

Integrable Mappings via Rational Elliptic Surfaces

津田 照久 (TSUDA, Teruhisa)

東京大学大学院数理科学研究科

概要

可積分な 2 次元離散力学系の一般的な形式として, QRT 写像が知られている. 本稿では QRT 写像の幾何的記述を与えて, それが有理楕円曲面上の加法定理に等価であることを示す. また, 有理楕円曲面の Mordell-Weil 群の分類 (小木曾-塩田) を用いて QRT 写像が (任意の初期値に対して) 周期的になるための必要十分条件を決定する.

$K3$ 曲面, あるいは Calabi-Yau 多様体, のペンシルの双有理的な自己同型に付随する QRT 写像の自然な高次元拡張についても論ずる.

1 はじめに

可積分な 2 次元離散力学系の一般的な形式 (18-パラメーター族) として, QRT 写像

$$\varphi : (x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y}),$$

$$(1) \quad \bar{x} = \frac{f_1(y) - f_2(y)x}{f_2(y) - f_3(y)x}, \quad \bar{y} = \frac{g_1(\bar{x}) - g_2(\bar{x})y}{g_2(\bar{x}) - g_3(\bar{x})y}$$

が知られている ([4, 6] 参照). ここで $f_i(y), g_i(\bar{x})$ ($i = 1, 2, 3$) は

$$\mathbf{f} = A\mathbf{y} \times B\mathbf{y}, \quad \mathbf{g} = {}^tA\bar{\mathbf{x}} \times {}^tB\bar{\mathbf{x}}$$

なる 4 次多項式である. 但し $\mathbf{f} = {}^t(f_1, f_2, f_3), \mathbf{g} = {}^t(g_1, g_2, g_3), \mathbf{y} = {}^t(y^2, y, 1), \bar{\mathbf{x}} = {}^t(\bar{x}^2, \bar{x}, 1)$ であり, 3×3 行列 $A = (\alpha_{ij})_{0 \leq i, j \leq 2}, B = (\beta_{ij})_{0 \leq i, j \leq 2} \in \text{Mat}(3, \mathbb{C})$ はパラメータである. 写像 φ は不変曲線 $C_\lambda : {}^t\mathbf{x}(A + \lambda B)\mathbf{y} = 0$ を持つ (λ : 保存量). C_λ は楕円曲線ゆえ, 各初期値ごとに解は楕円関数を用いて表すことができる. この意味で QRT 写像は可積分である.

また, QRT 写像は以下のような良い性質を持つことが知られている: (i) 測度保存 (measure preserving) である. すなわち, 適当な関数 $m = m(x, y)$ が存在して $m(x, y)dx \wedge dy = m(\bar{x}, \bar{y})d\bar{x} \wedge d\bar{y}$ を満たす. (ii) 特異点閉じ込め (singularity confinement, パンルベ性の離散類似) を満たす. (iii) 実際, いくつかの離散パンルベ方程式は QRT 写像の非自励化として得られている.

本稿では QRT 写像の幾何的な根源を明らかにし, それが有理楕円曲面上の加法に等価であることを示す.

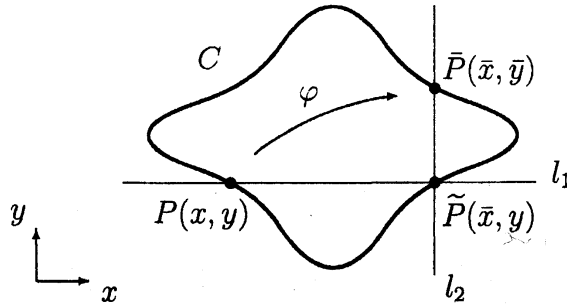


図 1: QRT 写像

2 QRT 写像の幾何的記述

非斉次座標を $(x, y) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ として, $(2, 2)$ -次曲線のペンシル

$$(2) \quad \{F(\alpha; x, y) + \lambda F(\beta; x, y) = 0\}_{\lambda \in \mathbb{P}^1}$$

を考える. 但し $F(\alpha; x, y) = \sum_{0 \leq i, j \leq 2} \alpha_{ij} x^{2-i} y^{2-j}$ などとおいた. 一般の点 $P = (x, y) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ を通るペンシルの元は一意に定まるので, それを C とおく. 点 P を通り x -軸に平行な直線 l_1 と $(2, 2)$ -次曲線 C は 2 点で交わる (ベズーの定理) ので, 点 P ではない方の交点を $\tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{y})$ とおく. 以下, 座標 $\tilde{x} = \tilde{x}(x, y)$ を求める. 曲線 C は 2 点 $P = (x, y)$, $\tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{y})$ を通るので

$$F(\alpha; x, y) + \lambda F(\beta; x, y) = 0,$$

$$F(\alpha; \tilde{x}, \tilde{y}) + \lambda F(\beta; \tilde{x}, \tilde{y}) = 0.$$

