数理解析研究所講究録 1403 巻 2004 年 54-76

Willmore 曲面, S^3 の極小曲面および$\boldsymbol{R}^3$ の極小曲面

安藤 直也 (Naoya ANDO)
熊本大学理学部
(Faculty of Science, Kumamoto University)

目　次

0 はじめに

本稿の主な目的は S^3 の極小曲面や$\boldsymbol{R}^3$ の極小曲面からコンパクトな Willmore 曲面を得る方法を説明することである.

Weiner は S^3 の極小曲面の立体射影による像は Willmore 曲面であることを示した ([We]). 特に, 射影平面以外のコンパクトな 2 次元多様体の S^3 への極小はめこみが存在する ([La]) ので, 射影平面以外のコンパクトな 2 次元多様体の$\boldsymbol{R}^3$ への Willmore はめこみが存在することがわかる. 一方, 射影平面の S^3 への極小はめこみは存在しない ([Al]) ので, 射影平面の$\boldsymbol{R}^3$ への Willmore はめこみが存在するかどうかが興味の対象となる. Kusner はこの問題を肯定的に解決した ([K1], [K2]). 従って Willmore 曲面のカテゴリーは S^3 の極小曲面のカテゴリーよりも広いと言える. Kusner によって発見された Willmore 射影平面は$\boldsymbol{R}^3$ のある完備な極小曲面のある反転による像のコンパクト化である. 一般に, 完備な極小曲面の反転による像のコンパクト化は滑らかな曲面であるとは限らない. Kusner の仕事より以前に, Bryant は$\boldsymbol{R}^3$ の完備な極小曲面の反転による像のコンパクト化が滑らかな曲面

であることの判定条件を得た ([Br1]). この判定条件から, Kusner の Willmore 射影平面は滑らかな曲面であることがわかる.

筆者は Willmore 曲面の孤立臍点の指数は 1/2 以下であることを示した ([An]). 1/2 という値での上からの評価は最良である: Kusner の Willmore 射影平面は指数が 1/2 の孤立臍点を持つ (従って Kusner の Willmore 射影平面は Willmore 曲面の孤立臍点の指数の観点でも重要であることがわかる). Willmore 曲面は指数が 1/2 の孤立臍点を持つことがあるということは, 空間型の平均曲率一定曲面の孤立臍点の指数が $-1/2$ 以下であるということと比較することによって, 興味深いことであるように思われる: 前段落において Willmore 射影平面の存在は Willmore 曲面のカテゴリーと S^3 の極小曲面のカテゴリーに差があることを示していると述べたが, 孤立臍点の指数の取り得る値の範囲にもやはり差があることがわかる.

本稿においては, Willmore 曲面の孤立臍点の指数が 1/2 以下であることの証明に用いられた Hartman-Wintner の定理 ([HW1]) の証明を詳細に説明する. またこの定理を必要とする部分を Willmore 曲面が実解析的であることを示すことによって置き換えることができるが, このことについても説明する.

1 Willmore 汎関数

M をコンパクトかつ向きづけ可能な 2 次元可微分多様体とし, $\iota : M \to \boldsymbol{R}^3$ を M の $\boldsymbol{R}^3$ へのはめこみとする. また H を ι に関する M の平均曲率とする. このとき $\mathcal{W}(\iota)$ によって M 上での H^2 の積分を表す:

$$\mathcal{W}(\iota) := \int_M H^2 \, dA,$$

ただし dA は ι によって導かれた計量に関する M の面積要素である. $\mathcal{W}$ は M の $\boldsymbol{R}^3$ への各はめこみに実数を一つ対応させるいわゆる汎関数であるが, この汎関数 $\mathcal{W}$ を Willmore 汎関数とよぶ. 次の定理が成り立つ:

定理 1.1 ([Wi1], [Wi2]) $\mathcal{W}(\iota) \geqq 4\pi$ であり, さらに $\mathcal{W}(\iota) = 4\pi$ は $\iota(M)$ が全臍的な球面 (round sphere) であるときに限る.

一般に, $\iota : M \to \boldsymbol{R}^n$ を M の $\boldsymbol{R}^n$ $(n \geqq 3)$ へのはめこみとし, H を ι に関する M の平均曲率ベクトルとする. そして M 上での $|H|^2$ の積分

$$\mathcal{W}(\iota) := \int_M |H|^2 \, dA$$

を考える. 次の定理が成り立つ:

定理 1.2 X は $\boldsymbol{R}^n \cup \{\infty\}$ の共形変換で, $X \circ \iota(M)$ はコンパクトであるとする. このとき次が成り立つ:

$$\mathcal{W}(X \circ \iota) = \mathcal{W}(\iota).$$

参考 $n=3$ に対する定理 1.2 は White によって示された ([Wh]). ただし Blaschke によっても示されていたことが知られている ([Bl]). 一般の $n \geqq 3$ に対しては Chen によって示された ([C3]).

$S^n(1)$ を $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の原点を中心とする半径 1 の超球面とし, $p_+ := (0, \ldots, 0, 1)$ とおく. また $\pi : S^n(1) \setminus \{p_+\} \to \{x_{n+1} = -1\}$ を点 p_+ から超平面 $\{x_{n+1} = -1\}$ への立体射影とする. また ι は M の $\boldsymbol{R}^{n+1}$ へのはめこみで, $\iota(M) \subset S^n(1) \setminus \{p_+\}$ が成り立つものとする. このとき $\pi \circ \iota$ を M の $\boldsymbol{R}^n$ へのはめこみとみなすことができる. π は p_+ を中心とする半径 2 の超球面に関する反転を $S^n(1) \setminus \{p_+\}$ に制限したものであるので, 定理 1.2 から次を得る:

系 1.3 $\mathcal{W}(\pi \circ \iota) = \mathcal{W}(\iota)$.

注意 系 1.3 において, $\mathcal{W}(\iota)$ は ($S^n(1)$ ではなく) $\boldsymbol{R}^{n+1}$ における平均曲率ベクトルの長さの 2 乗の M 上での積分である.

2 Willmore 曲面

M および ι を第 1 節の最初に与えられたようなものとし, ξ を ι に関する M 上の単位法ベクトル場とする. M 上の滑らかな関数 f に対し, ι_f は $M \times \boldsymbol{R}$ から $\boldsymbol{R}^3$ への滑らかな写像で各 $p \in M$ に対し $\iota_f(p, 0) = \iota(p)$ および $(\partial \iota_f / \partial t)(p, 0) = f(p)\xi(p)$ を満たすものとする. また $(p, t) \in M \times \boldsymbol{R}$ に対し, $\iota_{f,t}(p) := \iota_f(p, t)$ とおく. このとき 0 を含む開区間 I が存在して, 任意の $t \in I$ に対し $\iota_{f,t}$ は M の $\boldsymbol{R}^3$ へのはめこみである. $t \in I$ に対し,

$$w_f(t) := \mathcal{W}(\iota_{f,t})$$

とおく. このとき ι が Willmore はめこみであるとは, 任意の f に対し次が成り立つときにいう:

$$\frac{dw_f}{dt}(0) = 0.$$

すなわち Willmore 汎関数 $\mathcal{W}$ の第一変分が 0 であるようなはめこみが Willmore はめこみである. また ι が Willmore はめこみであるとき, M と ι の対 (M, ι) または M の ι による像 $\iota(M)$ を Willmore 曲面という (すなわち Willmore 汎関数 $\mathcal{W}$ の停留曲面が Willmore 曲面である). Willmore 曲面については次の定理が成り立つ:

定理 2.1 ([C2]) M, ι および H を第1節の最初に与えられたようなものとし, K, Δ をそれぞれ ι によって導かれた計量に関する M の Gauss 曲率および M 上の Laplacian とする. このとき ι が Willmore はめこみであることと M 上次の方程式が成り立つことは同値である:

$$\Delta H + 2\left(H^2 - K\right)H = 0. \tag{1}$$

(1) は Willmore はめこみに対する Euler-Lagrange 方程式である.

