数理解析研究所講究録 1407 巻 2004 年 63-70

On P. Hall's Relations in Finite groups II

Yugen Takegahara

(竹ヶ原 裕元)

Muroran Institute of Technology
(室蘭工業大学)

G を有限群とし, $|G|$ を G の位数とする. G の自己同形 θ について, θ^n は G の恒等写像 ι_G であるとする. このとき, G の部分集合

$$L_n(G,\theta)=\{x\in G \mid x\cdot x^{\theta}\cdot x^{\theta^2}\cdots x^{\theta^{n-1}}=1\}$$

を考える. P. Hall は [9, Theorem 1.6] で述べられている次の定理を証明した.

Hall の定理 $\sharp L_n(G,\theta)\equiv 0 \bmod \gcd(n,|G|)$

G の任意の部分集合 S に対して $L_n(S)=\{x\in S \mid x^n=1\}$ と置く. Hall の定理において $\theta=\iota_G$ の場合, 次の Frobenius の定理 ([6, Section 2, II]) が成り立つ.

Frobenius の定理 $\sharp L_n(G)\equiv 0 \bmod \gcd(n,|G|)$

この報告では, Hall の定理の証明, Hall の定理の一般化, そして Frobenius 予想の一般化等に関する最近の結果を述べる.

1 Hall の定理の証明

文献 [5] において Brauer は Frobenius の定理を証明しているが, そこでの考え方は Hall の定理の証明にも応用できる. この節ではこのことに関連して淺井恒信氏, 千吉良直紀氏, 庭崎隆氏との共同研究で得られた結果を紹介する.

以後, 有限群 A が G に作用しているとし, AG をその作用によって作られる半直積とする. このとき

$$\mathrm{Z}(A,G)=\{B\le AG \mid BG=AG, B\cap G=\{1\}\}$$

と置く. これは AG のなかで G の補部分群全体がつくる集合である. $\mathrm{Z}(A,G)$ と A から G への斜準同形全体がつくる集合との間に 1 対 1 の対応がある.

C_n を元 c で生成される位数 n の巡回群とし, C_n の G への作用を $x^c=x^{\theta}$, $x\in G$, により定める. このとき $\mathrm{Z}(C_n,G)=\{\langle cx\rangle \mid x\in G, (cx)^n=1\}$ であるが, 任意の $x\in G$ について $x\cdot x^{\theta}\cdot x^{\theta^2}\cdots x^{\theta^{n-1}}=x\cdot x^c\cdot x^{c^2}\cdots x^{c^{n-1}}=(xc^{-1})^n$ だから, $\sharp L_n(G,\theta)=\sharp\mathrm{Z}(C_n,G)$ が成り立つ. よって Hall の定理は次のようにいいかえられる.

定理 1.1 $\sharp\mathrm{Z}(C_n, G) \equiv 0 \bmod (n, |G|)$

これまで Hall の定理はより一般化された主張の特別な場合として示されていたが, 最近, Frobenius の定理の証明に用いられた Brauer の方法が定理 1.1 の証明にも応用されることがわかった. 新たに得られた方法を次の命題として述べる.

命題 1.2 これまでの記号のもとで, H を G の部分群とし, 任意の $D \in \mathrm{Z}(A, G)$ と任意の D 不変な H の部分群 F について, $\sharp\mathrm{Z}(D, F) \equiv 0 \bmod |F|$ が成り立つとする. このとき $\sharp\mathrm{Z}(A, G) \equiv 0 \bmod |H|$ が成り立つ.

素数 p と自然数 m に対して m_p を m を割り切る最大の p のべきとする.

定理 1.1 において n および $|G|$ がどちらもある素数 p のべきである場合は [4, Proposition 3.3] で述べられている. (文献 [4] におけるその証明は簡明である.) この場合に定理 1.1 が成り立つと仮定して, 一般の場合に命題 1.2 を用いて定理 1.1 を証明しよう.