λ を消去すると $F(\alpha; \tilde{x}, \tilde{y})F(\beta; x, y) - F(\alpha; x, y)F(\beta; \tilde{x}, \tilde{y}) = 0$. すなわち

$$f_1(\tilde{x} - x) - f_2(\tilde{x}^2 - x^2) + f_3(\tilde{x}^2 x - \tilde{x} x^2) = 0.$$

これを \tilde{x} について解くと

$$\tilde{x} = \frac{f_1(y) - f_2(y)x}{f_2(y) - f_3(y)x}$$

を得る. 同様に, 点 \tilde{P} を通り y -軸と平行な直線 l_2 と C の (点 \tilde{P} 以外の) 交点を $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y})$ とすると

$$\bar{y} = \frac{g_1(\bar{x}) - g_2(\bar{x})y}{g_2(\bar{x}) - g_3(\bar{x})y}$$

を得る. よって, 上のように構成した点の対応 $P \mapsto \bar{P}$ が QRT 写像 (1) の正体であることが分かった (図 1 参照).

注 ペンシル (2) の 8 つの基点は

$$x = \frac{f_1(y)}{f_2(y)} = \frac{f_2(y)}{f_3(y)}, \quad \text{又は} \quad y = \frac{g_1(x)}{g_2(x)} = \frac{g_2(x)}{g_3(x)}$$

で与えられる。これらの点で、 φ は有理写像として不定である。

注 上の構成から明らかに、写像 φ は $(x, y) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ についての射影変換 $PGL(2) \times PGL(2)$ と可換である。このことに注意すると

$$18 - 3 \times 2 \quad - 3 \quad - 1 \quad = 8$$

(x,y)への PGL(2)×2作用 λへの PGL(2)作用 定数倍

が QRT 写像の持つ本質的なパラメータの数である。

以下、一般性を失わずに $\alpha_{00} = \alpha_{22} = \beta_{00} = \beta_{22} = 0$ とする。

定理 1 Weierstrass 方程式

$$f_\lambda(x, y) = y^2 + a_1xy + a_3y - x^3 - a_2x^2 - a_4x - a_6 = 0$$

で表される楕円曲線を E_λ とおく。但し $a_6 = 0$, および多項式 $a_i = a_i(\lambda)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) を

$$\begin{aligned} a_1 &= -\gamma_{11}, & a_2 &= -\gamma_{01}\gamma_{21} + 2\gamma_{02}\gamma_{20} - \gamma_{10}\gamma_{12}, \\ a_3 &= \gamma_{01}\gamma_{12}\gamma_{20} + \gamma_{02}\gamma_{10}\gamma_{21} - \gamma_{02}\gamma_{11}\gamma_{20}, \\ a_4 &= (\gamma_{02}\gamma_{20} - \gamma_{01}\gamma_{21})(\gamma_{02}\gamma_{20} - \gamma_{10}\gamma_{12}), \\ \gamma_{ij} &= \alpha_{ij} + \lambda\beta_{ij} \end{aligned}$$

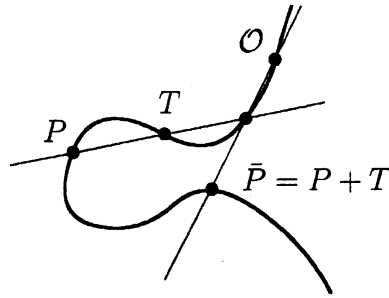
とした ($\deg a_i(\lambda) = i$)。このとき QRT 写像 (1) は E_λ 上の加法

$$\bar{P} = P + T, \quad T = (0, 0)$$

と等価である (図 2 参照)。

(証明の概略) ペンシル (2) の元である $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の (2, 2)-次曲線 $C = C_\lambda$ は、方程式 $F(\gamma; x, y) = \sum_{0 \leq i, j \leq 2} \gamma_{ij}x^{2-i}y^{2-j} = 0$ で表される。双有理変換 $\rho: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$, $(x, y) \mapsto [X, Y, Z] = [x, y, 1]$ を考える。但し射影平面 \mathbb{P}^2 の斉次座標を $[X, Y, Z]$ とした。像 $\rho(C_\lambda)$ は \mathbb{P}^2 の 2 点 $T' = [1, 0, 0] = \rho(\{x = \infty\})$, $O = [0, 1, 0] = \rho(\{y = \infty\})$ を通る 3 次曲線, すなわち一般には楕円曲線を定める。直線 $\rho(l_1), \rho(l_2)$ は $\rho(C_\lambda)$ とそれぞれ 3 点 P, \tilde{P}, T' , および \tilde{P}, \bar{P}, O で交わる。つまり $\rho(C_\lambda)$ 上の加法の意味で $\bar{P} + O = P + T'$ である。さらに双有理変換によって、点 O を変曲点 (加法の零元) とし、 T' を $T = [0, 0, 1]$ に移すように、 $\rho(C_\lambda)$ を Weierstrass 標準形 E_λ に変換することができて $\bar{P} = P + T$ を得る。

