数理解析研究所講究録 1403 巻 2004 年 85-107

与えられた$Gauss$写像をもつ球面内の曲面

横浜市立大学　総合理学研究科　田中　亜矢子 (Ayako Tanaka)
Depertment of Mathematical Sciences,
Yokohama City University

1　はじめに

M を連結なリーマン面とし，Q_{n-1} を複素射影空間 CP^n における2次曲面とする．C^∞ 写像 $G: M \longrightarrow Q_{n-1}$ を与える．G を $Gauss$ 写像にもつ曲面が n 次元球面 S^n 内に存在するための G の大域的な条件について3節，4節で考察し，定理1－4の結果を得る．また，5節では曲面の $Gauss$ 写像 G と平均曲率ベクトル場 $H: M \longrightarrow R^{n+1}$ を用いて曲面が S^n 内に存在するための必要条件を求める．逆に，6節ではこれらの条件を満たす C^∞ 写像 G と H を与えた場合，これらを $Gauss$ 写像と平均曲率ベクトル場にもつ S^n 内の曲面が存在することを示す（定理5）．また，このような曲面 S を定義する写像 X は G と H を用いて具体的に表現できることを示す．

2　$Gauss$写像の定義

連結なリーマン面 M, n 次元単位球面 S^n, C^∞ 共形はめこみ $X: M \longrightarrow S^n$ の組 $S=(M, S^n, X)$ を S^n 内の曲面という．

$S=(M, S^n, X)$ を S^n 内の曲面とする．点 $m_0 \in M$ をとる．m_0 のまわりの複素座標近傍系 $(U, z=u_1+\sqrt{-1}u_2)$ をとり，U を連結とする．C^∞ 写像 $A: M \longrightarrow R^k$ に対し，

$$\begin{aligned} A_z &= \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial u_1} - \sqrt{-1}\frac{\partial A}{\partial u_2}\right), \\ A_{\bar{z}} &= \frac{\partial A}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial u_1} + \sqrt{-1}\frac{\partial A}{\partial u_2}\right) \end{aligned}$$

とおく．n 次元複素射影空間 CP^n の 2 次曲面 Q_{n-1} を

$$Q_{n-1} = \{[w] \in CP^n | {w_1}^2 + \cdots + {w_{n+1}}^2 = 0\}$$

と定義する．Q_{n-1} はグラスマン多様体

$$\tilde{G}(2, n+1) = SO(n+1)/SO(2) \times SO(n-1)$$

と微分同相である．

各 $u \in U$ に対し，$(n+1)$ 次元ユークリッド空間 R^{n+1} 内の平行移動により，接ベクトル

$$dX_u\left(\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)_u\right), \quad dX_u\left(\left(\frac{\partial}{\partial u_2}\right)_u\right)$$

と $X_{u_1}(u)$, $X_{u_2}(u)$ をそれぞれ同一視すると，$X(M)$ の各接平面を R^{n+1} において原点に平行移動した向き付けられた 2 次元平面に対応する Q_{n-1} の元が一意に定まる．曲面 S の $Gauss$ 写像を

$$G : M \longrightarrow Q_{n-1} \quad \left(u \longmapsto \left[\frac{\partial X}{\partial \bar{z}}(u)\right]\right)$$

と定義する．

各 $u \in M$ に対し，$G(u)$ に対応する R^{n+1} の原点を通る向き付けられた 2 次元平面を $\hat{G}(u)$ とし，

$$P(M, G) = \bigcup_{u \in M} \hat{G}(u)$$

とおく．$P(M, G)$ を含む R^{n+1} 内の最小次元の線形部分空間を V とし，その次元を k とすると $2 \leq k \leq n+1$ となる．R^{n+1} における V の直交補空間を $V^\perp$ とおく．R^{n+1} 内の全ての m 次元標構からなる $Stiefel$ 多様体を $St(n+1, m)$ であらわす．$(n+1)$ 次元複素空間 C^{n+1} の標準的なエルミート内積を $<,>$ であらわす．I_k を k 次単位行列とする．

3 S^n内の曲面と$Gauss$写像の関係

曲面$S = (M, S^n, X)$ $(n \geq 3)$ を与える．点$m_0 \in M$のまわりの複素座標近傍系を(U, z)とする．曲面Sの$Gauss$写像を$G : M \longrightarrow Q_{n-1}$とすると，

$$E_i : U \longrightarrow R^{n+1} \setminus \{0\} \quad (i = 1, 2)$$

を次が成り立つようにとれる．

1. U上で$G(z) = [(E_1 + \sqrt{-1}E_2)(z)]$である．
2. $E^T(u) := (E_1(u), E_2(u))$が$\hat{G}(u)$の正規直交標構である．
3. $E^T(u)$は$\hat{G}(u)$に向き付けを与える．

各$u \in U$に対し，$E(u) := (E^T(u), E^N(u)) = (E_1(u), E_2(u), E_3(u), \cdots, E_{n+1}(u))$が$R^{n+1}$内における正の向きの正規直交標構となるようにとる．C^∞写像

$${}^t\Psi : U \longrightarrow C^2 \setminus \{0\} \quad \left(z \longmapsto \left(\psi_1(z), -\sqrt{-1}\psi_1(z)\right)\right)$$

を用いて

$$X_z = E^T \Psi$$

と表せる．このとき，$\langle X_z, X \rangle = 0$が成り立ち，$C^\infty$写像$A : U \longrightarrow R^{n-1}$を用いて

$$X = E^N A$$

と表せる．このとき，

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial E^N}{\partial z} A + E^N \frac{\partial A}{\partial z} = E^T \Psi$$

より，${}^tE^N E^T = 0$と${}^tE^N E^N = I_{n-1}$を用いて

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -{}^tE^N \frac{\partial E^N}{\partial z} A \tag{1}$$

を得る．

U 上で

$$\mathrm{Im}\left\{\frac{\partial\, {}^tE^N}{\partial\bar z}\frac{\partial E^N}{\partial z}+{}^tE^N\frac{\partial E^N}{\partial z}\frac{\partial\, {}^tE^N}{\partial\bar z}E^N\right\}=0$$

