

Contact Weyl manifold における指数定理と representable K-theory *

宮崎直哉

Naoya MIYAZAKI†

慶應義塾大学経済学部日吉数学研究室

Department of Mathematics

Faculty of Economics

Keio University

2004年9月7日

1 Introduction

形式的変形量子化 (Formal Deformation Quantization, 以下省略し FDQ と記すこともある) の基礎付け (存在定理) は DeWilde-Lecomte, Omori-Maeda-Yoshioka, Fedosov らの結果を経て 1997年に Kontsevich による曲率的論法によって最終的な解決を見た。それを受け現在 FDQ は応用の時代に入ったといつてよいと思われる。その例を少し列挙すれば、

1. Nekrasov の非可換 Yang-Mills 理論、
2. Xu の Quantum groupoids、
3. Brylinski-Getzler, Nest-Tsygan らによる star algebra に関する (コ) ホモロジーの計算、
4. J.Rosenberg による代数的 K_0, K_1 の計算、
5. Kontsevich らによる L^∞ -algebra や他のカテゴリーとの関係、
6. Fedosov による変形量子化における指数定理。

前回の研究会においては、上記 6 への興味から

1. Fedosov 変形量子化において用いられた “algebra bundle 上の flat connection” (以下 Fedosov connection と呼ぶ) を拡張して得られる吉岡の意味での “contact-Weyl manifold と量子接続” を紹介し、
2. それによって自然に定義される twisted Dirac operator の持っている基本的な性質、特に Dirac の熱核の Mehler’s formula に Omori-Maeda-Yoshioka-Miyazaki の意味での Poincaré-Cartan class (Deligne-Čech class と呼ばれる) が現れることを報告

した。さて今回の講演の目標は

1. Fedosov connection ∇^F をあたかも非可換係数束 W_M における外微分のごとく見なし、更に外微分付き係数束 $(M \times \mathbb{R}, d)$ を (W_M, ∇^F) で置き換えて、Poincaré-Cartan class を反映させた無限次元 stack と、Poincaré-Cartan form を曲率と思えるような接続 (いわば twisted Fedosov connection) が構成できること (この方法によれば吉岡の意味での、Contact Weyl manifold を経由せずに非常に簡単に議論ができる)、
2. そして、その接続から自然に定義される Dirac 作用素から直接的に指数を定義し、その noncommutative differential geometry における位置付け・解釈について考察する
3. 更に spin gerbe という概念を用いることにより、必ずしもスピんでないようなシンプレクティック多様体についても同様な議論が可能であることを報告する

* 京都大学数理解析研究所講究録「力学系と微分幾何学」用原稿。This research is partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (#15740045, #15540094), Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology, Japan, and is also partially supported by Keio Gijuku Academic Funds.

† e-mail: miyazaki@hc.cc.keio.ac.jp

ことにある。大森英樹氏の言われるように形式的変形量子化は非可換幾何学においていわば「探り針」の役割を果たしているものであり、今後もその応用が期待される。また本稿においては変形量子化における収束の問題は取り扱わない。プランク定数は形式的なものである。収束の問題については [N1], [N2], [OMMY2], [OMMY3], [Ri] を参照のこと。

2 形式的変形量子化と Fedosov の構成法

2.1 形式的変形量子化の基礎

形式的変形量子化の定義を与える前に Poisson manifold の定義を復習しておく。

Definition 2.1 (M, π) が Poisson manifold とは

- (i) M が滑らかな多様体、
- (ii) $\pi \in \Gamma(\Lambda^2 TM)$ 、
- (iii) $[\pi, \pi]_S = 0$ 、

を満たす時をいう。但しここで $[\cdot, \cdot]_S$ は Schouten bracket。 π から Poisson bracket とよばれる括弧が $\{f, g\} = \pi(df \wedge dg)$ で定まる。これを用いると条件 (iii) は $\{, \}$ が Jacobi 律を満たすという条件に置き換えられる。