注 λ を動かして、曲面 $S = \{f_\lambda(x, y) = 0\} \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \ni ((x, y), \lambda)$ を考える。すると (射影 $p_2: \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ の S への制限) $\pi = p_2|_S: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ の一般ファイバー $\pi^{-1}(\lambda)$ は楕円曲線である。すなわち S は楕円曲面である。また $\lambda = \lambda(x, y)$ が有理関数ゆえ、 $\mathbb{C}(x, y, \lambda) = \mathbb{C}(x, y)$ 。よって S は有理曲面でもある。この意味で、関数体 $\mathbb{C}(\lambda)$ 上の楕円曲線 E_λ には有理楕円曲面の構造が入る。 E_λ は一般の有理楕円曲面の 8-パラメータ族を表現していることに注意しておく。

図 2: E_λ 上の加法

注 定理 1 で与えた幾何的記述を見ると, QRT 写像が楕円パルベ方程式 ([2, 7] 参照) の自動化であることは明らかである.

注 QRT 写像 φ が測度保存であることは容易に分かる. E_λ 上の正則 1-形式 $dx/(2y + a_1x + a_3)$ は $\varphi (= E_\lambda$ 上の加法) で保たれる. また $d\lambda = \frac{\partial\lambda}{\partial x}dx + \frac{\partial\lambda}{\partial y}dy$ も φ で不変. よって $\frac{1}{2y+a_1x+a_3} \frac{\partial\lambda}{\partial y} dx \wedge dy$ も φ で不変である. つまり φ は測度保存である.

3 有理楕円曲面のねじれ点と周期的 QRT 写像の分類

前節では, 可積分写像の一般的な形式である QRT 写像が, 幾何的には有理楕円曲面上の加法に等価であることを示した. ここでは, その応用として QRT 写像が (任意の初期値に対して) 周期的になる場合の分類を与える. 以下, E_λ の判別式 $\Delta(\lambda) \neq 0$ と仮定する. この一般的な条件は E_λ が有理楕円曲面を定めることを保証する.

一般に, 体 K 上定義された楕円曲線 E の K -有理点のなす (加法) 群を $E(K)$ と表して Mordell-Weil 群と呼ぶ. また E 上の点 T が

$$mT = \underbrace{T + T + \cdots + T}_m = O \quad \text{かつ} \quad m'T \neq O \quad (1 \leq \forall m' < m)$$

であるとき, 点 T は位数 m のねじれ点であるという.

有理楕円曲面の Mordell-Weil 群の可能性は決定されている (小木曾-塩田).

命題 2 ([5, Corollary 2.1]) 有理楕円曲面の Mordell-Weil 群は, 以下の 26 個の群のいずれかに等しい.

$$\begin{aligned} & \mathbb{Z}^r \quad (1 \leq r \leq 8), \quad \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad (1 \leq r \leq 4), \quad \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \quad (1 \leq r \leq 2), \\ & \mathbb{Z}^r \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \quad (1 \leq r \leq 2), \quad \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \quad (r = 1), \\ & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2, \quad (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2, \\ & \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \{0\}. \end{aligned}$$

よって有理楕円曲面のねじれ点 (section) の位数は 2, 3, 4, 5, 6 のいずれかである. また楕円曲線のねじれ点の構造は古典的に良く知られている (Kubert [3, Table 3] 参照).

補題 3 体 K 上定義された楕円曲線 E

$$E: y^2 + a_1xy + a_3y - x^3 - a_2x^2 - a_4x - a_6 = 0$$

の点 T について, 以下が成り立つ.

- (a) T が位数 2 のねじれ点. $\iff T$ での接線が $\mathcal{O} = [0, 1, 0]$ を通る.
 (b) T が位数 3 のねじれ点. $\iff T$ は変曲点.

補題 4 体 K 上定義された楕円曲線 $E_{u,v}$

$$E_{u,v}: y^2 + uxy + vy = x^3 + vx^2$$

の点 $T = (0, 0)$ について, 以下が成り立つ.