定理 1.1 の証明. p を任意の素数とし, H を位数 $\gcd(n, |G|)_p$ の G の部分群とする. $\sharp\mathrm{Z}(A, G) \equiv 0 \bmod |H|$ を示せばよい. $D \in \mathrm{Z}(A, G)$ とし, F を D 不変な H の部分群とする. さらに D は元 d で生成されるとし, $n = n_p r$, ただし $\gcd(p, r) = 1$, とする. このとき $\langle d^r \rangle$ と F は p 群で, $|F|$ は $n_p = |\langle d^r \rangle|$ を割り切るので, [4, Proposition 3.3] より $\sharp\mathrm{Z}(\langle d^r \rangle, F) = |F|$ である. すなわち, 任意の $y \in F$ について $(d^r y)^{n_p} = 1$ が成り立つ. これより, 任意の $x \in F$ に対して $(dx)^n = 1$ であり, $\sharp\mathrm{Z}(D, F) = |F|$ が成り立つ. よって, 命題 1.2 より $\sharp\mathrm{Z}(A, G) \equiv 0 \bmod |H|$ を得る. □

文献 [5] において Brauer は次のことを証明している.

Brauer の補題 L を群, M を L の有限位数の正規部分群とする. また σ は任意の L の元, α は任意の M の元とする. このとき $\sigma^{|M|}$ と $(\sigma\alpha)^{|M|}$ は L のなかで共役である.

Brauer の補題は定理 1.1 において $|G|$ が n を割り切る場合の主張を導く. (このことを上記の定理 1.1 の証明に用いることもできる.)

A' を A の交換子群とする. 命題 1.2 を応用して得られる結果を 1 つ述べる.

定理 1.3 任意の素数 p, A/A' の p シロー部分群と同形な任意の有限アーベル p 群 C, そして C が作用する任意の有限 p 群 H に対して, $\sharp\mathrm{Z}(C, H) \equiv 0 \bmod \gcd(|C|, |H|)$ が成り立つとする. このとき $\sharp\mathrm{Z}(A, G) \equiv 0 \bmod \gcd(|A/A'|, |G|)$ が成り立つ.

次の予想は [4] で述べられた.

予想 1 $\sharp\mathrm{Z}(A, G) \equiv 0 \bmod \gcd(|A/A'|, |G|)$

定理 1.3 より, 予想 1 は A が有限アーベル p 群, G が有限 p 群の場合に帰着する.

2 Hall の定理の一般化

$\mathrm{Hom}(A, G)$ を A から G への準同形全体がつくる集合とする. 文献 [15] において次に述べる Frobenius の定理の一般化が示されている.

吉田の定理 A がアーベル群ならば $\sharp\mathrm{Hom}(A, G) \equiv 0 \bmod \gcd(|A|, |G|)$ が成り立つ.

吉田の定理より A が G に自明に作用するアーベル群である場合に予想 1 は正しい.

p を素数とする. 一般に予想 1 が正しいことを証明するには, 有限アーベル p 群 C が有限 p 群 H に作用するとき $\sharp\mathrm{Z}(C, H) \equiv 0 \bmod \gcd(|C|, |H|)$ が成り立つことを示せばよい (定理 1.3). C_{p^u} で位数 p^u の巡回群を表す. 最近, 次の結果が得られた.

定理 2.1 位数 p^u, $u \geq 2$, の巡回群と位数 p^2 の巡回群の直積 $C = C_{p^u} \times C_{p^2}$ が有限 p 群 H に作用するとき, $\sharp\mathrm{Z}(C, H) \equiv 0 \bmod \gcd(|C|, |H|)$ が成り立つ.

ここで, 次の命題を補足しておく.

命題 2.2 (淺井) C を有限アーベル p 群, N を基本アーベル p 群とする. C が作用する任意の有限 p 群 H について $\sharp\mathrm{Z}(C, H) \equiv 0 \bmod \gcd(|C|, |H|)$ が成り立つならば, $C \times N$ が作用する任意の有限 p 群 H について $\sharp\mathrm{Z}(C \times N, H) \equiv 0 \bmod \gcd(|C \times N|, |H|)$ が成り立つ.

定理 1.3, 2.1, 命題 2.2, [4, Proposition 3.3] より, 次に述べる Hall の定理の一般化が得られる.