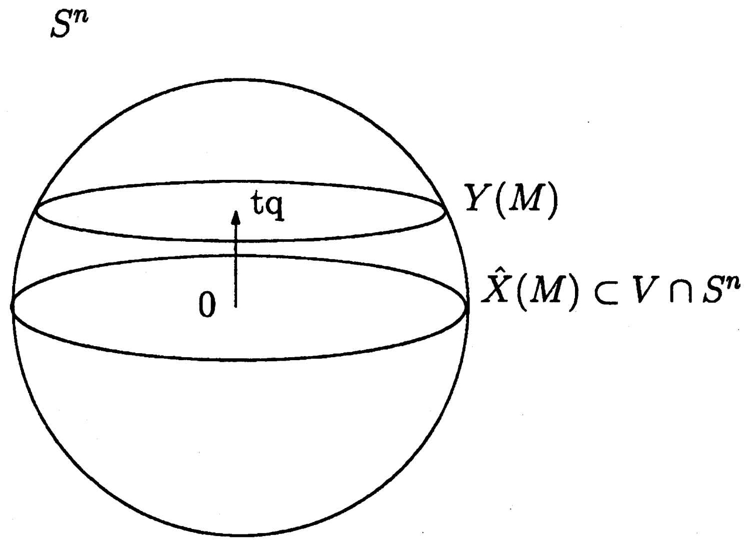
が成り立つと仮定する．このとき，U を単連結とし十分小さくとり，$m_0\in U$ において初期値 $A(m_0)=\xi\neq 0$ を与えれば，偏微分方程式 (1) の解 $A:U\longrightarrow R^{n-1}\,(C^\infty)$ は一意に存在する．

補題 1. ([4]) M を連結なリーマン面とし，曲面 $S=(M,S^n,X)$ の $Gauss$ 写像を $G:M\longrightarrow Q_{n-1}$ とする．$3\le k\le n$ ならば，以下が成り立つ．

(1) G を $Gauss$ 写像にもち，$\hat X(M)\subset V\cap S^n$ を満たす S^n 内の曲面 $\hat S=(M,S^n,\hat X)$ が存在する．
(2) 曲面 $S_Y=(M,S^n,Y)$ の $Gauss$ 写像が G であるならば，Y は $Y=c\hat X+tq$ とあらわせる．ここに，c と t は

$$c=\pm\sqrt{1-t^2},\quad |t|<1$$

を満たす定数で，$q\in V^\perp\cap S^n$ である．



補題 2. ([4]) M,G と $S=(M,S^n,X)$ を補題 1 の通りとする．曲面 $S_Y=(M,S^n,Y)$ の $Gauss$ 写像が G であるとする．このとき，$k=n+1$ ならば，$Y=\pm X$ である．

4 与えられた写像を$Gauss$写像にもつ S^n内の曲面

Mを連結なリーマン面とし，C^∞写像$G: M \longrightarrow Q_{n-1}$ $(n \geq 3)$ を与える．点$m_0 \in M$をとる．m_0のまわりの複素座標近傍系$(U, z = u_1 + \sqrt{-1}u_2)$ をとり，Uは連結とする．Uを十分小さくとれば，C^∞写像

$$E_i : U \longrightarrow R^{n+1} \setminus \{0\} \quad (i = 1, 2)$$

を各$u \in U$に対し次を満たすようにとれる．

1. $E^T(u) := (E_1(u), E_2(u))$が$\hat{G}(u)$の正規直交標構である．
2. $E^T(u)$は$\hat{G}(u)$に向き付けを与える．

$E(u) := (E^T(u), E^N(u)) = (E_1(u), E_2(u), E_3(u), \cdots, E_{n+1}(u))$を$R^{n+1}$内における正の向きの正規直交標構となるようにとる．

Mが$Gauss$平面Cのとき次の定理を得る．$z = u_1 + \sqrt{-1}u_2$をC上の標準的な座標関数とする．

定理 1. ([4]) C^∞写像$G: C \longrightarrow Q_{n-1}$ $(n \geq 3)$ を与える．$k \geq 3$とする．さらにC上の任意の点z_0に対し，z_0の連結な開近傍U_0が存在し，C^∞写像

$$\begin{aligned} E^T &= (E_1, E_2) : U_0 \longrightarrow St(n+1, 2), \\ E^N &= (E_3, \cdots, E_{n+1}) : U_0 \longrightarrow St(n+1, n-1) \end{aligned}$$

で定義される写像$E = (E^T, E^N) : U_0 \longrightarrow SO(n+1)$が以下の条件を満たすと仮定する：

(i) 各点$u \in U_0$において$E^T(u)$は$\hat{G}(u)$の向き付けを与える正規直交標構である．

(ii) U_0上で

$$\mathrm{Im}\left\{\frac{\partial\, {}^tE^N}{\partial \bar{z}}\frac{\partial E^N}{\partial z} + {}^tE^N\frac{\partial E^N}{\partial z}\frac{\partial\, {}^tE^N}{\partial \bar{z}}E^N\right\} = 0$$

が成り立つ．

(iii) U_0 上で

$$(I_{n+1} - E^{Nt}E^N)\frac{\partial E^N}{\partial u_j} \neq 0 \quad (j = 1, 2)$$

が成り立つ．U_0 上で，

$$B := \frac{\partial^t E^N}{\partial z}\Big(I_{n+1} - E^{Nt}E^N\Big)\frac{\partial E^N}{\partial z}$$

とおくとき，z_0 において ${}^t\xi B(z_0)\xi = 0$ となる $\xi \in R^{n-1} \setminus \{0\}$ が存在する．

(iv) U_0 上で

$$\frac{\partial^t E^N}{\partial z}E^N B + B^t E^N\frac{\partial E^N}{\partial z} - \frac{\partial B}{\partial z} = 0$$

が成り立つ．

このとき，G を *Gauss* 写像にもつ曲面 $S = (C, S^n, X)$ が存在する．

条件 (i)-(iv) は正規直交標構 $E = (E^T, E^N)$ の取り方に依らない．また，条件 (i)-(iv) を満たす具体的な G が存在する．

G を *Gauss* 写像にもつ S^n 内の曲面の局所的な存在を次の補題で示す．

補題 3. M を連結なリーマン面とし，C^∞ 写像 $G : M \longrightarrow Q_{n-1}$ ($n \geq 3$) を与える．$k \geq 3$ とする．点 $m_0 \in M$ をとる．m_0 のまわりの複素座標近傍系 (U_0, z) をとり，U_0 は連結とする．U_0 上で C^∞ 写像 $E = (E^T, E^N) : U_0 \longrightarrow SO(n+1)$ が定理 1 の条件 (i)-(iv) を満たすとする．このとき，m_0 の単連結な開近傍 U が存在し，$G|_U$ を *Gauss* 写像にもつ曲面 $S = (U, S^n, X)$ が存在する．