- (c) T が位数 4 のねじれ点. $\iff u = 1$.
 (d) T が位数 5 のねじれ点. $\iff v = u - 1$.
 (e) T が位数 6 のねじれ点. $\iff v = -(u - 1)(u - 2)$.

定理 1 で見たように QRT 写像 φ は, 有理楕円曲面の構造を持つ, 関数体 $\mathbb{C}(\lambda)$ 上の楕円曲線 E_λ の加法

$$\bar{P} = P + T$$

と等価であった. 従って

$$\varphi: \text{周期的} \iff T: \text{ねじれ点}$$

である. 命題 2, および補題 3, 4 を合わせると以下の定理を得る.

定理 5 $\Delta(\lambda) \neq 0$ とする. QRT 写像 φ が (任意の初期値に対して) 周期的であれば, その周期は 2, 3, 4, 5, 6 のいずれかである. またそれぞれの場合の必要十分条件は

- (a) 周期 2 $\iff a_3(\lambda) = 0$,
 (b) 周期 3 $\iff b_8(\lambda) = 0$,
 (c) 周期 4 $\iff u(\lambda) = 1$,
 (d) 周期 5 $\iff v(\lambda) = u(\lambda) - 1$,
 (e) 周期 6 $\iff v(\lambda) = -(u(\lambda) - 1)(u(\lambda) - 2)$.

但し $b_8(\lambda) = -a_1a_3a_4 + a_2a_3^2 - a_4^2$, $b_4(\lambda) = a_1a_3 + 2a_4$, $u(\lambda) = b_4b_8/a_3^4$, $v(\lambda) = b_8^3/a_3^8$ とした.

例 それぞれの周期 $n = 2, 3, 4, 5, 6$ について, パラメータ $A = (\alpha_{ij})_{0 \leq i, j \leq 2}$, $B = (\beta_{ij})_{0 \leq i, j \leq 2}$ および対応する QRT 写像 $\varphi: (x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$ の例を挙げる. 実際 $\varphi^n = \text{id}$ となることは容易に確かめられる.

(a) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{01} & 0 \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \beta_{01} & 0 \\ \beta_{10} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ 0 & \beta_{21} & 0 \end{pmatrix};$$

$$\bar{x} = -\frac{p_{1221} + p_{1121}y + p_{0121}xy + p_{1021}y^2}{p_{0112}x + p_{0121}y + p_{0111}xy + p_{0110}xy^2},$$

$$\bar{y} = \frac{p_{1221} - p_{1112}x - p_{0112}x^2 - p_{1012}xy}{p_{1012}x + p_{1021}y + p_{1011}xy - p_{0110}x^2y}.$$

但し $p_{ijkl} = \det \begin{vmatrix} \alpha_{ij} & \alpha_{kl} \\ \beta_{ij} & \beta_{kl} \end{vmatrix}$ とした。

(b) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & p & 1 \\ 0 & r & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/q & s & 0 \\ 1 & 1/p & 0 \end{pmatrix}, \quad pq \neq 0;$$

$$\bar{x} = \frac{-q(q+x+ry+pxy)}{q+pqsx+pqy+pxy}, \quad \bar{y} = \frac{q}{px}.$$

(c) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 \\ 0 & -1 & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p & 0 & r \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad pq \neq 0;$$

$$\bar{x} = \frac{y(q-y+pxy)}{p(-rx-y^2+pxy^2)}, \quad \bar{y} = \frac{y(1-px)}{px}.$$

(d) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 \\ 0 & -1 & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p & -pq & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad pq \neq 0;$$

$$\bar{x} = -\frac{q-y+pxy}{p(y-pqx-pxy)}, \quad \bar{y} = \frac{y-pqx-pxy}{px(1-px)}.$$

(e) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 \\ 0 & -1 & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p & -pq & -pq^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad pq \neq 0;$$

$$\bar{x} = \frac{y(q-y+pxy)}{p(pq^2x+pqxy-y^2+pxy^2)}, \quad \bar{y} = \frac{y(y-2pqx-pxy+p^2qx^2)}{px(y-pqx-pxy)}.$$

注 $\Delta(\lambda) \equiv 0$ の場合には、任意の周期 n を持つ QRT 写像の例が具体的に構成されている (村田実貴生).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2\cos\frac{\pi k}{n} & \sin\frac{\pi k}{n} \\ -1 & -\sin\frac{\pi k}{n} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\bar{x} = \frac{(2x \cos \frac{\pi k}{n} - y)(x + 2x \cos \frac{\pi k}{n} - y - 2 \sin \frac{\pi k}{n})}{x + y},$$

$$\bar{y} = \frac{x(x + 2x \cos \frac{\pi k}{n} - y - 2 \sin \frac{\pi k}{n})}{x + y}.$$

ここで k は n と互いに素な任意の整数とする.

