|\overline{x_i^p}-T\overline{x_i^p}\right\| &\leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\left\|\overline{x_{i+1}^p}-\overline{x_i^p}\right\|+\left\|\overline{x_{i+1}^p}-T\overline{x_i^p}\right\|\right) \\ &< \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon\end{aligned}$$

を得る．これで証明を終了する． □

定理 6.4. C を Banach 空間 E の空でない有界閉凸集合とし，C は (ucl) でかつ凸近似性をもつものとする．$\varepsilon>0$ とする．このとき，$p\in\mathbb{N}$, $\delta>0$, $N\in\mathbb{N}$ が存在して以下をみたす：C から C への nonexpansive 写像 T と C 上の点列 $\{x_i\}$ が $\|x_{i+1}-Tx_i\|\leq\delta$ $(i=0,1,2,\dots)$ をみたすならば，かってな $n\geq N$ に対して

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}x_i\in F_\varepsilon(T)$$

をみたす．

証明. 補題 6.1 から，ある $\eta>0$ が存在して

$$2\eta\cdot d(C)\leq\varepsilon/3 \text{ and } \overline{\mathrm{co}}\,F_\eta(T)\subset F_{\varepsilon/3}(T)$$

とできる．補題 6.3 から，$p\in\mathbb{N}$, $\delta>0$, $N\in\mathbb{N}$ が存在して，$T\in\mathcal{N}(C)$ と C 上の点列 $\{x_i\}$ が $\|x_{i+1}-Tx_i\|\leq\delta$ $(i=0,1,2,\dots)$ をみたすならば，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\|w_i-Tw_i\|<\eta^2\quad(n\geq N)$$

が成り立つ．ただし $w_i = \overline{x_i^p} = (1/p)\sum_{j=0}^{p-1} x_{j+i}$ とする．ここで，特に $p/N \leq \eta$ としても一般性を失わない（N を十分大きくとればよい.）いま，集合 $A(n)$ と $B(n)$ を

$$A(n) = \{i \in \mathbb{N} : 0 \leq i \leq n-1 \text{ and } \|w_i - Tw_i\| \geq \eta\}$$
$$B(n) = \{i \in \mathbb{N} : 0 \leq i \leq n-1 \text{ and } \|w_i - Tw_i\| < \eta\}$$

と定義する．$n \geq N$ を任意にとる．このとき，$\sum_{i=0}^{n-1} \|w_i - Tw_i\| \leq n\eta^2$ より $\sharp A(n) < n\eta$ となる．ただし $\sharp A(n)$ は集合 $A(n)$ の要素数である．系 4.4 より T は不動点をもつので，$z \in F(T)$ をひとつとる．このとき，

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} w_i &= \left(\frac{\sharp A(n)}{n} z + \frac{1}{n}\sum_{i\in B(n)} w_i\right) + \frac{1}{n}\sum_{i\in A(n)} (w_i - z)\\ &\in \overline{\mathrm{co}}\, F_\eta(T) + B_{\eta\cdot d(C)}.\end{aligned}$$

となる．ところで，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} w_i + \frac{1}{np}\sum_{i=0}^{p-1}(p-1-i)(x_i - x_{i+n})$$

と

$$\left\|\frac{1}{np}\sum_{i=0}^{p-1}(p-1-i)(x_i - x_{i+n})\right\| \leq \frac{1}{np}\cdot p^2 \cdot d(C) \leq \frac{p}{N}\cdot d(C) \leq \eta \cdot d(C)$$

が成り立つことから，

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} x_i &\in \overline{\mathrm{co}}\, F_\eta(T) + B_{\eta\cdot d(C)} + B_{\eta\cdot d(C)}\\ &= \overline{\mathrm{co}}\, F_\eta(T) + B_{2\eta\cdot d(C)}\\ &\subset F_{\varepsilon/3}(T) + B_{\varepsilon/3}\end{aligned}$$

を得る．あとは補題 6.1 の証明と同様の手法で $F_{\varepsilon/3}(T) + B_{\varepsilon/3} \subset F_\varepsilon(T)$ を得る．これで証明を終了する． □

定理 6.4 の直接の結果として，つぎを得る．

系 6.5. C を Banach 空間 E 上の空でない有界閉凸集合とし，C が (ucl) でかつ凸近似性をみたすとする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left\{ \left\| \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^i x - T\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^i x\right)\right\| : x \in C, T \in \mathcal{N}(C)\right\} = 0$$

が成り立つ．

7 ergodic retractionの存在定理

本節では，(ucl) でかつ凸近似性をもつ集合で定義された nonexpansive 写像が ergodic retraction をもつことを示す.