定理 2.1 の証明 (u, v) を M の点 p の近傍 U 上の局所座標系とする. また f の台は U に含まれるものとする. そして $t \in I$ に対し,

$$E_{f,t} := (\iota_{f,t})_u \cdot (\iota_{f,t})_u, \qquad F_{f,t} := (\iota_{f,t})_u \cdot (\iota_{f,t})_v, \qquad G_{f,t} := (\iota_{f,t})_v \cdot (\iota_{f,t})_v$$

とおき, さらに

$$\xi_{f,t} := \frac{(\iota_{f,t})_u \times (\iota_{f,t})_v}{|(\iota_{f,t})_u \times (\iota_{f,t})_v|}, \quad l_{f,t} := (\iota_{f,t})_{uu} \cdot \xi_{f,t}, \quad m_{f,t} := (\iota_{f,t})_{uv} \cdot \xi_{f,t}, \quad n_{f,t} := (\iota_{f,t})_{vv} \cdot \xi_{f,t}$$

および

$$H_{f,t} := \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} E_{f,t} & F_{f,t} \\ F_{f,t} & G_{f,t} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} l_{f,t} & m_{f,t} \\ m_{f,t} & n_{f,t} \end{pmatrix}\right) \tag{2}$$

とおく. このとき

$$\begin{aligned} \frac{dw_f}{dt}(0) &= \frac{d}{dt}\iint_U H_{f,t}^2 \sqrt{E_{f,t}G_{f,t} - F_{f,t}^2}\,dudv\Big|_{t=0} \\ &= \iint_U \frac{\partial}{\partial t}\left(H_{f,t}^2\sqrt{E_{f,t}G_{f,t} - F_{f,t}^2}\right)\Big|_{t=0} dudv \\ &= \iint_U \left\{2H\frac{\partial H_{f,t}}{\partial t}\Big|_{t=0}\sqrt{EG - F^2} + H^2\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{E_{f,t}G_{f,t} - F_{f,t}^2}\Big|_{t=0}\right\}dudv \end{aligned} \tag{3}$$

が成り立つ, 但し $E := E_{f,0}$, $F := F_{f,0}$, $G := G_{f,0}, \ldots$ である. (3) の最右辺の第2項については,

$$\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{E_{f,t}G_{f,t} - F_{f,t}^2}\Big|_{t=0} = -2fH\sqrt{EG - F^2} \tag{4}$$

が成り立つ. (3) の最右辺の第1項について,

$$\frac{\partial H_{f,t}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\left\{\Delta f + \left(4H^2 - 2K\right)f\right\} \tag{5}$$

を示したい. (2) から,

$$\left.\frac{\partial H_{f,t}}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\left.\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} E_{f,t} & F_{f,t} \\ F_{f,t} & G_{f,t} \end{pmatrix}^{-1}\right|_{t=0}\begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\left.\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} l_{f,t} & m_{f,t} \\ m_{f,t} & n_{f,t} \end{pmatrix}\right|_{t=0}\right\} \tag{6}$$

を得る. ここで

$$\begin{pmatrix} E_{f,t} & F_{f,t} \\ F_{f,t} & G_{f,t} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} E_{f,t} & F_{f,t} \\ F_{f,t} & G_{f,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

から,

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} E_{f,t} & F_{f,t} \\ F_{f,t} & G_{f,t} \end{pmatrix}^{-1}\right|_{t=0}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\left.\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} E_{f,t} & F_{f,t} \\ F_{f,t} & G_{f,t} \end{pmatrix}\right|_{t=0} \\ &= 2f\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

を得る. よって(6) の右辺第 1 項は

$$f\mathrm{tr}\left\{\left(\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}\right)^2\right\} = (4H^2 - 2K)f \tag{7}$$

に等しいことがわかる. また(6) の右辺第 2 項について,

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} l_{f,t} & m_{f,t} \\ m_{f,t} & n_{f,t} \end{pmatrix}\right|_{t=0} = \begin{pmatrix} \partial_t(\iota_{f,t})_{uu}|_{t=0}\cdot\xi & \partial_t(\iota_{f,t})_{uv}|_{t=0}\cdot\xi \\ \partial_t(\iota_{f,t})_{uv}|_{t=0}\cdot\xi & \partial_t(\iota_{f,t})_{vv}|_{t=0}\cdot\xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \iota_{uu}\cdot\partial_t\xi_{f,t}|_{t=0} & \iota_{uv}\cdot\partial_t\xi_{f,t}|_{t=0} \\ \iota_{uv}\cdot\partial_t\xi_{f,t}|_{t=0} & \iota_{vv}\cdot\partial_t\xi_{f,t}|_{t=0} \end{pmatrix} \tag{8}$$

が成り立つ. ここで

$$\begin{aligned}&\left[\partial_t(\iota_{f,t})_{uu}|_{t=0},\ \partial_t(\iota_{f,t})_{uv}|_{t=0},\ \partial_t(\iota_{f,t})_{vv}|_{t=0}\right] \\ &= [f_{uu}\xi + 2f_u\xi_u + f\xi_{uu},\ f_{uv}\xi + f_u\xi_v + f_v\xi_u + f\xi_{uv},\ f_{vv}\xi + 2f_v\xi_v + f\xi_{vv}]\end{aligned}$$

が成り立つので, (8) の右辺第 1 項は

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{uv} & f_{vv} \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} \xi_u\cdot\xi_u & \xi_u\cdot\xi_v \\ \xi_u\cdot\xi_v & \xi_v\cdot\xi_v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{uv} & f_{vv} \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{9}$$

と表される．また $\partial_t \xi_{f,t}\big|_{t=0}$ は ξ と直交しているので, U の各点で

$$\partial_t \xi_{f,t}\big|_{t=0} = c_1 \iota_u + c_2 \iota_v \tag{10}$$

と表される $(c_1, c_2 \in \boldsymbol{R})$．ここで

$$\left(\partial_t \xi_{f,t}\big|_{t=0} \cdot \iota_u,\ \partial_t \xi_{f,t}\big|_{t=0} \cdot \iota_v\right) = -\left(\xi \cdot \partial_t (\iota_{f,t})_u\big|_{t=0},\ \xi \cdot \partial_t (\iota_{f,t})_v\big|_{t=0}\right) = -(f_u,\ f_v)$$

であるので, (10) の右辺における c_1, c_2 は

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_u \\ f_v \end{pmatrix}$$

によって与えられる（すなわち $-\partial_t \xi_{f,t}\big|_{t=0}$ は ι によって導かれた計量に関する f の勾配ベクトル場に等しい）．よって(8) の右辺第 2 項は

$$\begin{aligned}
&-\left\{ \begin{pmatrix} \Gamma^u_{uu} & \Gamma^u_{uv} \\ \Gamma^u_{uv} & \Gamma^u_{vv} \end{pmatrix} \iota_u + \begin{pmatrix} \Gamma^v_{uu} & \Gamma^v_{uv} \\ \Gamma^v_{uv} & \Gamma^v_{vv} \end{pmatrix} \iota_v \right\} \cdot [\iota_u,\ \iota_v] \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_u \\ f_v \end{pmatrix} \\
&= -\left\{ \begin{pmatrix} \Gamma^u_{uu} & \Gamma^u_{uv} \\ \Gamma^u_{uv} & \Gamma^u_{vv} \end{pmatrix} f_u + \begin{pmatrix} \Gamma^v_{uu} & \Gamma^v_{uv} \\ \Gamma^v_{uv} & \Gamma^v_{vv} \end{pmatrix} f_v \right\}
\end{aligned} \tag{11}$$