よく知られているように π は Poisson structure あるいは Poisson bivector とも呼ばれていて、局所的には $= \Lambda^{ij} \partial_i \wedge \partial_j$ と書かれる。特にこれが非退化のとき、その dual として定まる 2-form ω を symplectic structure あるいは symplectic form といひ、 (M, ω) を symplectic manifold と呼ぶ。

Definition 2.2 Poisson 多様体 (M, π) の star product とは $C^\infty(M)$ を係数とする形式的なパラメーター ν に関する形式的な冪級数のなす空間 $C^\infty(M)[[\nu]]$ 上の積

$$f * g = fg + \nu \pi_1(f, g) + \dots + \nu^n \pi_n(f, g) + \dots, (\forall f, g \in C^\infty(M)[[\nu]]),$$

で以下の条件を満たすものである。

1. $*$ は結合的
2. $\pi_1(f, g) = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \{f, g\}$ 、
3. 各 π_n は $\mathbb{R}[[\nu]]$ -双線形かつ双微分作用素である。

得られた $(C^\infty(M)[[\nu]], *)$ は、Poisson manifold $(M, \{, \})$ の形式的変形量子化 (formal deformation quantization) あるいは star algebra と呼ばれる (cf. [BFFLS])。

Example (Moyal product) ここで、直後に必要となる典型例を挙げておこう。まず \mathbb{R}^{2n} における標準的な symplectic structure $\omega^0 = \omega_{ij}^0 dz^i \otimes dz^j$ ($(\omega_{ij}^0) = \begin{bmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{bmatrix}$) を考え、それに対応する Poisson structure $\partial_x^i \wedge \partial_y^j$ とそれによる Poisson bracket を考えよう。そのとき

$$\begin{aligned} f(z) *_{M} g(z) &= f(z) \exp \left[\frac{\nu}{2} \partial_x^i \wedge \partial_y^j \right] g(z') \Big|_{z'=z} \\ &= \sum_{\alpha, \beta} \frac{(\nu/2)^{|\alpha|+|\beta|}}{\alpha! \beta!} \partial_x^\alpha \partial_y^\beta f \partial_x^\beta (-\partial_y)^\alpha g \end{aligned}$$

によって定義される積を Moyal 積と呼ぶ。これが \mathbb{R}^{2n} における形式的変形量子化の典型例を与える (量子ダルブ一座標定理により、この積が本質的)。ただし $z = (z^1, \dots, z^{2n}) = (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$ である。Symplectic manifold に関する形式的変形量子化の存在に関する結果は次のとおり (cf. [DL], [OMY], [F1])。

Theorem 2.3 \forall symplectic manifold (M, ω) , $\exists *$ -product s.t. $(C^\infty(M)[[\nu]], *)$ は、Symplectic manifold (M, ω) の形式的変形量子化。

上記のごとく形式的変形量子化の存在はわかったが、実はそれは (一般には) 一意的ではない。それについて説明をするのに “同型の意味をはっきりさせておこう。”

Definition 2.4 $T : (C^\infty(M)[[\nu]], *_0) \rightarrow (C^\infty(M)[[\nu]], *_1)$ が形式的変形量子化の間の同型であるとは、

1. $T : \mathbb{R}[[\nu]]$ -linear isomorphism,

2. $f *_0 g = T^{-1}(T(f) *_1 T(g))$,
3. $Tf = f + T_1 f + \dots + T_k f + \dots$ と展開されて、各 T_k が微分作用素。

以上の定義の下で次が知られている [GR], [OMMY1], [Y].