(証明) m_0 のまわりの複素座標近傍系 $(U, z = u_1 + \sqrt{-1}u_2)$ をとり，$U(\subset U_0)$ は単連結とする．仮定 (ii) と (iii) から，U を十分小さくとれば，点 $m_0 \in U$ において

$${}^tA(m_0)B(m_0)A(m_0) = 0$$

を満たす $A(m_0) = \xi \neq 0$ を初期値とする微分方程式 (1) の解 $A : U \longrightarrow R^{n-1}$ (C^∞) が一意に求まる．A を用いて C^∞ 写像 $Y : U \longrightarrow R^{n-1}$ を $Y = E^N A$ と定義する．このとき，

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = (I_{n+1} - E^{N\,t}E^N)\frac{\partial E^N}{\partial z}A$$

となり，

$$\left\langle \frac{\partial Y}{\partial z}, \frac{\partial Y}{\partial \bar{z}} \right\rangle = {}^tA\frac{\partial^t E^N}{\partial z}\left(I_{n+1} - E^{N\,t}E^N\right)\frac{\partial E^N}{\partial z}A = {}^tABA$$

を得る．これは仮定 (iv) より一定なので，A の初期値の与え方から恒等的に 0 である．よって C^∞ 写像 Y は共形はめこみである．また，${}^tE^N E^N = I_{n-1}$ を用いると

$${}^tE^N\frac{\partial Y}{\partial z} = {}^tE^N(I_{n+1} - E^{N\,t}E^N)\frac{\partial E^N}{\partial z}A = 0$$

となり，Y の *Gauss* 写像は $G|_U$ である．さらに

$$\begin{aligned}\left\langle Y, \frac{\partial Y}{\partial z} \right\rangle &= \left\langle E^N A, (I_{n+1} - E^{N\,t}E^N)\frac{\partial E^N}{\partial z}A \right\rangle \\ &= {}^tA\frac{\partial^t E^N}{\partial z}(I_{n+1} - E^{N\,t}E^N)E^N A \\ &= 0\end{aligned}$$

を得る．このことから U が連結なので Y の長さは U 上で一定である．C^∞ 共形はめこみ $X : U \longrightarrow S^n$ を

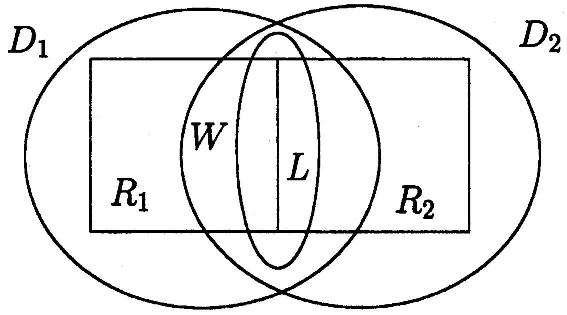
$$X = \frac{1}{|Y|}Y$$

と定義すれば曲面 $S = (U, S^n, X)$ の *Gauss* 写像は $G|_U$ である．

与えられた写像を *Gauss* 写像にもつ S^n 内における曲面の大域的な存在を示す．

R_1, R_2 を C 上の閉長方形，D_1, D_2 を C 上の連結な開集合とし，これらは次を満たすとする．

(1) $R = R_1 \cup R_2$ が閉長方形である.
(2) $L = R_1 \cap R_2$ が閉線分である.
(3) $R_j \subset D_j \quad (j = 1, 2)$
(4) $L \subset D_1 \cap D_2$
(5) W は L を含む $D_1 \cap D_2$ の連結成分である.
(6) $G|_{D_j}$ $(j = 1, 2)$ を $Gauss$ 写像にもつ曲面 $S_j = (D_j, S^n, \Psi_j)$ が存在する.



この条件下で次の補題を得る.

補題 4. $k = n + 1$ のとき, $G|_R$ を $Gauss$ 写像にもつ曲面 $S_R = (R, S^n, \Psi_R)$ が存在する.

(証明) $k = n + 1$ のとき, 補題2から W 上で $\Psi_1 = \pm\Psi_2$ を得る. C^∞ 写像 $\Psi_R : R \longrightarrow S^n$ は以下で定義できる.

(1) $\Psi_1 = \Psi_2$ のとき $\Psi_R|_{D_j} = \Psi_j \quad (j = 1, 2)$.
(2) $\Psi_1 = -\Psi_2$ のとき $\Psi_R|_{D_1} = \Psi_1, \quad \Psi_R|_{D_2} = -\Psi_2$.

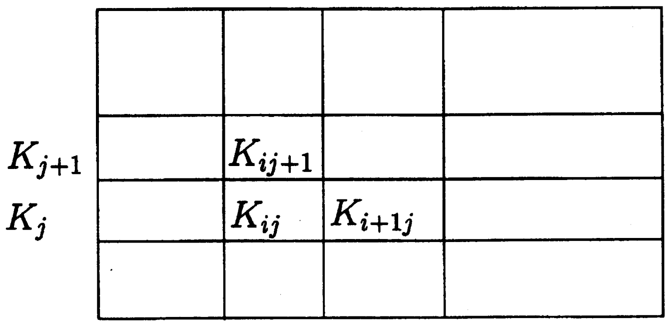
この Ψ_R で定義される曲面 $S_R = (R, S^n, \Psi_R)$ の $Gauss$ 写像は $G|_R$ である.

補題4において S_R は R を含む連結な開集合で定義されている.

補題 5. K を C 上の閉長方形とする. 定理1の仮定の下, $k = n+1$ のとき, $G|_K$ を $Gauss$ 写像にもつ曲面 $S_K = (K, S^n, \Psi_K)$ が存在する.

(証明) K を以下のように $p \times q$ 個の閉長方形 K_{ij} $(1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq q)$ に分割する.

(1) $K_{ij} \cup K_{ij+1}$ と $K_{ij} \cup K_{i+1j}$ が閉長方形である.
(2) $K_{ij} \cap K_{ij+1}$ と $K_{ij} \cap K_{i+1j}$ が閉線分である.
(3) $K_j := \bigcup_{i=1}^{p} K_{ij}$ が閉長方形である.
(4) $K_j \cup K_{j+1}$ が閉長方形で，$K_j \cap K_{j+1}$ が閉線分である.
(5) $K = \bigcup K_{ij}$ である.