と表される．よって(8), (9) および(11) から, (6) の右辺第 2 項は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{ \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_{uu} - \Gamma^u_{uu} f_u - \Gamma^v_{uu} f_v & f_{uv} - \Gamma^u_{uv} f_u - \Gamma^v_{uv} f_v \\ f_{uv} - \Gamma^u_{uv} f_u - \Gamma^v_{uv} f_v & f_{vv} - \Gamma^u_{vv} f_u - \Gamma^v_{vv} f_v \end{pmatrix} \right. \\
&\qquad \left. - f\left(\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} \right)^2 \right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{ \Delta f - (4H^2 - 2K) f \right\}
\end{aligned} \tag{12}$$

と表されることがわかる．(6), (7) および(12) から, (5) を得る．(3), (4) および(5) から,

$$\frac{dw_f}{dt}(0) = \iint_U \left\{ H \Delta f + 2(H^2 - K) H f \right\} dA \tag{13}$$

を得る．Stokes の定理を用いて, (13) を

$$\frac{dw_f}{dt}(0) = \iint_U f \left\{ \Delta H + 2(H^2 - K) H \right\} dA \tag{14}$$

と書き換えることができる．よって ι が Willmore はめこみであるならば U 上(1) が成り立つことがわかる．点 p は任意にとってよいので, M 上(1) が成り立つ．

逆に M 上(1) が成り立つとき ι が Willmore であることを示す. M はコンパクトであるので, M の座標近傍系 $\{(U_i,(u_i,v_i))\}_{i=1}^m$ および $\{U_i\}_{i=1}^m$ に従属する単位の分割 $\{\chi_i\}_{i=1}^m$ が存在する. $\{(U_i,(u_i,v_i))\}_{i=1}^m$ は M の向きの一つを与えると仮定してよい. このとき(4), (5) および Stokes の定理を用いて, M 上の滑らかな関数 f に対し

$$
\begin{aligned}
\frac{dw_f}{dt}(0) &= \sum_{i=1}^m \frac{d}{dt}\iint_{U_i} \chi_i H_{f,t}^2 \sqrt{E_{f,t,i}G_{f,t,i}-F_{f,t,i}^2}\,du_i dv_i \Big|_{t=0} \\
&= \sum_{i=1}^m \iint_{U_i} \chi_i \{H\Delta f + 2(H^2-K)Hf\} dA \\
&= \iint_M f\{\Delta H + 2(H^2-K)H\} dA
\end{aligned}
$$

が成り立つことがわかる. よって M 上(1) が成り立つならば, $(dw_f/dt)(0)=0$ が成り立つ. よって ι は Willmore はめこみである. □

注意 はめこみが Willmore であるということを定義する際, M がコンパクトである必要はない: 上に現れた f の台がコンパクトであることおよび台に含まれない点 $p\in M$ および任意の $t\in \boldsymbol{R}$ に対し $\iota_f(p,t)=\iota(p)$ が成り立つという条件を付け加えることによって, やはりはめこみの Willmore 性を定義することができる. さらに M が向きづけ可能である必要もない: f の台は M の向きづけ可能な領域に含まれるという条件を付け加えればよい. M のコンパクト性や向きづけ可能性を仮定しない場合における Willmore はめこみに対する Euler-Lagrange 方程式はやはり (1) によって与えられる.

注意 X を $\boldsymbol{R}^3\cup\{\infty\}$ の共形変換とするとき, M の $X\circ\iota$ による像がコンパクトであるならば, 定理 1.2 を用いて ι が Willmore であることと $X\circ\iota$ が Willmore であることは同値であることがわかる. さらに, M のコンパクト性や向きづけ可能性を仮定しないとしても, $\infty\notin X\circ\iota(M)$ が成り立つならば, ι が Willmore であることと $X\circ\iota$ が Willmore であることは同値である ([An]).

参考 M をコンパクトかつ向きづけ可能な $(n-1)$ 次元可微分多様体 $(n\geqq 3)$ とし, $\iota: M\to\boldsymbol{R}^n$ を M の $\boldsymbol{R}^n$ へのはめこみとする. また H を ι に関する M の平均曲率とする. そして

$$
\mathcal{W}(\iota) := \int_M H^{n-1}\,dV, \qquad \mathcal{W}_*(\iota) := \int_M |H|^{n-1}\,dV
$$

とおく, ただし dV は ι によって導かれた計量に関する M の体積要素である. このとき Chen は [C1] において $\mathcal{W}_*(\iota)$ は単位 $(n-1)$ 次球面の体積以上でありかつ等号成立は $\iota(M)$ が全臍的な超球面であるときに限ることを示した (定理 1.1 の一般化). また Chen は [C2]

において汎関数 $\mathcal{W}$ の第一変分が 0 であるようなはめこみに対する Euler-Lagrange 方程式は次によって与えられることを示した:

$$\Delta H^{n-2} + \{(n-1)(n-2)H^2 - S\}H^{n-2} = 0, \tag{15}$$

ただし S, Δ はそれぞれ ι によって導かれた計量に関する M のスカラー曲率および M 上の Laplacian である. $n=3$ に対する方程式(15) はちょうど方程式(1) である.

3 Willmore 曲面と S^3 の極小曲面

M をコンパクトな 2 次元可微分多様体とし, $\iota : M \to S^3$ を M の単位 3 次球面 S^3 へのはめこみとする. また H を M の S^3 における平均曲率とする. そして $\mathcal{W}_1(\iota)$ を次のようにおく:

$$\mathcal{W}_1(\iota) := \int_M (H^2+1)\, dA \tag{16}$$

(M が向きづけ不可能であるならば H を M 上連続に定義することはできないが, H^2 は M 上連続であるので(16) の右辺は ι によって確かに定義される). 汎関数 $\mathcal{W}_1$ の第一変分が 0 であるようなはめこみを S^3 への Willmore はめこみ という. $\iota_1 : S^3 \to \boldsymbol{R}^4$ は S^3 の $\boldsymbol{R}^4$ への等長なうめこみで, $\iota_1(S^3) = S^3(1)$ が成り立つものとする. このとき $\iota_1 \circ \iota$ は M の $\boldsymbol{R}^4$ へのはめこみであるが, M の $\boldsymbol{R}^4$ における平均曲率ベクトルの長さの 2 乗は(16) の右辺の被積分関数 H^2+1 に等しいことに注意することによって,

$$\mathcal{W}_1(\iota) = \mathcal{W}(\iota_1 \circ \iota)$$

がわかる. よって $p_+ \notin \iota_1 \circ \iota(M)$ であるならば, 系 1.3 を用いて

$$\mathcal{W}_1(\iota) = \mathcal{W}(\pi \circ \iota_1 \circ \iota)$$

を得る. よって次の命題を得る:

命題 3.1 ([We]) $\iota : M \to S^3$ は M の S^3 へのはめこみで, $p_+ \notin \iota_1 \circ \iota(M)$ が成り立つものとする. このとき ι が Willmore であることと $\pi \circ \iota_1 \circ \iota : M \to \boldsymbol{R}^3$ が Willmore であることは同値である.