注 文献 [1] では可積分系の視点から, 様々な例で周期的な離散力学系が考察されている.

4 QRT 写像の高次元への拡張

非斉次座標を $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{P}^1)^N$ として, $(2, \dots, 2)$ -次超曲面のペンシル

$$\{F(\boldsymbol{\alpha}^{(0)}; \mathbf{x}) + \lambda F(\boldsymbol{\alpha}^{(1)}; \mathbf{x}) = 0\}_{\lambda \in \mathbb{P}^1}$$

を考える. 但し多重指数 $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_N)$, $\mathbf{x}^{\mathbf{m}} = x_1^{m_1} \cdots x_N^{m_N}$, および $I = \{0, 1, 2\}^N$ とし

$$(3) \quad F(\boldsymbol{\alpha}^{(i)}; \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m} \in I} \alpha_{\mathbf{m}}^{(i)} \mathbf{x}^{\mathbf{m}}, \quad \alpha_{\mathbf{m}}^{(i)} \in \mathbb{C} \quad (i = 0, 1)$$

とおいた. 一般の点 $P = \mathbf{x} \in (\mathbb{P}^1)^N$ を含むペンシルの唯一の元を M とおく. 点 P を通り x_k -軸 (つまり $\{x_i = 0; i \neq k\}$) に平行な直線 l_k と M とのもう一つの交点を $\tilde{P} = \tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N)$ とおく. これによって双有理写像

$$\tau_k: \mathbf{x} \mapsto \tilde{\mathbf{x}}, \quad \tilde{x}_k = \frac{f_k - g_k x_k}{g_k - h_k x_k}, \quad \tilde{x}_i = x_i \quad (i \neq k)$$

を得る ($\tau_k^2 = \text{id}$). 但し f_k, g_k, h_k は ${}^t(f_k, g_k, h_k) = {}^t(A_k^{(0)}, B_k^{(0)}, C_k^{(0)}) \times {}^t(A_k^{(1)}, B_k^{(1)}, C_k^{(1)})$, および $F(\boldsymbol{\alpha}^{(i)}; \mathbf{x}) = A_k^{(i)} x_k^2 + B_k^{(i)} x_k + C_k^{(i)}$ で定まる, 変数 x_k に依らない多項式である. 双有理写像 $\Phi: (\mathbb{P}^1)^N \rightarrow (\mathbb{P}^1)^N$ を

$$\Phi = \tau_N \circ \tau_{N-1} \circ \cdots \circ \tau_1$$

と定義する. これは QRT 写像の高次元化と見做せる ($N = 2$ のときは QRT 写像).

写像 Φ は高次元の離散可積分系の良い例を与えるのではないかと筆者は考えている. 特にその非自励化は離散パンルベ方程式の高階化を与えると期待され興味深い.

注 $(2, \dots, 2)$ -次式 (3) は一般には

- (a) $N = 2$ のとき楕円曲線,
- (b) $N = 3$ のとき $K3$ 曲面,
- (c) $N \geq 4$ のとき Calabi-Yau 多様体を定める.

参考文献

- [1] 広田良吾・高橋大輔, 『差分と超離散』, 共立出版 (2003).
- [2] K. Kajiwara, T. Masuda, M. Noumi, Y. Ohta, and Y. Yamada, ${}_{10}E_9$ solution to the elliptic Painlevé equation, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** (2003) L263–L272.
- [3] D. Kubert, *Universal bounds on the torsion of elliptic curves*, *Proc. London Math. Soc.* (3) **33** (1976), no. 2, 193–237.
- [4] 中村佳正編, 『可積分系の応用数理』, 裳華房 (2000).
- [5] K. Oguiso and T. Shioda, *The Mordell-Weil lattice of a rational elliptic surface*, *Comment. Math. Univ. St. Paul.* **40** (1991), no. 1, 83–99.
- [6] G. R. W. Quispel, J. A. G. Roberts, and C. J. Thompson, *Integrable mappings and soliton equations*, *Phys. Lett. A* **126** (1988), no. 7, 419–421; *ibid.* II, *Phys. D* **34** (1989), no. 1-2, 183–192.
- [7] H. Sakai, *Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations*, *Comm. Math. Phys.* **220** (2001), no. 1, 165–229.
- [8] T. Tsuda, *Integrable mappings via rational elliptic surfaces*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** (2004), 2721–2730.