K_{ij} を十分小さくとれば，補題3より単連結な開集合 $D_{ij} \supset K_{ij}$ が存在し，$G|_{D_{ij}}$ を $Gauss$ 写像にもつ曲面 $S_{ij} = (D_{ij}, S^n, \Psi_{ij})$ が存在する．よって補題4より K の分割の仕方から $G|_{K_{11} \cup K_{21}}$ を $Gauss$ 写像にもつ曲面 $S_{K_{11} \cup K_{21}} = (K_{11} \cup K_{21}, S^n, \Psi_{K_{11} \cup K_{21}})$ が存在することがわかる．同様の議論が閉長方形 $K_{11} \cup K_{21}$ と K_{31} に対しても成り立ち，これを繰り返すと $G|_{K_1}$ を $Gauss$ 写像にもつ曲面 $S_1 = (K_1, S^n, \Psi_{K_1})$ が存在することが導かれる．同様のことが K_j で成り立つ．$K_1 \cup K_2$ が閉長方形で，$K_1 \cap K_2$ が閉線分なので，補題4より $G|_{K_1 \cup K_2}$ を $Gauss$ 写像にもつ曲面 $\hat{S} = (K_1 \cup K_2, S^n, \Psi_{K_1 \cup K_2})$ が存在することが分かる．同様の議論を繰り返すことにより $G|_K$ を $Gauss$ 写像にもつ曲面 $S_K = (K, S^n, \Psi_K)$ が存在することが分かる.

補題5より次を得る.

補題 6. 定理1の仮定の下，$k = n + 1$ のとき，G を $Gauss$ 写像にもつ曲面 $S = (C, S^n, X)$ が存在する.

(証明) C 上の閉長方形 K_j で構成される列 $\{K_j\}$ を次を満たすようにとる;

$$C = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j, \quad K_j \subset \mathrm{Int} K_{j+1} \subset K_{j+1}.$$

各 K_j において $G|_{K_j}$ を $Gauss$ 写像とする曲面 $S_{K_j} = (K_j, S^n, X_j)$ が存在する. K_1 上では $X_1 = \pm X_2$ なので C^∞ 共形はめこみ $\hat{X}_2 : K_1 \longrightarrow S^n$ を次のように定義する.

(1) K_1 上で $X_1 = X_2$ のとき $\hat{X}_2|_{K_j} = X_j \quad (j = 1, 2)$.
(2) K_1 上で $X_1 = -X_2$ のとき $\hat{X}_2|_{K_1} = X_1$, $\hat{X}_2|_{K_2 \setminus K_1} = -X_2$.

この $\hat{X}_2$ で定義される曲面 $\hat{S}_2 = (K_2, S^n, \hat{X}_2)$ の $Gauss$ 写像は $G|_{K_2}$ である.

帰納法より, 各 j に対し $G|_{K_j}$ を $Gauss$ 写像とする曲面 $\hat{S}_j = (K_j, S^n, \hat{X}_j)$ が存在し,

$$\hat{X}_{j+1}|_{K_j} = \hat{X}_j \quad (j = 1, 2, \cdots)$$

を満たすことが分かる. よって曲面 $S = (C, S^n, X)$ を

$$X|_{K_j} = \hat{X}_j \quad (j = 1, 2, \cdots)$$

で定義できる. S の $Gauss$ 写像は G である.

補題 7. 定理1の仮定の下, $3 \leq k \leq n$ のとき, G を $Gauss$ 写像にもつ曲面 $S = (C, V \cap S^n, X)$ が存在する.

(証明) 点 $z_0 \in C$ をとる. 補題3より, z_0 の単連結な開近傍 U を十分小さくとれば, $G|_U$ を $Gauss$ 写像にもつ曲面 $S_0 = (U, S^n, \Psi_0)$ が存在する. $3 \leq k \leq n$ より, 補題1（1）から $\Psi_1(U) \subset V \cap S^n$ を満たす C^∞ 共形はめこみ Ψ_1 が存在し, $G|_U$ を $Gauss$ 写像にもち, Ψ_1 で定義される曲面 $S_1 = (U, S^n, \Psi_1)$ が存在する. $\dim V = k$ より, $k = n+1$ の場合と同様の議論を $(k-1)$ 次元単位球面 $V \cap S^n$ ですれば, $V \cap S^n$ 内に G を $Gauss$ 写像にもつ曲面 $S = (C, V \cap S^n, X)$ が存在することが分かる.

以上の補題から定理1が示される．定理1から次の系を得る．

系 8. Gを定理1の通りとする．Gが定理1の仮定を満たし，$B=0$のとき，Gを*Gauss*写像に持つS^n内の曲面が存在し，$3 \leq k \leq n$である．

リーマン球面S^2に対し，次の定理が成り立つ．

定理 2. 定理1でCをS^2とし，Gについて定理1と同じ仮定をする．このときGを*Gauss*写像にもつ曲面$S=(S^2, S^n, X)$が存在する．

(証明)　$S^2 = U_1 \cup U_2$となり，$U_1 \cap U_2$が連結であるCと微分同相なS^2の開集合$U_j\,(j=1,2)$をとる．定理1より$G|_{U_j}\,(j=1,2)$を*Gauss*写像にもつ曲面$S_j=(U_j, S^n, \Psi_j)$が存在する．

$k=n+1$のとき，$U_1 \cap U_2$が連結なので補題2より$U_1 \cap U_2$上で

$$\Psi_1 = \pm \Psi_2$$

である．$\Psi_1 = \Psi_2$の場合はC^∞共形はめこみ$X : S^2 \longrightarrow S^n$を

$$X|_{U_j} = \Psi_j \quad (j=1,2)$$

と定義でき，$\Psi_1 = -\Psi_2$の場合は

$$X|_{U_1} = \Psi_1, \quad X|_{U_2} = -\Psi_2$$

と定義できる．以上より，$k=n+1$のときGを*Gauss*写像にもつ曲面$S=(S^2, S^n, X)$の存在が示された．

$3 \leq k \leq n$のとき，同様の論法を$(k-1)$次元単位球面$V \cap S^n$に対して用いてGを*Gauss*写像にもつ曲面$S=(S^2, S^n, X)$の存在が示すことができる．

複素トーラスT^2に対し，以下の定理を得る．

定理 3. C^∞写像$G : T^2 \longrightarrow Q_{n-1}\ (n \geq 3)$を与える．$k \geq 3$とする．さらに$C$上の任意の点$z_0$に対し，$z_0$の複素座標近傍$(U, z)$が存

在し，C^∞ 写像

$$\begin{aligned} E^T &= (E_1, E_2) : U_0 \longrightarrow St(n+1, 2), \\ E^N &= (E_3, \cdots, E_{n+1}) : U_0 \longrightarrow St(n+1, n-1) \end{aligned}$$

で定義される写像 $E = (E^T, E^N) : U_0 \longrightarrow SO(n+1)$ が定理 1 おける条件 (i)-(iv) を満たすと仮定する．このとき，T^2 上の被覆空間 $(\hat{T}^2, T^2, \hat{\pi})$ と $G \circ \hat{\pi}$ を $Gauss$ 写像にもつ曲面 $S = (\hat{T}^2, S^n, X)$ が存在する．