Weiner は S^3 への Willmore はめこみ ι に対する Euler-Lagrange 方程式は次によって与えられることを示した ([We]):

$$\Delta H + 2(H^2 - K_1)H = 0, \tag{17}$$

ただし K_1 は M の S^3 における Weingarten 写像の行列式である ((1) と比べていただきたい). 方程式(17) によると, S^3 の極小曲面は Willmore 曲面である. M が射影平面と同相ではないならば M の S^3 への極小はめこみが存在する ([La]) ので, 命題 3.1 を用いて次の定理を得る:

定理 3.2 ([We]) M が射影平面と同相ではないならば, M の $\boldsymbol{R}^3$ への Willmore はめこみが存在する.

定理 3.2 によると $\boldsymbol{R}^3$ のコンパクトな Willmore 曲面は豊富に存在し, そしてこの根拠は S^3 のコンパクトな極小曲面が豊富に存在することにある. このとき $\boldsymbol{R}^3$ の任意のコンパクトな Willmore 曲面は S^3 の極小曲面の立体射影による像と $\boldsymbol{R}^3 \cup \{\infty\}$ の共形変換によって互いに写りあうかどうかが興味の対象となる. Pinkall は [Pi] において S^3 の Hopf トーラスを調べた, 但し S^3 の Hopf トーラスとは S^2 の閉曲線の Hopf 写像 $S^3 \to S^2$ による逆像のことである (S^2 の各閉曲線が S^3 の Hopf トーラスを一つ定める). S^3 の Hopf トーラスは平坦である. Pinkall は [Pi] において S^3 にうめこまれた Hopf トーラスの中には Willmore 曲面であるものがたくさん存在することを示しさらにそのような Hopf トーラスのうち S^3 の極小曲面とはいかなる共形変換によっても互いに写りあわないものが存在することを示した. 命題 3.1 からこのような Hopf トーラスの立体射影による像は $\boldsymbol{R}^3$ の Willmore 曲面であることがわかるので, 以上から次の定理を得る:

定理 3.3 ([Pi]) $\boldsymbol{R}^3$ のコンパクトな Willmore 曲面で S^3 の極小曲面の立体射影による像と $\boldsymbol{R}^3 \cup \{\infty\}$ の共形変換によって互いに写りあわないものが存在する.

また射影平面の S^3 への極小はめこみは存在しない ([Al]) が, 一方で射影平面の $\boldsymbol{R}^3$ への Willmore はめこみは存在する (このことについては第 4 節および第 5 節において詳細に説明する).

4 Willmore 汎関数と共形面積

M をコンパクトな 2 次元可微分多様体とし, M の共形構造を一つ固定する. そして $\iota : M \to S^n$ を M の単位 n 次球面 S^n への共形的なはめこみとする. また G_n を S^n の共形変換群とする (G_n は $O(n+1,1)$ と同形である). このとき ι についての M の <u>n-共形面積</u> $A_c(n,\iota)$ とは次のように定義される量である:

$$A_c(n,\iota) := \sup_{X \in G_n} \int_M dA_X,$$

ただし dA_X は $X \circ \iota$ によって導かれた計量に関する M の面積要素である. そして M の

<u>n-共形面積</u> $A_c(n, M)$ とは次のように定義される量である:

$$A_c(n, M) := \inf\{A_c(n, \iota) \ ; \quad \iota : M \to S^n \text{ は共形的なはめこみ}\}.$$

このとき Li-Yau は次の定理を示した:

定理 4.1 ([LY]) M をコンパクトな 2 次元 Riemann 多様体とする. また λ_1 を M 上の Laplacian の第 1 固有値とし, dA を M の面積要素とする. そして M の S^n への共形的なはめこみが存在するものとする. このとき次が成り立つ:

$$\lambda_1 \int_M dA \leqq 2A_c(n, M).$$

さらに等号が成立するならば, M の計量を定数倍することによって M の S^n への等長かつ極小なはめこみを見い出すことができそしてこのとき $\lambda_1 = 2$ が成り立つ.

$\iota : M \to S^n$ を M の単位 n 次球面 S^n へのはめこみとする. また H を M の S^n における平均曲率ベクトルとする. そして $\mathcal{W}_1(\iota)$ を次のようにおく:

$$\mathcal{W}_1(\iota) := \int_M \left(|H|^2 + 1\right) dA.$$

このとき定理 1.2 および系 1.3 を用いて, 任意の $X \in G_n$ に対し次が成り立つことがわかる:

$$\mathcal{W}_1(X \circ \iota) = \mathcal{W}_1(\iota).$$

よって次を得る:

$$A_c(n, \iota) \leqq \mathcal{W}_1(\iota). \tag{18}$$

系 1.3 および(18) を用いて, 共形面積と Willmore 汎関数との関係について次の補題を得る:

補題 4.2 ([LY]) $\iota : M \to \boldsymbol{R}^n$ を M の $\boldsymbol{R}^n$ $(n \geqq 3)$ へのはめこみとし, $A_c(n, M)$ を ι によって導かれた計量が定める共形構造に関する M の n-共形面積とする. このとき次が成り立つ:

$$\mathcal{W}(\iota) \geqq A_c(n, M).$$

定理 4.1 および補題 4.2 を用いて, 次の定理を得る:

定理 4.3 ([LY]) M を射影平面とし, $\iota : M \to \boldsymbol{R}^n$ を M の $\boldsymbol{R}^n$ $(n \geqq 3)$ へのはめこみとする. このとき $\mathcal{W}(\iota) \geqq 6\pi$ が成り立つ. さらに等号成立は $n \geqq 4$ でありかつ $\iota(M)$ が S^4 の Veronese 曲面の立体射影による像と $\boldsymbol{R}^n \cup \{\infty\}$ の共形変換によって写りあうときに限る.

定理 4.3 において, $n=3$ である場合には $\mathcal{W}(\iota)$ の評価は最良ではない. 評価の改良について考えたい. まず次の定理に注意する:

定理 4.4 ([LY]) M をコンパクトな 2 次元可微分多様体とする. また $\iota : M \to \boldsymbol{R}^n$ は M の $\boldsymbol{R}^n$ $(n \geqq 3)$ へのはめこみで, $\iota(M)$ のある点の ι による逆像は k 個の点 $(k \in \mathbf{N})$ からなるものとする. このとき $\mathcal{W}(\iota) \geqq 4k\pi$ が成り立つ.

注意 定理 4.4 から, $\mathcal{W}(\iota) < 8\pi$ であるならば ι はうめこみであることがわかる.

M が射影平面でありかつ $n=3$ であるならば, 定理 4.4 における k は $\iota(M)$ のある点で 3 以上である ([Ba]). よってこのとき $\mathcal{W}(\iota) \geqq 12\pi$ が成り立つ. そして Kusner は $\mathcal{W}(\iota) = 12\pi$ を満たす $\iota : M \to \boldsymbol{R}^3$ を発見した ([K1], [K2]). さらに Bryant は $\mathcal{W}$ が 12π を達成する射影平面の $\boldsymbol{R}^3$ への全てのはめこみからなるモジュライ空間を描写した ([Br2]).

M が射影平面であるとき, $\mathcal{W}(\iota) = 12\pi$ を満たす $\iota : M \to \boldsymbol{R}^3$ は Willmore はめこみである. よって定理 3.2 に注意することによって, 任意のコンパクトな 2 次元可微分多様体の $\boldsymbol{R}^3$ への Willmore はめこみが存在することがわかる.