Banach 空間 l^∞ を

$$l^\infty = \{f = \{f(n)\}_{n=0}^\infty : f(n) \in \mathbb{R},\ \|f\| = \sup_n |f(n)| < \infty\}$$

とする. $\mu \in (l^\infty)^*$ が l^∞ 上の**mean**であるとは，$\|\mu\| = \mu(1) = 1$ をみたすことである. $f = \{f(n)\} \in l^\infty$ のとき，特に $f(n)$ を明示する必要がある場合，$\mu(f)$ のかわりに $\mu_n f(n)$ とかくことがある. μ が**Banach limit** とは，μ が l^∞ 上の mean でかつすべての $f \in l^\infty$ に対して $\mu_n f(n) = \mu_n f(n+1)$ が成り立つことである. Banach limit は存在する. $\{u_n\}$ を E 上の点列とし，μ を l^∞ の mean とする. このとき，もし $\overline{\mathrm{co}}\{u_n\}$ が弱コンパクトならば，唯一つの $u_\mu \in \overline{\mathrm{co}}\{u_n\}$ が存在し，

$$\langle u_\mu, x^* \rangle = \mu_n \langle u_n, x^* \rangle \quad (x^* \in E^*)$$

となる. 詳しくは [12, 22] を参照.

定理 7.1. C を Banach 空間 E の空でない有界閉凸集合とし，C が (ucl) でかつ凸近似性を持つものとする. T を C から C への nonexpansive 写像とする. このとき，ある C か $F(T)$ の上への nonexpansive retraction P が存在し，$PT = TP = P$ かつ $Px \in \overline{\mathrm{co}}\{T^n x : n \in \mathbb{N}\}$ $(x \in C)$ をみたす.

証明. C が (ucl) なので，定理 4.3 により，C は弱コンパクトである. μ を Banach limit とする. このとき，かってな $x \in C$ に対し，ある $Px = (\{T^n x\}_{n=0}^\infty)_\mu \in \overline{\mathrm{co}}\{T^n x : n \geq 0\}$ が存在し，すべての $x^* \in E^*$ に対し $\langle Px, x^* \rangle = \mu_n \langle T^n x, x^* \rangle$ となる. いま，すべての $x^* \in E^*$ に対し

$$\begin{aligned}\langle Px - Py, x^* \rangle &= \mu_n \langle T^n x - T^n y, x^* \rangle \\ &\leq \mu_n (\|T^n x - T^n y\| \|x^*\|) \\ &\leq \|x - y\| \|x^*\|\end{aligned}$$

がいえるので，P は nonexpansive である. また，

$$\begin{aligned}\langle Px, x^* \rangle &= \mu_n \langle T^n x, x^* \rangle \\ &= \mu_n \langle T^{n+1} x, x^* \rangle \\ &= \mu_n \langle T^n Tx, x^* \rangle \\ &= \langle PTx, x^* \rangle\end{aligned}$$

より，$P = PT$ がいえる. 任意の $z \in F(T)$ に対し，

$$\langle Pz, x^* \rangle = \mu_n \langle T^n z, x^* \rangle = \langle z, x^* \rangle$$

より $Pz = z$ がいえる. あとは，かってな $x \in C$ に対し $Px \in F(T)$ となることを示せばよい. $\varepsilon > 0$ を任意にとる. 補題 6.1 より，ある $\delta > 0$ が存在して，$\overline{\mathrm{co}}\, F_\delta(T) \subset F_\varepsilon(T)$ となる. また，系 6.5 より，

ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して，すべての $y \in C$ に対し $(1/n)\sum_{i=0}^{n-1} T^i y \in F_\delta(T)$ となる．いま，

$$\begin{aligned}\langle Px, x^* \rangle &= \mu_k \langle T^k x, x^* \rangle \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mu_k \langle T^{i+k} x, x^* \rangle \\ &= \mu_k \left\langle \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^i T^k x, x^* \right\rangle\end{aligned}$$

であることから，

$$\begin{aligned}Px &\in \overline{\mathrm{co}}\left\{ \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^i T^k x : k \geq 0 \right\} \\ &\subset \overline{\mathrm{co}}\, F_\delta(T) \subset F_\varepsilon(T)\end{aligned}$$