全ての自然数の集合を N, 全ての整数の集合を Z とする．Γ を平行移動

$$\varphi_1(z) = z + a_1, \quad \varphi_2(z) = z + a_2$$
$$(z \in C,\ a_1, a_2 \in C \setminus \{0\},\ a_1 \neq s a_2,\ s \in R \setminus \{0\})$$

により生成される $T^2 = C/\Gamma$ を満たす C 上の被覆変換群とする．$k_1, k_2 \in N$ に対し，$\Gamma(k_1 a_1, k_2 a_2)$ を ${\varphi_1}^{k_1}$ と ${\varphi_2}^{k_2}$ で生成される $\Gamma(a_1, a_2)$ の部分群とする．$\Gamma = \Gamma(a_1, a_2)$ である．複素トーラス $C/\Gamma(k_1 a_1, k_2 a_2)$ を $T^2(k_1 a_1, k_2 a_2)$ と表す．$z \in C$ に対し，

$$z = (t_1 + l_1) k_1 a_1 + (t_2 + l_2) k_2 a_2, \quad 0 \leq t_1,\ t_2 < 1$$

を満たす $l_1,\ l_2 \in Z$ が存在する．射影 $\pi_{k_1 k_2} : C \longrightarrow T^2(k_1 a_1, k_2 a_2)$ を

$$\pi_{k_1 k_2}(z) = \pi_{k_1 k_2}((t_1 + l_1) k_1 a_1 + (t_2 + l_2) k_2 a_2) = t_1 k_1 a_1 + t_2 k_2 a_2$$

で定義する．$[z] = \pi_{k_1 k_2}(z)$ $(z \in C)$ とおく．

$k_1,\ k_2 \in N$ に対し，C^∞ 写像 $\tilde{\pi}_{k_1 k_2} : T^2(k_1 a_1, k_2 a_2) \longrightarrow T^2(a_1, a_2)$ と $G_{k_1 k_2} : T^2(k_1 a_1, k_2 a_2) \longrightarrow Q_{n-1}$ を

$$\tilde{\pi}_{k_1 k_2}([z]) = \pi_{11}(z) \quad (z \in C), \quad G_{k_1 k_2} = G \circ \tilde{\pi}_{k_1 k_2}$$

でそれぞれ定義する．Γ 不変な C^∞ 写像

$$\tilde{G} : C \longrightarrow Q_{n-1} \quad (z \longmapsto G \circ \pi_{11}(z))$$

を得る．G の仮定から $\tilde{G}$ は定理 1 の仮定を満たすので $\tilde{G}$ を $Gauss$ 写像にもつ曲面 $\tilde{S}_1 = (C, S^n, \tilde{X}_1)$ を得る．C^∞ 共形はめこみ $\tilde{X}_j : C \longrightarrow S^n\,(j = 2, 3)$ を $\tilde{X}_2 = \tilde{X}_1 \circ \varphi_1$, $\tilde{X}_3 = \tilde{X}_1 \circ \varphi_2$ で定義し，$\tilde{S}_j = (C, S^n, \tilde{X}_j)$ を $\tilde{G}$ を $Gauss$ 写像にもつ曲面とする．

$k = n + 1$ とする．$\tilde{S}_1$, $\tilde{S}_2$, $\tilde{S}_3$ は同じ $Gauss$ 写像 $\tilde{G}$ を持つので、補題 2 より

$$\tilde{X}_1 = \pm \tilde{X}_1 \circ \varphi_1 = \pm \tilde{X}_1 \circ \varphi_2$$

となる．次の 4 つの場合が生じる：
(1) $\tilde{X}_1 = \tilde{X}_1 \circ \varphi_1 = \tilde{X}_1 \circ \varphi_2$, (2) $\tilde{X}_1 = -\tilde{X}_1 \circ \varphi_1 = \tilde{X}_1 \circ \varphi_2$, (3) $\tilde{X}_1 = \tilde{X}_1 \circ \varphi_1 = -\tilde{X}_1 \circ \varphi_2$, (4) $\tilde{X}_1 = -\tilde{X}_1 \circ \varphi_1 = -\tilde{X}_1 \circ \varphi_2$.

Case (1): $\varphi \in \Gamma$ に対し，$\tilde{X}_1 = \tilde{X}_1 \circ \varphi$ となる．C^∞ 共形はめこみ $X : T^2 \longrightarrow S^n$ を

$$X([z]) = \tilde{X}_1(z) \quad (z \in C)$$

で定義する．よって，G を $Gauss$ 写像にもつ曲面 $S = (T^2, S^n, X)$ を得る．

Case (2): C^∞ 共形はめこみ $\tilde{X}_4 : C \longrightarrow S^n$ を $\tilde{X}_4 = \tilde{X}_1 \circ {\varphi_1}^2$ で定義する．曲面 S_1 と $\tilde{S}_4 = (C, S^n, \tilde{X}_4)$ は同じ $Gauss$ 写像をもつので，補題 2 より $\tilde{X}_1 = \pm \tilde{X}_1 \circ {\varphi_1}^2$ となる．よって，次の 2 つの場合がある：
(i) $\tilde{X}_1 = \tilde{X}_1 \circ {\varphi_1}^2$, (ii) $\tilde{X}_1 = -\tilde{X}_1 \circ {\varphi_1}^2$.

Case (i): C^∞ 共形はめこみ $X_{21} : T^2(2a_1, a_2) \longrightarrow S^n$ を

$$X_{21}([z]) = \tilde{X}_1(z) \quad (z \in C)$$

で定義すると，曲面 $S_{21} = (T^2(2a_1, a_2), S^n, X_{21})$ が存在し，$Gauss$ 写像は G_{21} である．

Case (ii): $-\tilde{X}_1 \circ {\varphi_1}^2 = \tilde{X}_1 = -\tilde{X}_1 \circ \varphi_1$ より，

$$\tilde{X}_1 = \tilde{X}_1 \circ \varphi_1 = \tilde{X}_1 \circ \varphi_2$$

となる．これは (1) の場合と同じである。

以上より，(2) が成り立つとき，T^2 の被覆空間 $(\hat{T}^2, T^2, \hat{\pi})$ と $G \circ \hat{\pi}$ を $Gauss$ 写像とする曲面 $S = (\hat{T}^2, S^n, X)$ が存在する．ただし，$\hat{T}^2$ は複素トーラス T^2 または $T^2(2a_1, a_2)$ である．

Case (3): 上と同様の議論を用いると，$\hat{T}^2$ は T^2 または $T^2(a_1, 2a_2)$ で Case (2) と同様の結果を得る．