5 Willmore 曲面と $\boldsymbol{R}^3$ の極小曲面

Kusner の Willmore はめこみ ι に対し, $\iota(M)$ は $\boldsymbol{R}^3$ の連結かつ完備な極小曲面のある反転による像のコンパクト化である. 一般に, S を $\boldsymbol{R}^3$ の連結かつ完備な極小曲面とする. このとき S は Willmore はめこみに対する Euler-Lagrange 方程式(1) を満たす, すなわち S は Willmore 曲面である. X を中心が S の点ではないような球面に関する反転とする. このとき $X(S)$ のコンパクト化は必ずしも滑らかな曲面であるとは限らない (つまりあるはめこみによるコンパクトな 2 次元可微分多様体の像であるとは限らない). $X(S)$ のコンパクト化が滑らかな曲面であるとき, それはコンパクトな Willmore 曲面である. それではどのような場合に $X(S)$ のコンパクト化は滑らかな曲面であるだろうか？ $\boldsymbol{R}^3$ の連結かつ完備な極小曲面 S が 無限遠点で正則である とは, S のコンパクト集合 T が存在して次を満たすときにいう:

(a) $S \setminus T$ の連結成分の個数は有限である (S の位相は $\boldsymbol{R}^3$ に対する相対位相ではない);

(b) $S \setminus T$ の各連結成分 Σ に対し, $\boldsymbol{R}^3$ のある平面 P および P の有界領域 D が存在して Σ は $P \setminus \overline{D}$ 上の滑らかな関数 f のグラフである;

(c) (x,y) を P 上の直交座標系とするとき, f は次のように漸近展開される:

$$f(x,y) = a\log\left(x^2+y^2\right) + b + \frac{cx}{x^2+y^2} + \frac{dy}{x^2+y^2} + O\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \quad ((x,y)\to\infty), \tag{19}$$

但し a, b, c, d は実数である.

次が成り立つ:

定理 5.1 ([S]) S を $\boldsymbol{R}^3$ の連結かつ完備な極小曲面とする. このとき次の (i), (ii) は同値である:

(i) S は無限遠点で正則である;

(ii) S の全曲率は有限でありかつ S の任意のエンドはうめこまれている.

S は無限遠点で正則であるとする. このとき S のエンドの対数増大度が零である (またはエンドが平坦である) とは, $S\setminus T$ の任意の連結成分に対し対応する(19) における係数 a が 0 であるときにいうことにする. 次が成り立つ:

定理 5.2 ([Br1]) S を $\boldsymbol{R}^3$ の連結かつ完備な極小曲面とする. このとき次の (i), (ii) は同値である:

(i) S は無限遠点で正則でありかつ S のエンドの対数増大度は零である;

(ii) $X(S)$ のコンパクト化は滑らかな曲面である.

Kusner の Willmore 射影平面は無限遠点で正則でありかつエンドの対数増大度が零であるような極小曲面のある反転による像のコンパクト化である.

定理 5.2 の証明　まず $X(S)$ のコンパクト化が滑らかな曲面であることを仮定して, S は無限遠点で正則でありかつ S のエンドの対数増大度は零であることを示す. 仮定から, S のエンドがうめこまれていることは直ちにわかる. また K を S の Gauss 曲率とし $\overline{K}$, $\overline{H}$ をそれぞれ $X(S)$ の Gauss 曲率および平均曲率とするとき

$$\int_S (-K)dA = \int_{X(S)} \left(\overline{H}^2 - \overline{K}\right) d\overline{A}$$

が成り立ち ([Wh]) かつこの式の右辺は有限の値であるので, S の全曲率は有限であることがわかる. よって定理 5.1 から, S は無限遠点で正則であることがわかる. そこで T を

S の然るべき条件を満たすコンパクト集合とし, Σ を $S\setminus T$ の連結成分の一つとする. Σ に対し, P, D, f および (x,y) を上述のようなものとする. さらに (x,y,z) は $\boldsymbol{R}^3$ 上の直交座標系を構成するものとする. X を $\boldsymbol{R}^3$ の原点 o を中心とする半径 1 の球面に関する反転とする:

$$X(x,y,z) := \frac{1}{x^2+y^2+z^2}(x,y,z).$$

$X(\Sigma)$ に o を付け加えたものを Σ_0 によって表す. Σ_0 は滑らかな曲面である. (u,v) は $P\setminus\{o\}$ 上の座標系で, 次を満たすものとする:

$$(u,v) = \frac{1}{x^2+y^2}(x,y).$$

このとき (u,v) を Σ_0 における o の近傍上の局所座標系とみなすことができ, そしてこのとき o は $(u,v)=(0,0)$ に相当することがわかる. $\Sigma_0\setminus\{o\}$ の点 $X(x,y,f(x,y))$ の第 3 成分は次のように表される:

$$\frac{f(x,y)}{x^2+y^2+f(x,y)^2}. \tag{20}$$

(u,v) を用いて, (20) を次のように書き直すことができる:

$$\frac{(u^2+v^2)g(u,v)}{1+(u^2+v^2)g(u,v)^2}\ (=: G(u,v)), \tag{21}$$

但し

$$g(u,v) := -a\log\left(u^2+v^2\right)+b+cu+dv+o\left(\left(u^2+v^2\right)^{1/2}\right) \quad ((u,v)\to(0,0))$$

である. 仮定から, G は $(0,0)$ の近傍上の滑らかな関数であることがわかる. ここでもし $a\neq 0$ であるならば G は $(0,0)$ で C^1 級ではあるが C^2 級ではないので, $a=0$ を得る. $S\setminus T$ の他の連結成分についても同様である. よって S のエンドの対数増大度は零であることがわかる.

以上の議論を参考にすることによって, 逆を示すことができる: S が無限遠点で正則でありかつ S のエンドの対数増大度が零であることを仮定して $X(S)$ のコンパクト化が滑らかな曲面であることを示すことができる. □

注意 定理 3.3 において与えられた Willmore 曲面は無限遠点で正則でありかつエンドの対数増大度が零であるような極小曲面の反転による像のコンパクト化ではない. なぜならば

(a) 定理 3.3 において与えられた Willmore 曲面は S^3 の Hopf トーラスの立体射影による像であるので, この曲面は臍点を持たないことがわかり,

(b) 定理 5.2 の証明の中での Σ_0 における o の近傍は写像

$$\Phi(u,v) := \frac{1}{1+\left(u^2+v^2\right)g(u,v)^2}\left(u,\ v,\ \left(u^2+v^2\right)g(u,v)\right)$$

による $(0,0)$ の近傍の像と表されるが, 直接計算することによって $o=\Phi(0,0)$ は Σ_0 の臍点であることがわかる

からである. 同様に, S^3 の極小曲面の一つである Clifford トーラスも無限遠点で正則でありかつエンドの対数増大度が零であるような極小曲面の反転による像のコンパクト化ではないことがわかる.

注意 S を $\boldsymbol{R}^3$ の連結かつ完備な極小曲面とし, さらに無限遠点で正則であるものとする. このとき定理 5.1 から, S の全曲率は有限であることがわかる. このような S に対し, コンパクトな 2 次元 Riemann 多様体 $\tilde{S}$ および $\tilde{S}$ の有限個の点 $\{p_i\}_{i=1}^m$ が存在して S は $\tilde{S}\setminus\{p_i\}_{i=1}^m$ と共形同値でありさらに S の Gauss 写像 N は $\tilde{S}$ 上の有理型関数に拡張される ([O, Lemma 9.5]). S の臍点はちょうど N の微分が零であるような S の点であるので, S の臍点の個数は有限であることがわかる. S のエンドの個数も有限であるので, S のエンドの対数増大度が零であるならば S のある反転による像のコンパクト化の臍点の個数は有限であることがわかる.