Theorem 2.5

$$\begin{array}{c}
 \{\text{star-product}\} / \sim \\
 \updownarrow \\
 \{\text{Poincaré-Cartan class on } M\} \\
 \updownarrow \\
 \dot{H}(M, \mathbb{R}[[\nu^2]]) \\
 \updownarrow \\
 \{\text{contact Weyl manifold}\} / \sim
 \end{array} \tag{1}$$

2.2 Fedosov の構成法

この節では Fedosov 接続について説明する。大森・前田・吉岡 [OMY] の意味での Weyl manifold から出発して構成される吉岡の量子接続 [Y] も本質的には Fedosov 接続と同じ役割を果たしている。その方法では、Darboux 座標の量子化を基礎にし、Weyl function と呼ばれる特殊な断面族を保つような変換をもとにして局所自明化を定義し、それを使って量子接続の係数を書きくだすことができる。この利点は接続自体の記述が簡単になるという点にある。しかし、この自明化（はり合わせ）はその構成自身結構面倒である。

一方通常の Weyl algebra bundle の古典的自明化（つまり base manifold の座標変換の微分（の対称テンソル積）による貼りあわせ）によると、初心者でも容易に理解できる方法で、量子接続を理解できる。この自明化は古典的に良く知られているのでなじみがあるが、接続係数のほうにしわ寄せが来る。

(M, ω) を symplectic manifold として、

1. $W_M := (\odot T^*M) \otimes \mathbb{R}[[\nu]]$, ただし \odot は対称テンソル積。この元を微分形式 dz^k と区別するために Z^k とあらわす。
2. $a(z, Z, \nu), b(z, Z, \nu) \in W_M$ (z は base manifold の点を表す) に対して、

$$a(z, Z, \nu) *_M b(z, Z, \nu) = a(z, Z, \nu) \exp \left[\frac{\nu}{2} \partial_{z_i} \wedge \partial_{z_j} \right] b(z, Z', \nu) \Big|_{Z'=Z}$$

とおくと fiberwise に Moyal 積が定義されていることになるが、これから自然に滑らかな断面全体にも積 $*$ が定義される。そして、これで Fréchet 非可換結合代数が得られる。

続いて Grassmann algebra との tensor product について考えよう。明らかに $W_M \otimes \Lambda_M$ の中心 = $\mathbb{R}[[\nu]] \otimes \Lambda_M^{\text{center}}$ である。さらに、幾つか基礎的な作用素を導入しておく。

Definition 2.6 $a = \nu^l Z^\alpha dz^\beta \in \Gamma(W_M \otimes \Lambda_M)$ について、

$$a_0 = a(z, Z, dz, \nu) \Big|_{z=0}, \quad a_{00} = a(z, Z, dz, \nu) \Big|_{z=0, dz=0}, \tag{2}$$

$$\sigma(a) = a_0 = a_{00} \quad (a \in \Gamma(W_M)), \tag{3}$$

$$\delta a = dz^k \wedge \frac{\partial a}{\partial Z^k}, \quad \delta^{-1} a = \begin{cases} \frac{1}{|\alpha|+|\beta|} Z^k \iota_{\partial_{z^k}}, & (|\alpha|+|\beta| \neq 0), \\ 0 & (|\alpha|+|\beta| = 0), \end{cases} \tag{4}$$

$$Wl - \deg(a) = |\alpha| + |\beta| + 2l. \tag{5}$$

すると容易に次が分かる。

Proposition 2.7 1. δ と δ^{-1} の定義は Darboux coordinate の選択に依存しない。

2. Hodge 分解 $a = \delta \delta^{-1} a + \delta^{-1} \delta a + a_{00}$.

3. $\delta a = -\frac{1}{\nu} [\omega_{ij} Z^i dz^j, a]$,

以上の準備の下で、Fedosov connection の構成は以下のようにおこなわれる。

$$\nabla : \text{symplectic connection} \tag{6}$$

$$\nabla^F = \nabla - \delta + \frac{1}{\nu} [\gamma, \bullet] \tag{7}$$

$$= d + \left[\frac{1}{2\nu} \sum \Gamma_{ijk} z^i z^j dz^k, \bullet \right] + \left[\frac{1}{\nu} \omega_{ij} Z^i dz^j, \bullet \right] + \left[\frac{1}{\nu} \gamma, \bullet \right].$$