となる．$\varepsilon > 0$ は任意であったので，$Px \in F(T)$ を得る．これで証明を終了する． □

8 まとめ・未解決問題

C が「一様凸 Banach 空間の有界閉凸集合」であることと「狭義凸 Banach 空間のコンパクト凸集合」であることの共通点をまとめておく．

(1) C は (ucl) である．よって，C は弱コンパクトでかつ正規構造をもつ．これより，$T \in \mathcal{N}(C)$ は不動点をもつ．$\mathcal{N}(C) = \mathcal{N}_\gamma(C)$ なる $\gamma \in \Gamma$ が存在する．

(2) C は凸近似性をもつ．

(3) 上の 2 つから，$T \in \mathcal{N}(C)$ の ergodic retraction が存在する．

このことから，次のような問題が残されている．

- C が (ucl) のとき，C は凸近似性をみたすか？Bruck[6] によって，「Banach 空間 E 上の全ての有界凸集合が凸近似性をみたすことの必要十分条件は E が B-convex である」ことが示されているが，これと似たような命題が有界閉凸集合 C に対していえないか？
- C 上の nonexpansive 写像に対する非線型エルゴード定理を示すには，C が (ucl) かつ凸近似性をみたすことだけでは不十分だと予想される．非線型エルゴード定理を示すには，C に必要な他の条件は何か？

参考文献

[1] S. Atsushiba and W. Takahashi, *A nonlinear strong ergodic theorem for nonexpansive mappings with compact domains*, Math. Japon. **52** (2000), 183–195.

[2] J. S. Bae, *Reflexivity of a Banach space with a uniformly normal structure*, Proc. Amer. Math. Soc. **90** (1984), 269–270.

[3] J. B. Baillon, *Un théorème de type ergodique pour les contractions non linéaires dans un espace de Hilbert*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **280** (1975), 1511–1514.

[4] F. E. Browder, *Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **54** (1965), 1041–1044.

[5] R. E. Bruck, *A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces*, Israel J. Math. **32** (1979), 107–116.

[6] R. E. Bruck, *On the convex approximation property and the asymptotic behavior of nonlinear contractions in Banach spaces*, Israel J. Math. **38** (1981), 304–314.

[7] W. L. Bynum, *Normal structure coefficients for Banach spaces*, Pacific J. Math. **86** (1980), 427–436.

[8] N. Dunford and J. T. Schwartz, Linear Operators. I. General Theory, Interscience Publishers, Inc., New York, 1958.

[9] K. Eshita and W. Takahashi, *On the uniform convexity of subsets of Banach spaces*, to appear in Sci. Math. Jpn.

[10] K. Goebel and W. A. Kirk, Topics in metric fixed point theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[11] D. Göhde, *Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung*, Math. Nachr. **30** (1965), 251–258.

[12] N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *Nonexpansive retractions and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces*, Nonlinear Anal. **12** (1988), 1269–1281.

[13] N. Hirano and W. Takahashi, *Nonlinear ergodic theorems for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Banach space*, Pacific J. Math. **112** (1984), 333–346.

[14] H. Ishihara and W. Takahashi, *Modulus of convexity, characteristic of convexity and fixed point theorems*, Kodai Math. J. **10** (1987), 197–208.

[15] W. A. Kirk, *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*, Amer. Math. Monthly **72** (1965), 1004–1006.

[16] A. T. Lau, N. Shioji and W. Takahashi, *Existence of nonexpansive retractions for amenable semigroups of nonexpansive mappings and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces*, J. Funct. Anal. **161** (1999), 62–75.

[17] A. T. Lau and W. Takahashi, *Weak convergence and non-linear ergodic theorems for reversible semigroups of nonexpansive mappings*, Pacific J. Math. **126** (1987), 277–294.

[18] E. Maluta, *Uniformly normal structure and related coefficients*, Pacific J. Math. **111** (1984), 357–369.

[19] K. Nishiura, N. Shioji and W. Takahashi, *Nonlinear ergodic theorems for asymptotically nonexpansive semigroups in Banach spaces*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. **10** (2003), 563–578.

[20] W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), 253–256.

[21] W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for a reversible semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), 55–58.

[22] W. Takahashi, Nonlinear Functional Analysis, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[23] 高橋 渉, 凸解析と不動点近似, 横浜図書, 2000.

[24] W. Takahashi and N. Tsukiyama, *Approximating fixed points of nonexpansive mappings with compact domains*, Comm. Appl. Nonlinear Anal. **7** (2000), 39–47.