6 Willmore 曲面の孤立臍点の指数

[An] において, 筆者は次を示した:

定理 6.1 ([An]) S を $\boldsymbol{R}^3$ にはめこまれた Willmore 曲面とし, p_0 を S の孤立臍点とする. このとき S 上での p_0 の指数は 1/2 以下である.

この定理を示すために, まず S における孤立臍点 p_0 の近傍を 2 変数関数 F のグラフとして表す: p_0 が $\boldsymbol{R}^3$ の原点 o に対応しかつ p_0 での S への接平面が xy 平面に対応するように $\boldsymbol{R}^3$ 上の直交座標系 (x,y,z) を選んだ上で, xy 平面における $(0,0)$ の近傍上の滑らかな関数 F のグラフとして S における p_0 の近傍を表す. F に対し,

$$p_F := \frac{\partial F}{\partial x},\quad q_F := \frac{\partial F}{\partial y},\quad r_F := \frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\quad s_F := \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},\quad t_F := \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

とおく. F は

$$F(0,0) = p_F(0,0) = q_F(0,0) = 0 \tag{22}$$

を満たす．さらに以下においては，

$$r_F(0,0) = s_F(0,0) = t_F(0,0) = 0 \tag{23}$$

を仮定する (定理 6.1 を証明する際実は一般性を失わない: o は F のグラフの臍点であるので $r_F(0,0) = t_F(0,0)$ および $s_F(0,0) = 0$ が成り立つが，$r_F(0,0) \neq 0$ であるならば，$(0,0,2/r_F(0,0))$ を中心とする半径 $2/|r_F(0,0)|$ の球面に関する反転 X によって F のグラフがうつされたとき，(a) その像は o で xy 平面に接する Willmore 曲面であり，(b) o での平均曲率は零であり，(c) X によって F のグラフの主方向は像の主方向にうつされる)．この F に対し，3 以上の整数 k_F および恒等的に零ではない 2 変数 k_F 次同次多項式 g_F が存在して $(0,0)$ の近傍上で $F = g_F + o\big((x^2+y^2)^{k_F/2}\big)$ が成り立つことを示す必要がある．[An] においては，このことを示すために [HW1] に現れる次の定理を用いた:

定理 6.2 ([HW1]) Φ は $\boldsymbol{R}^8$ の凸領域 D 上で定義された 8 変数 x, y, z, p, q, r, s, t の滑らかな関数で，D 上次を満たすとする:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r}\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)^2 > 0.$$

f_0, f_1 は $\boldsymbol{R}^2$ における $(0,0)$ の近傍 U 上で定義された滑らかな関数で，任意の $(x,y) \in U$ および $i = 0,1$ に対し次の二つが成り立つとする:

$$(x,y,f_i,p_{f_i},q_{f_i},r_{f_i},s_{f_i},t_{f_i}) \in D, \qquad \Phi(x,y,f_i,p_{f_i},q_{f_i},r_{f_i},s_{f_i},t_{f_i}) = 0$$

(但し f_i, p_{f_i}, $q_{f_i}, \ldots,$ は (x,y) での値である)．さらに $f_0(0,0) = f_1(0,0)$ および U 上で $f_0 \not\equiv f_1$ を仮定する．このとき $f_1 - f_0$ の $(0,0)$ での偏微分係数のうち零ではないものが存在する．

F のグラフの Gauss 曲率および平均曲率をそれぞれ K_F および H_F で表す．次が成り立つ:

$$K_F = \frac{r_F t_F - s_F^2}{\big(1+p_F^2+q_F^2\big)^2}, \qquad H_F = \frac{(1+p_F^2)t_F - 2p_F q_F s_F + (1+q_F^2)r_F}{2\big(1+p_F^2+q_F^2\big)^{3/2}}. \tag{24}$$

(23) および(24) から，$H_F(0,0) = 0$ がわかる．もし $H_F \equiv 0$ であるならば，F は実解析的である．よって F に対し上述のような g_F が存在することがわかる．$H_F \not\equiv 0$ を仮定する．このとき(1) から，$f := H_F$ は方程式 $\big\{\Delta + 2\big(H_F^2 - K_F\big)\big\}f = 0$ の解であることがわかる．一方で，$f := 0$ もこの方程式の解である．よって定理 6.2 を用いて，H_F の $(0,0)$ での偏微分係数のうち零ではないものが存在することがわかる．そして(24) に注意することによっ

て, F に対し上述のような g_F が存在することがわかる. また F に対し上述のような g_F が存在することを示すためには, F が実解析的であることがわかればよい. (1) および(24) から, F はある 4 階の非線型楕円型偏微分方程式の解であることがわかる. この偏微分方程式に対し, 14 変数の実解析的な関数 Ψ が存在して方程式は次のように表される:

$$\Psi\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3}, \frac{\partial^4 F}{\partial y^4}\right) = 0.$$

[Pe] によると, このような F は実解析的である. よって F に対し上述のような g_F が存在することがわかる. この g_F を調べることによって, S 上での p_0 の指数は 1/2 以下であることがわかる.

注意 定理 6.1 において与えられている Willmore 曲面上での孤立臍点の指数の評価は最良である: Kusner の Willmore 射影平面は指数が 1/2 の孤立臍点を持つ.

参考 [HW2] において, Hartman-Wintner は連結でありかつ全臍的ではない特別な Weingarten 曲面 S の臍点は孤立していてかつその指数は負であることを示した. その際まず S の臍点 p_0 の近傍を 2 変数関数 F のグラフとして表す: p_0 が $\boldsymbol{R}^3$ の原点 o に対応するものとし, xy 平面における $(0,0)$ の近傍上の滑らかな関数 F で(22) を満たすもののグラフとして S における p_0 の近傍を表す. S が特別な Weingarten 曲面であることから F はある 2 階の楕円型偏微分方程式の解であることがわかりさらに $(0,0)$ の近傍上の関数

$$\sigma_F := \begin{cases} 0 & (H_F(0,0) = 0), \\ \dfrac{1}{H_F(0,0)} - \dfrac{|H_F(0,0)|}{H_F(0,0)}\sqrt{\dfrac{1}{H_F^2(0,0)} - (x^2+y^2)} & (H_F(0,0) \neq 0) \end{cases}$$

は同じ方程式の解であるので, 定理 6.2 を用いて F に対し 3 以上の整数 k_F および恒等的に零ではない 2 変数 k_F 次同次多項式 g_F が存在して $(0,0)$ の近傍上で $F = \sigma_F + g_F + o\big((x^2+y^2)^{k_F/2}\big)$ が成り立つことを示すことができる. さらにこの g_F を調べることによって, 臍点 p_0 は孤立していてかつその指数は $-1/2$ 以下であることがわかる.

7 Hartman-Wintner の定理の証明

定理 6.2 を証明するために, まず次の補題を必要とする:

補題 7.1 ([Ho, pp. 157]) Φ, D, f_0, f_1, U を定理 6.2 の中でのようなものとする. このとき $f_1 - f_0$ はある 2 階の線形楕円型偏微分方程式の解である.