とおく。ただし、 $\gamma \in \Gamma(W_M \otimes \Lambda_M)$ 。我々は、 $(\nabla^F)^2 = 0$ となるように γ を構成したいのである。実は次が成立する。

Theorem 2.8 ([F1-2]) 上記の要件を満たす r は以下のような条件下で一意に存在する。

$$\deg \gamma \geq 2, \delta^{-1} \gamma = 0. \quad (8)$$

Proof Ω を以下のようにおく。

$$(\nabla^F)^2 a = \frac{1}{\nu} [\Omega, a]. \quad (9)$$

すると直接計算により、

$$\Omega = -\frac{1}{2} \omega_{ij} dz_i \wedge dz_j + \frac{1}{4} \sum R_{ijkl} z_i z_j dz_k dz_l - \delta r + \nabla \gamma + \frac{-1}{\nu} \gamma_*^2. \quad (10)$$

が導かれる。 $\frac{1}{2} \omega_{ij} dz_i \wedge dz_j$ が中心であることを考えれば、 $(\nabla^F)^2 = 0$ であるための必要十分条件は

$$\delta \gamma = \nabla \gamma + R_\omega + \frac{-1}{\nu} \gamma_*^2 \quad (11)$$

となる。ただし、ここで $R_\omega = \frac{1}{4} \sum R_{ijkl} z_i z_j dz_k dz_l$ とおいた。他方先ほど紹介した *Hodge* 分解

$$\gamma = \delta^{-1} \delta \gamma + \delta \delta^{-1} \gamma + \gamma_{00}$$

において、仮定 $\delta^{-1} \gamma = 0$ と $\gamma_{00} = 0$ ($\gamma: 1$ -form) を用いれば

$$\gamma = \delta^{-1} \delta \gamma \quad (12)$$

がわかる。そこで (11) に δ^{-1} を当てて (12) を適用して次を得る。

$$\gamma = \delta^{-1} \delta \gamma = \delta^{-1} \nabla \gamma + \delta^{-1} R_\omega + \delta^{-1} \frac{-1}{\nu} \gamma_*^2. \quad (13)$$

$\deg \gamma \geq 2$ と言う仮定をおいてあったので、 $\frac{1}{\nu} [\gamma, \cdot]$ が次数を下げることは無い。また、 δ^{-1} は次数を増加させている。これを利用するとこの γ の方程式は次数に関して逐次的に解くことができる。このようにして得られた解は当然 (8) を満たす。問題はこの解が方程式 (11) を満たしているかどうかである (議論の過程で δ^{-1} と言う非可逆な作用素を当ててしまっているので...)。以下それを確かめる。 ∇^F で上記のようにして得られた r を用いて定義された接続とする。そして、 $\tilde{\Omega}$ でその曲率を表すこととする。すなわち、

$$\tilde{\Omega} = -\omega + R_\omega - \delta \gamma + \nabla \gamma + \frac{-1}{\nu} \gamma_*^2. \quad (14)$$

目的は

$$\tilde{\Omega} + \omega = 0 \quad (15)$$

を示すことである (そうすれば中心におさまる)。 $\gamma_0 = \delta^{-1} R_\omega$ という条件のついた方程式 (13) から

$$\begin{aligned} \delta^{-1}(\tilde{\Omega} + \omega) &= \delta^{-1}(R_\omega + \nabla \gamma + \frac{-1}{\nu} \gamma_*^2) - \delta^{-1} \delta \gamma \\ &\stackrel{(13)}{=} \gamma - \delta^{-1} \delta \gamma \\ &= \delta \delta^{-1} \gamma \\ &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