定理 2.3 任意の素数 p について, A/A' の p シロー部分群の型 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$, ただし $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r \geq 0$, が $\lambda_2 \leq 2$, $\lambda_3 \leq 1$ を満たすとする. このとき $\sharp\mathrm{Z}(A, G) \equiv 0 \bmod \gcd(|A/A'|, |G|)$ が成り立つ.

系 2.4 定理 2.3 の仮定のもとで $\sharp\mathrm{Hom}(A, G) \equiv 0 \bmod \gcd(|A/A'|, |G|)$ が成り立つ.

系 2.4 の特別な場合は [2, 3] で証明されている. 有限群から n 次対称群 S_n への準同形の個数に関しては, 次のことが成り立つ (結果の 1 部は [14] で示された).

定理 2.5 A/A' の p シロー部分群と 2 つの巡回 p 群の直積 $C_{p^u} \times C_{p^v}$ が同形であるとする. さらに u, v は $u > v > 2$, または $u \geq v$ かつ $2 \geq v$ を満たすと仮定する. このとき $\sharp\mathrm{Hom}(A, S_n) \equiv 0 \bmod \gcd(p^{u+v}, n!)$ が成り立つ.

定理 2.1, 2.5 から予想 1 より弱い次の予想の解決が期待できる.

予想 2 A/A' が 2 つの巡回群の直積ならば $\sharp\mathrm{Z}(A, G) \equiv 0 \bmod \gcd(|A/A'|, |G|)$ が成り立つ.

3 Exceptional p 群

p を素数とする. 有限 p 群 H が exceptional であるとは, H が巡回群であるか, $p=2$ のとき, 2 面体群, 4 元数形の 2 群, 準 2 面体群のいずれかであることをいう. (位数 4 の基本アーベル 2 群も exceptional としておく.)

村井正文氏は, [11, Theorem A], [3, Theorem 7.2] 等を用いて, [12, Theorem 2.8] で述べられている次の定理を証明した.

定理 3.1 H は有限 p 群であるとし, C は H に作用する位数 p^u の巡回群であるとする. $|H| \geq p^{u+1}$ かつ $\sharp \mathrm{Z}(C,H) \not\equiv 0 \bmod p^{u+1}$ であるならば, H は exceptional である.

定理 3.1 は定理 2.1 の証明において重要な役割を果たしている. exceptional p 群に関連する結果をあと 2 つ紹介する. 次の定理は [1, Theorem 7.3] で述べられている.

定理 3.2 2 つの巡回 p 群の直積 C が exceptional p 群 H に作用するとする. このとき $\sharp \mathrm{Z}(C,H) \equiv 0 \bmod \gcd(|C|,|H|)$ が成り立つ.

この定理からも, 予想 2 の肯定的な解決が期待できる.

有限 p 群 H と自然数 u について, $\Omega_u(H) = \langle x \in H \mid x^{p^u} = 1 \rangle$ と置く.

生成元 a,b,c と関係式 $a^2=b^2=c^2=1, cab=abc=bca$ で定義される群

$$H_{16} = \langle a,b,c \mid a^2=b^2=c^2=1,\ cab=abc=bca \rangle$$

を考える. これは位数 16 の群である. H_{16} は exceptional 極大部分群として 3 つの 2 面体群と 1 つの 4 元数形の 2 群をもつが, どの H_{16} における位数 2 の元もいずれかの exceptional 極大部分群に含まれる. さて, 次の定理が成り立つ.

定理 3.3 exceptional でない有限 p 群 H が exceptional 極大部分群をもつとする. $|H| > p^3$ かつ H と H_{16} が同形でなければ, 次の条件を満たす H の元 y が存在する:

(1) $y^p = 1$;

(2) $\Omega_1(Z(H))\langle y \rangle$ は H の特性部分群であって, 位数 p^2 の基本アーベル群である;

(3) どの H の exceptional 極大部分群も y を含まない.

ここで $Z(H)$ は H の中心である.

定理 2.1 は上記の定理 3.1, 3.2, 3.3 を用いて証明される. その論法は文献 [3] における $p>2$ の場合の証明とほぼ同様である.