さらに次の補題を必要とする:

補題 7.2 C_z, C_p, C_q, C_r, C_s, C_t は $\boldsymbol{R}^2$ における $(0,0)$ の近傍 U 上の滑らかな関数で, U 上 $C_rC_t - C_s^2/4 > 0$ が成り立つものとする. このとき U 上の局所座標系 (u,v) および滑らかな関数 A, B, C が存在して, f が U 上

$$C_z f + C_p \frac{\partial f}{\partial x} + C_q \frac{\partial f}{\partial y} + C_r \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + C_s \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C_t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

を満たす滑らかな関数であるならば f は U 上

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + A\frac{\partial f}{\partial u} + B\frac{\partial f}{\partial v} + Cf = 0$$

も満たす.

証明　U 上 $C_r > 0$ が成り立つと仮定してよい. U 上 $C_rC_t - C_s^2/4 > 0$ が成り立つことに注意することによって,

$$g := \left(\frac{C_t}{C_rC_t - C_s^2/4}\right)dx^2 + 2\left(\frac{(-C_s/2)}{C_rC_t - C_s^2/4}\right)dxdy + \left(\frac{C_r}{C_rC_t - C_s^2/4}\right)dy^2$$

が U 上の Riemann 計量であることがわかる. (u,v) をこの計量に関する等温座標系とする: (u,v) は U 上の局所座標系であり, U 上の滑らかな関数 λ が存在して $\lambda > 0$ および $g = \lambda(du^2 + dv^2)$ が成り立つ. Δ_g を g に関する U 上の Laplacian とする. このとき Δ_g は座標系 (x,y) の観点で次のように表される:

$$\Delta_g = C_r\frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_s\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_t\frac{\partial^2}{\partial y^2} + C'_p\frac{\partial}{\partial x} + C'_q\frac{\partial}{\partial y},$$

但し C'_p, C'_q は U 上の滑らかな関数である; Δ_g は座標系 (u,v) の観点で次のように表される:

$$\Delta_g = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right).$$

よって U 上

$$C_r\frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_s\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_t\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right) + A'\frac{\partial}{\partial u} + B'\frac{\partial}{\partial v}$$

を満たす滑らかな関数 A', B' が存在する. また U 上

$$C_p\frac{\partial}{\partial x} + C_q\frac{\partial}{\partial y} = A''\frac{\partial}{\partial u} + B''\frac{\partial}{\partial v}$$

を満たす滑らかな関数 A'', B'' が存在する. よって f が U 上

$$C_z f + C_p \frac{\partial f}{\partial x} + C_q \frac{\partial f}{\partial y} + C_r \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + C_s \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C_t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

を満たす滑らかな関数であるならば f は U 上

$$\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)+(A'+A'')\frac{\partial f}{\partial u}+(B'+B'')\frac{\partial f}{\partial v}+C_z f=0$$

も満たすことがわかる. そして

$$A:=\lambda(A'+A''),\qquad B:=\lambda(B'+B''),\qquad C:=\lambda C_z,$$

とおくことによって, 補題 7.2 を得る. □

補題 7.1 および補題 7.2 から, 定理 6.2 を証明するためには次の定理を証明すればよいことがわかる:

定理 7.3 ([HW1]) A, B, C および f は $\boldsymbol{R}^2$ における $(0,0)$ の近傍 U 上の滑らかな関数で, U 上

$$r_f+t_f+Ap_f+Bq_f+Cf=0 \tag{25}$$

が成り立つものとする. もし $f(0,0)=0$ が成り立ちかつ U における $(0,0)$ のいかなる近傍上においても $f\not\equiv 0$ が成り立つならば, f の $(0,0)$ での偏微分係数のうち零ではないものが存在する.

証明 z, w および W を次のようにおく:

$$z:=x+\sqrt{-1}y,\qquad w:=q_f+\sqrt{-1}p_f,\qquad W:=Ap_f+Bq_f+Cf.$$

D は $\mathbf{R}^2$ の有界領域で, $\overline{D}\subset U$ が成り立ちかつ D の境界は滑らかであるものとする. このとき (25) および Green の定理を用いて, 次を得る:

$$\int_{\partial D} w\,dz=\iint_D W\,dxdy.$$

さらに $\overline{D}$ を含む開集合上の滑らかな関数 g に対して, 次が成り立つ:

$$\int_{\partial D} gw\,dz=\iint_D gW\,dxdy+\sqrt{-1}\iint_D w\big(p_g+\sqrt{-1}q_g\big)dxdy. \tag{26}$$

正数 $r>0$ および点 $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ に対し, 次のようにおく:

$$D_r((x,y)):=\left\{(x',y')\in\mathbf{R}^2\mid (x'-x)^2+(y'-y)^2<r^2\right\}.$$

正数 R は $\overline{D_R((0,0))} \subset U$ を満たすものとする. (ξ,η) を $D_R((0,0)) \setminus \{(0,0)\}$ の一点とし, $\zeta := \xi + \sqrt{-1}\eta$ とおく. 正数 $\varepsilon > 0$ は $0 < \varepsilon < |\zeta|/2$ および $\varepsilon < R - |\zeta|$ を満たすものとする. (26) において, 次のようにおく:

$$D := D_R((0,0)) \setminus \left\{\overline{D_\varepsilon((0,0))} \cup \overline{D_\varepsilon((\xi,\eta))}\right\}, \qquad g := \frac{1}{z^k(z-\zeta)},$$

但し $k \in \mathbf{N}$ である. このとき $\overline{D}$ を含むある開集合上 g が正則であることに注意することによって,

$$\int_{\partial D} gw dz = \iint_D gW dxdy,$$

つまり

$$\int_{\partial D_R((0,0))} gw dz - \int_{\partial D_\varepsilon((0,0))} gw dz - \int_{\partial D_\varepsilon((\xi,\eta))} gw dz = \iint_D gW dxdy \tag{27}$$

を得る. w は連続であるので, Cauchy の積分公式を用いて(27) の左辺の第3項は $\varepsilon \to 0$ としたときに $-2\pi\sqrt{-1}w(\xi,\eta)/\zeta^k$ に収束することがわかる:

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial D_\varepsilon((\xi,\eta))} gw dz = -2\pi\sqrt{-1}\frac{w(\xi,\eta)}{\zeta^k}. \tag{28}$$

ここで「f の $(0,0)$ での全ての偏微分係数は零である」ことを仮定する. このとき(27) の左辺の第2項は $\varepsilon \to 0$ としたときに 0 に収束する:

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial D_\varepsilon((0,0))} gw dz = 0. \tag{29}$$

これは任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して成り立つ. (27), (28) および(29) から, 次を得る:

$$2\pi\sqrt{-1}\frac{w(\xi,\eta)}{\zeta^k} = \int_{\partial D_R((0,0))} gw dz - \iint_{D_R((0,0))} gW dxdy.$$

W の定義から, $D_R((0,0))$ 上 $|W| \leqq c_0(|w| + |f|)$ を満たす正数 $c_0 > 0$ が存在することがわかる. よって次を得る:

$$2\pi\left|\frac{w(\xi,\eta)}{\zeta^k}\right| \leqq \frac{1}{R^k}\int_{\partial D_R((0,0))}\left|\frac{w}{z-\zeta}\right||dz| + c_0\iint_{D_R((0,0))}\frac{|w|+|f|}{|z^k(z-\zeta)|}dxdy. \tag{30}$$

(30) の両辺を $D_R((0,0))$ 上 ζ について積分しまた

$$\iint_{D_R((0,0))}\frac{1}{|z-\zeta|}d\xi d\eta < 4\pi R$$

を用いることによって,

$$2\pi \iint_{D_R((0,0))} \left| \frac{w(\xi,\eta)}{\zeta^k} \right| d\xi d\eta \leqq \frac{4\pi}{R^{k-1}} \int_{\partial D_R((0,0))} |w||dz| + 4\pi c_0 R \iint_{D_R((0,0))} \frac{|w|+|f|}{|z^k|} dxdy,$$