Case (4): $\hat{T}^2$ は T^2, $T^2(2a_1, a_2)$, $T^2(a_1, 2a_2), T^2(2a_1, 2a_2)$ のいずれかで Case(2) と同様の結果を得る．

$3 \leq k \leq n$ のとき，補題 7 と同様の論法を用いることにより T^2 上の被覆空間 $(\hat{T}^2, T^2, \hat{\pi})$ と $G \circ \hat{\pi}$ を $Gauss$ 写像とする曲面 $S = (\hat{T}^2, V \cap S^n, X)$ が存在することが示せる．

RP^n を n 次元実射影空間とする．

定理 4. M をリーマン面とし，C^∞ 写像 $G : M \longrightarrow Q_{n-1}$ $(n \geq 3)$ を与える．$k \geq 3$ とする．さらに C 上の任意の点 z_0 に対し，z_0 の複素座標近傍 (U, z) が存在し，C^∞ 写像

$$
\begin{aligned}
E^T &= (E_1, E_2) : U_0 \longrightarrow St(n+1, 2), \\
E^N &= (E_3, \cdots, E_{n+1}) : U_0 \longrightarrow St(n+1, n-1)
\end{aligned}
$$

で定義される写像 $E = (E^T, E^N) : U_0 \longrightarrow SO(n+1)$ が定理 1 おける条件 (i)-(iv) を満たすと仮定する．このとき，曲面 $S = (M, RP^n, X)$ が存在し，S の各点の近傍が G を $Gauss$ 写像にもつ S^n 内の曲面によりおおわれる．

（証明）　$\pi : S^n \longrightarrow RP^n$ を自然な射影とする．補題 3 より，各 $m_0 \in M$ に対し，m_0 のまわりの単連結な開近傍 U_0 が存在し，$G|_{U_0}$ を $Gauss$ 写像にもつ曲面 $\hat{S}_0 = (U_0, S^n, \hat{\Psi}_0)$ が存在する．$\Psi_0 = \pi \circ \hat{\Psi}_0$ とし，曲面 $S_0 = (U_0, RP^n, \Psi_0)$ を定義すると，S_0 は定理 4 の結果の性質を満たす．

$\hat{S}_1 = (U_1, S^n, \hat{\Psi}_1)$ と $\hat{S}_2 = (U_2, S^n, \hat{\Psi}_2)$ を上記の性質を満たす曲面とする．$\Psi_1 = \pi \circ \hat{\Psi}_1$, $\Psi_2 = \pi \circ \hat{\Psi}_2$ とし，曲面 $S_1 = (U_1, RP^n, \Psi_1)$, $S_2 = (U_2, RP^n, \Psi_2)$ を得る．$W = U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ とすると，定理の結果の性

質を満たす

$$\Psi_3|_{U_j} = \Psi_j \quad (j = 1, 2)$$

で定義される曲面 $S_3 = (U_3, RP^n, \Psi_3)$ $(U_3 = U_1 \cup U_2)$ が存在することを示す.

$U_3 = U_1 \cup U_2$, $W = U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ とする. 補題2より W の連結成分 W_0 上で

$$\hat{\Psi}_1|_{W_0} = \pm\hat{\Psi}_2|_{W_0}$$

が成り立つ. よって C^∞ 共形はめこみ $\Psi_3 : U_3 \longrightarrow RP^n$ を

$$\Psi_3|_{U_j} = \Psi_j \quad (j = 1, 2)$$

で定義でき, S_3 は定理の結果の性質を満たす曲面である.

M はコンパクトとする. 補題3より M 上の各点のまわりの単連結な開近傍 U が存在し, 定理の結果の性質を満たす曲面 $S_U = (U, RP^n, \Psi)$ が存在する. M はコンパクトなので, この様な有限個の単連結開近傍 $U_1, \cdots, U_s$ で M を覆うことができる. 前述の論法を用いると, 定理の結果の性質を満たす曲面 $S = (M, RP^n, X)$ を得る.

M がコンパクトでないとき, $\bar{K}_j$ がコンパクトで

$$M = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j, \quad \bar{K}_j \subset K_{j+1}$$

を満たす連結な M の開集合の列 $\{K_j\}$ を選ぶことができる. 各 j に対し, 定理の結果の性質を満たし,

$$\Psi_{j+1}|_{K_j} = \Psi_j \quad (j = 1, 2, \cdots)$$

となる曲面 $S_j = (\bar{K}_j, RP^n, \Psi_j)$ が存在する. よって

$$X|_{K_j} = \Psi_j \quad (j = 1, 2 \cdots)$$

で定義される曲面 $S = (M, RP^n, X)$ が得られ、これは定理の結果の性質を満たす.

$3 \leq k \leq n$ のとき，補題7と同じ論法を用いて $(k-1)$ 次元単位球面 $V \cap S^n$ に対し上述の議論をすれば，曲面 $S = (M, RP^n, X)$ が存在し，S の各点の近傍が G を $Gauss$ 写像にもつ $V \cap S^n$ 内の曲面によりおおわれることが示される．

5 S^n内の曲面の$Gauss$写像と平均曲率ベクトル場

S^n 内の曲面の $Gauss$ 写像と平均曲率場の間で成り立つ関係について示す．$\Psi \in C^m$ のノルム $|\Psi|$ を $|\Psi|^2 = <\Psi, \Psi>$ で定義する．曲面 $S = (M, S^n, X)$ が与えられたとき，C^∞ 写像 $X : M \longrightarrow S^n$ が共形はめこみなので，M の複素座標近傍系 $(U, z = u_1 + \sqrt{-1}u_2)$ (U は連結) をとれば，U 上で

$$\left|\frac{\partial X}{\partial u_1}\right|^2 = \left|\frac{\partial X}{\partial u_2}\right|^2 = \lambda^2, \quad \lambda > 0$$

が成り立つ．$\tilde{H}$ を曲面 S の R^{n+1} での平均曲率ベクトル場とすると，

$$\frac{4}{\lambda^2}\frac{\partial^2 X}{\partial z \partial \bar{z}} = 2\tilde{H}$$

が成り立つ．U を十分小さくとれば，$X_z = \psi\Phi$ を満たす C^∞ 写像

$$\Phi : U \longrightarrow C^{n+1} \setminus \{0\}, \quad \psi : U \longrightarrow C \setminus \{0\}$$

が存在する．$Gauss$ 写像の定義より $\Phi = \left(\varphi_1, \cdots, \varphi_{n+1}\right)$ は U 上で

$$\sum_{k=1}^{n+1} (\varphi_k)^2 = 0$$

を満たす．

$$\eta = \frac{<\Phi_{\bar{z}}, \Phi>}{|\Phi|^2}, \quad V = \Phi_{\bar{z}} - \eta\Phi \tag{2}$$