4 Frobenius 予想の一般化

八牧宏美氏と飯寄信保氏により最終的に証明された Frobenius 予想 (定理 4.8 参照) を Hall の定理に関連する形で一般化する試みについて述べる.

始めに, [3, 12] で考えられた事項を述べる. $C_2(G) = [G, G]$, $C_i(G) = [C_{i-1}(G), G]$, $i \geq 3$, と置く. 次の定理は P. Hall により示された [8, §3].

定理 4.1 G の任意の元 x, y と任意の自然数 n について

$$x^n y^n = (xy)^n c_2^{e_2} \cdots c_n^{e_n}$$

を満たす $c_i \in C_i(G)$, $2 \leq i \leq n$, が存在する. ここで $e_i = n(n-1)\cdots(n-i+1)/i!$ である.

以後, u を自然数とする. 次の定理 4.1 の系は [12, Corollary 2.2] で述べられている.

系 4.2 有限 p 群 H について $\exp C_2(H) \leq p^{u-1}$ かつ $|C_2(H)| \leq p^u$ であるとき, $\exp \Omega_u(H) \leq p^u$ が成り立つ.

さて P を有限 p 群, θ を位数が p^u を割り切る P の自己同形, そして C を元 c で生成される位数 p^u の巡回群とする. さらに C の P への作用を $x^c = x^\theta$, $x \in P$, により定め, CP をその作用によって作られる半直積とする. 前述のように $\sharp Z(C, P) = \sharp L_{p^u}(P, \theta)$ が成り立つ. $C_1(CP) = P$ と置くと, $C_1(CP) \geq C_2(CP) \geq C_3(CP) \geq \cdots$ であり, $i \geq 1$ かつ $C_i(CP) \neq \{1\}$ ならば $C_i(CP) \gneq C_{i+1}(CP)$ が成り立つ. さて $|C_{j+1}(CP)| \leq p^{u-1}$ となる最小の整数を j とするとき,

$$Q(CP) = Q_u(CP) = \begin{cases} \Omega_u(C_j(CP)) & j \geq 1 \text{ のとき}, \\ P & j = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

と P の C 不変正規部分群を定める. 定義から

$$|Q(CP)| \geq \gcd(p^u, |P|), \qquad |[Q(CP), CP]| \leq p^{u-1}$$

が成り立つ. 次の補題は [12, Lemma 2.3(b)] で述べられた.

補題 4.3 (1) $\exp Q(CP) \leq p^u$. (2) $Q(CP) \subseteq L_{p^u}(P, \theta)$.

証明の概略. (1) は系 4.2 から導かれる. (2) を示す. $C_2(CQ(CP)) \leq [Q(CP), CP]$ だから, (1) と系 4.2 より, $\exp CQ(CP) = p^u$ である. よって, 任意の $Q(CP)$ の元 x について $(xc^{-1})^{p^u} = 1$ が成り立ち, $Q(CP) \subseteq L_{p^u}(P, \theta)$ が得られる. □

さらに [12, Proposition 2.4] より $\sharp L_{p^u}(P, \theta) \equiv 0 \bmod |Q(CP)|$ であることもわかるが, この結果は定理 1.1 において n および G がどちらもある素数 p のべきである場合の主張を導く.

以後 H を有限群, θ を H の自己同形とする. 以下に述べる3つの定理は村井正文氏との共同研究 ([12]) で得られた. 次の定理は [12, Theorem 5.1] で述べられている.

定理 4.4 θ を位数が p^u を割り切る H の自己同形とし, $\sharp L_{p^u}(H,\theta)=\gcd(p^u,|H|)$ が成り立つとする. このとき $L_{p^u}(H,\theta)$ は H の部分群である.

証明の概略. $u\geq 1$ としてよい. $C=\langle\theta\rangle$ と置き, J を C を含む CH の p シロー部分群とする. さらに $P=J\cap H$ と置く. このとき P は C 不変な H の p シロー部分群であり, 補題 4.3 より $Q_u(CP)\subseteq L_{p^u}(H,\theta)$ が成り立つ. これより主張が得られる. □

たとえば, 4 元数群 Q の自己同形群を S_4 とみなすとき, 奇置換が引き起こす自己同形 θ について $L_4(Q,\theta)$ は位数 4 の巡回群である.

k を $C_k(H)=C_{k+1}(H)$ をみたす最小の自然数とし, $C_\infty(H)=C_k(H)$ と置く. 次の [12, Theorem 5.2] で述べられている定理は [7, Theorem 9.4.1] の一般化となっている.