つまり

$$\begin{aligned} &2\pi(1-2c_0R) \iint_{D_R((0,0))} \left| \frac{w}{z^k} \right| dxdy \\ &\qquad \leqq \frac{4\pi}{R^{k-1}} \int_{\partial D_R((0,0))} |w||dz| + 4\pi c_0 R \iint_{D_R((0,0))} \left| \frac{f}{z^k} \right| dxdy \end{aligned} \tag{31}$$

を得る. また $(x,y) \in D_R((0,0))$ に対し

$$f(x,y) = \int_0^1 (p_f(tx,ty)x + q_f(tx,ty)y)dt$$

が成り立つことに注意することによって, 次を得る:

$$|f(x,y)| \leqq \int_0^1 |zw(tx,ty)|dt. \tag{32}$$

以下においては, $k \geqq 3$ を仮定する. このとき(32) から, 次を得る:

$$\begin{aligned} \iint_{D_R((0,0))} \left| \frac{f}{z^k} \right| dxdy &\leqq \int_0^1 \left\{ \iint_{D_R((0,0))} \left| \frac{w(tx,ty)}{z^{k-1}} \right| dxdy \right\} dt \\ &= \int_0^1 t^{k-3} \left\{ \iint_{D_{tR}((0,0))} \left| \frac{w(x,y)}{z^{k-1}} \right| dxdy \right\} dt. \end{aligned} \tag{33}$$

もし $R < 1$ であるならば, (33) から次を得る:

$$\iint_{D_R((0,0))} \left| \frac{f}{z^k} \right| dxdy \leqq \iint_{D_R((0,0))} \left| \frac{w}{z^{k-1}} \right| dxdy \leqq \iint_{D_R((0,0))} \left| \frac{w}{z^k} \right| dxdy. \tag{34}$$

(31) および(34) を用いて, $k \geqq 3$ および $R \in (0,1)$ に対し次が成り立つことがわかる:

$$2\pi(1-4c_0R) \iint_{D_R((0,0))} \left| \frac{w}{z^k} \right| dxdy \leqq \frac{4\pi}{R^{k-1}} \int_{\partial D_R((0,0))} |w||dz|. \tag{35}$$

このとき $1-4c_0R > 0$ を仮定することができる. $w(x_0,y_0) \neq 0$ を満たす $D_R((0,0))$ の点 (x_0,y_0) が存在することを仮定する. このとき正数 $c_1 > 0$ が存在して, 任意の $k \geqq 3$ に対し(35) の左辺は $c_1 \big/ (x_0^2+y_0^2)^{k/2}$ より大きい. 一方で, 正数 $c_2 > 0$ が存在して, 任意の $k \geqq 3$ に対し(35) の右辺は c_2/R^k より小さい. このとき任意の $k \geqq 3$ に対し, 次を得る:

$$\frac{c_1}{c_2} \leqq \left(\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{R} \right)^k. \tag{36}$$

しかしながら(36)の右辺は $k \to \infty$ としたときに0に収束する．こうして矛盾が生じたので，$D_R((0,0))$ 上 $w \equiv 0$ が成り立つことがわかる．$f(0,0)=0$ であるので $D_R((0,0))$ 上 $f \equiv 0$ が成り立つことになるが，これは仮定に反する．よって f の $(0,0)$ での偏微分係数のうち零ではないものが存在することがわかる． □

参考文献

[Al] F. J. Almgren, Jr., Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem, Ann. of Math. **85** (1966) 277–292.

[An] N. Ando, An isolated umbilical point of a Willmore surface, to appear in Osaka J. Math.

[Ba] T. Banchoff, Triple points and surgery of immersed surfaces, Proc. Amer. Math. Soc. **46** (1974) 407–413.

[Bl] W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie III, Springer, Berlin, 1929.

[Br1] R. Bryant, A duality theorem for Willmore surfaces, J. Differential Geom. **20** (1984) 23–53.

[Br2] R. Bryant, Surfaces in conformal geometry, Proc. Symp. Pure Math. **48** (1988) 227–240.

[C1] B.-Y. Chen, On a theorem of Fenchel-Borsuk-Willmore-Chern-Lashof, Math. Ann. **194** (1971) 19–26.

[C2] B.-Y. Chen, On a variational problem on hypersurfaces, J. London Math. Soc. (2) **6** (1972/1973) 321–325.

[C3] B.-Y. Chen, An invariant of conformal mappings, Proc. Amer. Math. Soc. **40** (1973) 563–564.

[DHKW] U. Dierkes, S. Hildebrandt, A. Küster and O. Wohlrab, Minimal surfaces I, Grundl. math. Wiss. **295** Springer-Verlag 1992.

[HW1] P. Hartman and A. Wintner, On the local behavior of solutions of non-parabolic partial differential equations, Amer. J. Math. **75** (1953) 449–476.

[HW2] P. Hartman and A. Wintner, Umbilical points and W-surfaces, Amer. J. Math. **76** (1954) 502–508.

[HK] D. Hoffman and H. Karcher, Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature, Geometry V, 5–93, Encyclopaedia Math. Sci. **90** Springer, Berlin, 1997.

[HM] D. Hoffman and W. H. Meeks, III, Minimal surfaces based on the Catenoid, Amer. Math. Monthly **97** no. 8 Special Geometry Issue (Oct. 1990) 702–730.

[Ho] H. Hopf, Differential geometry in the large, Lecture Notes in Math. vol.1000, Springer-Verlag, Berlin-NewYork, 1989.

[J] F. John, Plane waves and spherical means applied to partial differential equations, Interscience Publishers, NewYork, 1955.

[K1] R. Kusner, Conformal geometry and complete minimal surfaces, Bull. Amer. Math. Soc. **17** (1987) 291–295.

[K2] R. Kusner, Comparison surfaces for the Willmore problem, Pacific J. Math. **138** (1989) 317–345.

[La] H. B. Lawson, Complete minimal surfaces in S^3, Ann. of Math. **92** (1970) 335–374.

[LY] P. Li and S.-T. Yau, A new conformal invariant and its application to the Willmore conjecture and first eigenvalues of compact surfaces, Invent. Math. **69** (1982) 269–291.

[O] R. Osserman, A survey of minimal surfaces, 2nd ed., Dover Publications, New York, 1986.

[Pe] I. G. Petrovskii, Sur l'analyticite des solutions des systemes d'equations differentielles, Matem. Sbornik (Recueil Mathematique) N.S. **5** (47), vol. 1 (1939) 3–70.

[Pi] U. Pinkall, Hopf tori in S^3, Invent. Math. **81** (1985) 379–386.

[S] R. Schoen, Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces, J. Differential Geom. **18** (1983) 791–809.

[We] J. L. Weiner, On a problem of Chen, Willmore et alia, Indiana University Math. J. **27** (1978) 19–35.

[Wh] J. H. White, A global invariant of conformal mappings in space, Proc. Amer. Math. Soc. **38** (1973) 162–164.

[Wi1] T. J. Willmore, Note on embedded surfaces, Ann. Sti. Univ. Iasi, Ia. Mat. (1965) 493–496.

[Wi2] T. J. Willmore, Mean curvature of immersed surfaces, Ann. Sti. Univ. Iasi, Ia. Mat. (1968) 99–103.

〒 860-8555 熊本市黒髪 2–39–1　熊本大学理学部

E-mail address: ando@math.sci.kumamoto-u.ac.jp