とおく．ここで

$$|\Phi|^2 \bar{\psi} \tilde{H} = V, \quad (\log \psi)_{\bar{z}} = -\eta \tag{3}$$

が成り立つ．S が S^n 内の曲面であることから，U 上の任意の z に対し $V(z) \neq 0$ なので，ある C^∞ 関数 $\theta : U \longrightarrow R$ が存在し，

$$\begin{aligned} V(z) &= e^{i\theta(z)}R(z), \quad V(z) \neq 0, \quad R(z) \in R^{n+1} \quad (z \in U), \qquad (4) \\ \theta_{z\bar{z}} &= \mathrm{Im}\{\eta_z\} \qquad (5) \end{aligned}$$

を満たす．

H_0 を曲面 S の S^n での平均曲率ベクトル場とする．R^{n+1} における平行移動により $H_0(z) = \Big(X(z), H(z)\Big)$ $(z \in M)$ を満たす C^∞ 写像 $H : M \longrightarrow R^{n+1}$ と H_0 を同一視する．よって

$$H = \tilde{H} + X, \quad < H, \Phi >= 0 \qquad (6)$$

を得る．このことと (3) より

$$X = H - \frac{\bar{\psi}^{-1}}{|\Phi|^2}V \qquad (7)$$

が成り立つ．$|X| = 1$ と $< H, X >= 0$ より

$$|\psi| = \frac{|V|}{|\Phi|^2\sqrt{1+|H|^2}} \qquad (8)$$

を得る．よって

$$\psi = \frac{|V|}{|\Phi|^2\sqrt{1+|H|^2}}e^{-i\alpha}$$

と表せる．以上のことより G と H の間には次の関係が成り立つ．

$$\begin{aligned} < H, \Phi_{\bar{z}} > &= \frac{|V||H|^2e^{-i\alpha}}{\sqrt{1+|H|^2}}, \qquad (9) \\ i\alpha_z &= 2(\log|\Phi|)_z + \frac{1}{2}\Big(\log(1+|H|^2)\Big)_z \\ &\quad -(\log|V|)_z - \bar{\eta}, \qquad (10) \\ e^{i\alpha}H_z &= \frac{\sqrt{1+|H|^2}}{|V|}(V_z - 2(\log|\Phi|)_z V + \bar{\eta}V) \\ &\quad + \frac{|V|}{|\Phi|^2\sqrt{1+|H|^2}}\Phi. \qquad (11) \end{aligned}$$

6 曲面の存在定理

M を連結なリーマン面とし，

$$G : M \longrightarrow Q_{n-1}\ (n \geq 3), \quad H : M \longrightarrow R^{n+1}$$

を C^∞ 写像とする．G は M 上の複素座標近傍系 (U, z) で C^∞ 写像 $\Phi : U \longrightarrow C^{n+1} \setminus \{0\}$ を用いて

$$G(p) = [\bar{\Phi}(p)], \quad p \in U$$

と表せる．C^∞ 写像 $\eta : U \longrightarrow C$ と $V : U \longrightarrow C^{n+1}$ を

$$\eta = \frac{< \Phi_{\bar{z}}, \Phi >}{|\Phi|^2}, \quad V = \Phi_{\bar{z}} - \eta\Phi$$

で定義する．以下の条件について考察する．

$$\begin{aligned}
V &= e^{i\theta}R, \quad V(z) \neq 0, \quad R(z) \in R^{n+1} \quad (z \in U), && (12)\\
\theta_{z\bar{z}} &= \mathrm{Im}\{\eta_z\}, && (13)\\
< H, \Phi > &= 0, && (14)\\
< H, \Phi_{\bar{z}} > &= \frac{|V||H|^2 e^{-i\theta}}{\sqrt{1+|H|^2}}, && (15)\\
i\theta_z &= 2(\log|\Phi|)_z + \frac{1}{2}\Big(\log(1+|H|^2)\Big)_z \\
&\quad -(\log|V|)_z - \bar{\eta}, && (16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{i\theta}H_z &= \frac{\sqrt{1+|H|^2}}{|V|}\Big(V_z - 2(\log|\Phi|)_z V + \bar{\eta}V\Big) \\
&\quad + \frac{|V|}{|\Phi|^2\sqrt{1+|H|^2}}\Phi. && (17)
\end{aligned}$$

これらの条件は5節の (4),(5),(6),(9),(10),(11) に対応している．異なる M 上の複素座標近傍系 $(\hat{U}, w)$ をとる．$U \cap \hat{U} \neq \emptyset$ ならば U 上で (12)-(17) の条件が成り立つとき，$U \cap \hat{U}$ 上で $\hat{U}$ 上で定義される $\hat{\Phi}$, $\hat{\eta}$, $\hat{V}$, $\hat{\theta}$ に対し同様の条件が成り立つ．U と $\hat{U}$ が連結で G と H が実解析的とする．このとき条件 (12)-(17) が U 上で成り立ち，$U \cap \hat{U} \neq \emptyset$ ならば，

同様のことが $\hat{U}$ 上でも成り立つ．よって，M が連結なので，M 上のすべての複素座標近傍で同様のことが成り立つ．

曲面 $S=(M,S^n,X)$ の $Gauss$ 写像 G と平均曲率ベクトル場 H はどのような複素座標近傍でも条件 (12)-(17) を満たしている．逆に，M 上のすべての点の複素座標近傍上で条件 (12)-(17) を満たす C^∞ 写像 $G: M \longrightarrow Q_{n-1}$ と $H: M \longrightarrow R^{n+1}$ を与えると，$Gauss$ 写像は G であり，平均曲率ベクトル場は H となる曲面 $S=(M,S^n,X)$ が存在する．このことは以下の補題により証明される．

補題 9. (U,z) を U が連結な M 上の複素座標近傍系とする．U 上で G と H が条件 (12)-(17) を満たしているとする．C^∞ 写像 $\psi: U \longrightarrow C\setminus\{0\}$ が U 上で

$$\psi=\frac{|V|}{|\Phi|^2\sqrt{1+|H|^2}}e^{-i\alpha}, \qquad \alpha\equiv\theta \mod 2\pi \tag{18}$$