定理 4.5 H が可解群であるとする. θ を位数が $n/\gcd(n,|C_\infty(H)|)$ を割り切る H の自己同形とし, $\sharp L_n(H,\theta)=\gcd(n,|H|)$ が成り立つとする. このとき $L_n(H,\theta)$ は H の部分群である.

村井正文氏は, 定理 4.5 において H がべき零群である場合を示す際に, 定理 4.4 および次の [12, Theorem 1.3] で述べられている定理を用いた.

定理 4.6 θ を位数が n を割り切る H の自己同形とする. $\gcd(n,|H|)$ が素数 p で割り切れ, $\sharp L_n(H,\theta)$ が $\gcd(pn,|H|)$ で割り切れなければ, H の p シロー部分群は位数が n を割り切る p のべきより大きい exceptional p 群である.

系 4.7 θ を位数が n を割り切る H の自己同形とし, $\sharp L_n(H,\theta)=\gcd(n,|H|)$ が成り立つとする. 素数 p が $\gcd(n,|H|)$ と $|H|/\gcd(n,|H|)$ を割り切るならば, H の p シロー部分群は exceptional である.

ここで, 八牧宏美氏と飯寄信保氏によって得られた定理とその系を述べておく.

定理 4.8 (Frobenius 予想, [10]) $\sharp L_n(H)=\gcd(n,|H|)$ が成り立つならば $L_n(H)$ は H の特性部分群である.

$Z(H)$ を H の中心とする. 定理 4.8 は次の系を導く.

系 4.9 $Z(H)=\{1\}$ とする. a を H の元とし, γ_a を a による H の内部自己同形とする. γ_a の位数が n を割り切り, $\sharp L_n(H,\gamma_a)=\gcd(n,|H|)$ が成り立つならば, $L_n(H,\gamma_a)$ は H の部分群である.

<u>証明の概略.</u> 仮定から $a^n=1$ となるので, $x \in L_n(H,\gamma_a) \iff xa^{-1} \in L_n(H)$ が成り立つ. よって $\sharp L_n(H,\gamma_a)=\sharp L_n(H)$ となり, 定理 4.8 から $L_n(H)$ は H の部分群である. このとき $L_n(H)=L_n(H)a=L_n(H,\gamma_a)$ が導かれ, 主張が得られる. □

さて定理 4.8 の一般化を目指して考えた予想を述べよう.

予想 3 θ を位数が $n/\gcd(n,|C_\infty(H)|)$ を割り切る H の自己同形とする. 任意の自然数 m について, F が H の θ^m 不変真部分群であって H の極小 θ^m 不変正規部分群を含むならば, θ^m は F の恒等写像を引き起こすとする. このとき, $\sharp L_n(H,\theta)=\gcd(n,|H|)$ が成り立つならば, $L_n(H,\theta)$ は H の部分群である.

もう少しすっきりとした予想にできるとよいのだが, 難しさは次の定理のように予想を H が単純群の場合に帰着させる点にある.

定理 4.10 H を予想 3 の反例になる群のなかで位数が最小であるものとする. このとき H は非可換な単純群である. さらに素数 p が $\gcd(n,|H|)$ と $|H|/\gcd(n,|H|)$ を割り切るならば, H の p シロー部分群は exceptional である.

θ を H の自己同形とするとき, $\theta^{n/\gcd(n,|H|)}=\iota_H$ かつ $\sharp L_n(H,\theta)=\gcd(n,|H|)$ となっているための必要十分条件は, ある自然数 d,e が存在して条件

$$(*) \qquad e \mid |H|, \quad \gcd(d,|H|/e)=1, \quad \theta^d=\iota_H, \quad \sharp L_{de}(H,\theta)=e$$

が成り立つことである. ここで $Z(H)=\{1\}$ とし, H を H の内部自己同形群と同一視する. このとき, 上記の条件 $(*)$ は, $\theta^s \in H$ となる最小の自然数 s に関して, 条件

$$(**) \qquad \gcd(s,|H|/e)=1, \quad \sharp L_{se}(\theta H)=e$$

を導く. さて H を n 次交代群 A_n とし, n 次対称群 S_n を A_n の自己同形群の部分群と考える. この場合に条件 $(**)$ のもとで得られる結果を述べる.

定理 4.11 θ を A_n の自己同形とし, $|\langle\theta\rangle A_n : A_n|=2$ する. $|A_n|$ の約数でありかつ $|A_n|_2$ の倍数である自然数 e について, $\sharp L_{2e}(\theta A_n)=e$ となっているならば $e=|A_n|$ かつ $L_{2e}(\theta A_n)=\theta A_n$ が成り立つ.

定理 4.11 において $n \geq 2$, $\theta \in S_n$ である場合の証明の方針を述べておく. (それは [13, Theorem 13] の証明の方針とほぼ同様である.) まず θA_n は奇置換全体の集合であり, $\sharp L_{2e}(\theta A_n)=\sharp L_{2e}(A_n,(1\ 2))$ となる. ここで $(1\ 2)$ は互換を表す. また, $p<n$ を満たす素数 p について, A_n の p シロー部分群は巡回群ではない. よって 系 4.7 より, 奇素数 p が e を割り切るならば, $(n!)_p$ が e を割り切ることがわかる. さらに, 奇素数 p が $p \leq n$ をみたすとき, $e>|A_n|/|A_n|_p$ が成り立つことを示すことができ, p は e を割り切ることがわかる. 結局 $e=n!/2$ となり定理 4.11 の主張を得る.

以上でこの報告を終えますが, 最後に, 講演の機会を与えてくださった飯寄信保氏に御礼申し上げます.

参考文献

[1] T. Asai, T. Niwasaki, and Y. Takegahara, Crossed homomorphisms from rank-2 abelian to exceptional p-groups, *J. Algebra* **270** (2003), 212–237.

[2] T. Asai and Y. Takegahara, On the number of crossed homomorphisms, *Hokkaido Math. J.* **28** (1999), 535–543.

[3] T. Asai and Y. Takegahara, $|\mathrm{Hom}(A, G)|$, IV, *J. Algebra* **246** (2001), 543–563.

[4] T. Asai and T. Yoshida, $|\mathrm{Hom}(A, G)|$, II, *J. Algebra* **160** (1993), 273–285.

[5] R. Brauer, On a theorem of Frobenius, *Amer. Math. Monthly* **76** (1969), 12–15.

[6] G. Frobenius, Verallgemeinerung des Sylowschen Satzes, *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1895), 981–993; in : "Gesammelte Abhandlungen," Band II, pp. 664–676, Springer, Berlin, 1968.

[7] M. Hall Jr., "The Theory of Groups," 2nd edition, Chelsea, New York, 1976.

[8] P. Hall, A contribution to the theory of groups of prime-power order, *Proc. London Math. Soc.* (2) **36** (1933), 29–95.

[9] P. Hall, On a theorem of Frobenius, *Proc. London Math. Soc.* (2) **40** (1936), 468–501.

[10] N. Iiyori and H. Yamaki, On a conjecture of Frobenius, *Bull. Amer. Math. Soc.* **25** (1991), 413–416.

[11] M. Murai, On the number of p-subgroups of a finite group, *J. Math. Kyoto Univ.* **42** (2002), 161–174.

[12] M. Murai and Y. Takegahara, Hall's relations in finite groups, *J. Algebra* **271** (2004), 312–326.

[13] J. Rust, "On a Conjecture of Frobenius," Thesis, Univ. of Chicago, 1966.

[14] Y. Takegahara, The number of subgroups of a finite group, *J. Algebra* **227** (2000), 783–796

[15] T. Yoshida, $|\mathrm{Hom}(A, G)|$, *J. Algebra* **156** (1993), 125–156.