とすると偏微分方程式 $X_z=\psi\Phi$ の解 X は U 上で

$$X=H-\frac{\bar{\psi}^{-1}}{|\Phi|^2}V, \quad |X|=1$$

となる．

(証明) $\psi=\rho e^{-i\alpha}$ $(\rho>0)$ とおく．ψ は (3) を満たすので

$$(\log\rho)_z+i\alpha_z=-\bar{\eta}$$

である．微分方程式 $X_z=\psi\Phi$ の積分可能条件は $\mathrm{Im}\{\psi\Phi\}_{\bar{z}}=0$ で，これは

$$\theta-\alpha\equiv 0 \mod \pi$$

と同値である．よって，$\alpha_z=\theta_z$ を得る．これと (6) より

$$(\log\rho)_z=\left(\log\frac{|V|}{|\Phi|^2\sqrt{1+|H|^2}}\right)_z$$

を得る．仮定より

$$\rho=\frac{|V|}{|\Phi|^2\sqrt{1+|H|^2}}$$

である．(6) と (7) より

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial z} &= \psi\Phi \\ &= \frac{|V|}{|\Phi|^2\sqrt{1+|H|^2}}e^{-i\alpha}\Phi \\ &= \epsilon H_z - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\sqrt{1+|H|^2}e^{-i\alpha}}{|V|}V\right) \quad (\epsilon \pm 1)\end{aligned}$$

となるので，U 上で

$$X = \left(\epsilon H - \frac{\sqrt{1+|H|^2}e^{-i\alpha}}{|V|}V\right) + A_0 = \left(\epsilon H - \frac{\bar{\psi}^{-1}}{|\Phi|^2}V\right) + A_0$$

と表せる．ただし，$A_0 \in R^{n+1}$ である．U 上で $\epsilon = 1$, $A_0 = 0$ となる点を初期値に与えれば

$$X = H - \frac{\bar{\psi}^{-1}}{|\Phi|^2}V$$

である．ここに，

$$\psi = \frac{|V|e^{-i\alpha}}{|\Phi|^2\sqrt{1+|H|^2}}, \qquad \alpha \equiv \theta \mod 2\pi$$

とする．また，

$$< H, V > = < H, \Phi_{\bar{z}} - \eta\Phi > = < H, \Phi_{\bar{z}} >$$

と $\alpha \equiv \theta \bmod 2\pi$ を用いると $|X| = 1$ が導かれる．

補題 9 で得た X は M 上で大域的であることは容易に分かる．

補題 10. $S_1 = (M, S^n, X)$ と $S_2 = (M, S^n, Y)$ を S^n 上の異なる曲面とする．S_1 と S_2 が同じ *Gauss* 写像をもつと仮定すると

$$Y = cX + X_0$$

が成り立つ．ここに，c は 0 でない定数で，$X_0 \in R^{n+1}$ は定ベクトルであり

$$c = -X \cdot X_0 + \epsilon\sqrt{(X \cdot X_0)^2 + 1 - |X_0|^2}, \quad \epsilon = \pm 1$$

を満たす．さらに，以下のことが成り立つ．

(1)$X\cdot X_0$ と $Y\cdot X_0$ は M 上で一定である．

(2)$X_0=0$ ならば $Y=-X$ である．

(3)$X_0\neq 0$ ならば

$$X(M)\subset S^{n-1}_{r_1}\left(\frac{X\cdot X_0}{|X_0|^2}X_0\right),\quad Y(M)\subset S^{n-1}_{r_2}\left(\frac{Y\cdot X_0}{|X_0|^2}X_0\right)$$

で $|c|r_1=r_2$ を満たす．ここに，

$$r_1=\sqrt{1-\left(\frac{X\cdot X_0}{|X_0|}\right)^2},\quad r_2=\sqrt{1-\left(\frac{Y\cdot X_0}{|X_0|}\right)^2}$$

である．

補題 11. 補題 10 の仮定の下で，C^∞ 写像 $H_1:M\longrightarrow R^{n+1}$ と $H_2:M\longrightarrow R^{n+1}$ をそれぞれ S_1 と S_2 の平均曲率ベクトル場とする．このとき，局所的に

$$H_2=cH_1+\frac{(1-c^2)\bar{\psi}^{-1}}{c|\Phi|^2}V+X_0$$

が成り立つ．

(証明) 補題 9, 10 より

$$Y=cX+X_0=c\left(H_1-\frac{\bar{\psi}^{-1}}{|\Phi|^2}V\right)+X_0$$

である．また，

$$\frac{\partial Y}{\partial z}=c\frac{\partial X}{\partial z}=c\psi\Phi,\quad c\neq 0$$

より，

$$Y=H_2-\frac{\bar{\psi}^{-1}}{c|\Phi|^2}V$$

である．よって

$$H_2=cH_1+\frac{(1-c^2)\bar{\psi}^{-1}}{c|\Phi|^2}V+X_0$$

を得る．

補題11を用いて以下を得る．

補題 12. 曲面$S_1=(M,S^n,X)$と$S_2=(M,S^n,Y)$が同じ*Gauss*写像$G:M\longrightarrow Q_{n-1}$と平均曲率ベクトル場$H:M\longrightarrow R^{n+1}$をもつと仮定する．このとき，以下の結果を得る．

(1)$H\neq 0$のとき，$Y=X$である．

(2)$H=0$のとき，$Y=\pm X$である．

(証明) 補題11で$H=H_1=H_2$とおけばよい．

以上の補題を用いて次の定理を得る．

定理 5. **([3])** Mをリーマン面とし，C^∞写像

$$G:M\longrightarrow Q_{n-1}\ (n\geq 3),\quad H:M\longrightarrow R^{n+1}$$

を与える．GとHがM上のすべての点の複素座標近傍上で条件(12)-(17)を満たすと仮定する．このとき，*Gauss*写像がGであり，平均曲率ベクトル場がHである曲面$S=(M,S^n,X)$が存在する．

注意 定理5のGは局所的にC^∞写像$\Phi:U\longrightarrow C^{n+1}\setminus\{0\}$を用いて$G=[\bar{\Phi}]$と表せる．ここに，$U$は$M$上の複素座標近傍とする．$V$を(2)で与える．定理5で得た曲面を与える$C^\infty$共形はめこみ$X:M\longrightarrow S^n$は補題9の(18)で与えられる$\psi$を用いて

$$X=H-\frac{\bar{\psi}^{-1}}{|\Phi|^2}V$$

と表せる．

参考文献

[1] D. A. Hoffman, R. Osserman, The Gauss map of surfaces in R^n, J. Differential Geom. 18 (1983) 733-754.

[2] A. Tanaka, An Existence Theorem for a Surface in S^n with a given map as its Gauss map, Preprint.

[3] A. Tanaka, Surfaces in S^n with prescribed Gauss map and mean curvature vector, Preprint.

[4] A. Tanaka, Surfaces in S^n with prescribed Gauss map, Preprint.