ができる。*Bianchi* 方程式より、 $\nabla^F \tilde{\Omega} = 0$ と $\nabla^F \omega = d\omega = 0$ が示される。(ω は *closed scalar valued 2-form* であることに注意。) よって、 $\nabla^F(\tilde{\Omega} + \omega) = 0$ あるいは同じ事であるが、

$$\delta(\tilde{\Omega} + \omega) = (\nabla^F + \delta)(\tilde{\Omega} + \omega). \quad (17)$$

を得る。両辺 δ^{-1} を当て、 $\delta^{-1}(\tilde{\Omega} + \omega) = 0$ となることと、再び *Hodge* 分解を適用すると、

$$\tilde{\Omega} + \omega = \delta^{-1}(\nabla^F + \delta)(\tilde{\Omega} + \omega), \quad (18)$$

が得られる。作用素 $\delta^{-1}(\nabla^F + \delta)$ は次数を 1 上げるので、方程式 (18) から唯一解 $\tilde{\Omega} + \omega = 0$ を得る。

以上で、シンプレクティック接続 ∇ から Fedosov 接続と呼ばれる接続 ∇^F が構成された。次にこの接続をもちいて、 $C^\infty(M)[[\nu]]$ に *star product* が定義されることを示したいのであるが、そのためには以下の様にすれば良い。

1. W_{∇^F} がファイバーごとの積で閉じていることを示す。
2. $(\nabla^F)^2 = 0$ であることを使って、

$$\sigma: W_{\nabla^F} \xrightarrow{\sim} C^\infty(M)[[\nu]]. \quad (19)$$

であることを示す。

- 3.

$$a *_F b = \sigma(\sigma^{-1}(a) * \sigma^{-1}(b)), \quad (20)$$

とおくと、 $*_F$ が $C^\infty(M)[[\nu]]$ における star product の性質を有していることを示す。

2. についてももう少し詳しく説明しておこう。

Proposition 2.9 ([F1-2]) ∇^F を上で構成された接続とする。そのとき Weyl algebra bundle の ∇^F に関する $\Gamma(W_M)$ 内の平行断面全体 W_{∇^F} は $C^\infty(M)[[\nu]]$ の元と一対一対応である。その対応を与える写像 $\sigma: W_{\nabla^F} \rightarrow C^\infty(M)[[\nu]]$ は $\mathbb{C}[[\nu]]$ -線形同型を与える。その逆写像 $\tau = \sigma^{-1}$ は具体的には以下のような手続きである：関数 $f \in C^\infty(M)$ に対して平行断面 $\tau(f)$ が次数に関する漸化式を解いて構成できる。

$$\begin{aligned} \tau(f)_0 &= f, \\ \tau(f)_{s+1} &= \delta^{-1}(\nabla^S r_s + \frac{1}{\nu} \sum_{t=1}^{s-1} ad(r_{t+2})\tau(f)_{s-t}). \end{aligned} \quad (21)$$

最後に積を $f * g = \sigma(\tau(f) * \sigma(g))$ で定義すると、これは star-product を与える。

Proof $\nabla^F a = 0$, $\sigma(a) = a_0$ を考える。 δa を $\nabla^F a = 0$ の両辺に加えて、

$$\delta a = (\nabla^F + \delta)a \quad (22)$$

としておく。 δ^{-1} を (22) の両辺に当てて $\delta^{-1}a = 0$ と Hodge 分解をもちいれば、容易に

$$\begin{aligned} a &= (\delta^{-1}\delta a + \delta\delta^{-1}a + a_{00}) \\ &= \delta^{-1}\delta a + a_0 \\ &= \delta^{-1}(\nabla^F + \delta)a + a_0. \end{aligned} \quad (23)$$

を得る。 $\delta^{-1}(\nabla^F + \delta)$ は次数を上げるので、直前の証明で見たように、方程式 (23) は唯一解 \tilde{a} を得る。 $\nabla^F \tilde{a} = 0$ を示そう。 ∇^F が $(\nabla^F)^2 \in$ 中心を満たすということにより、

$$(\nabla^F)^2 \tilde{a} = 0 \quad (24)$$

が得られる。ゆえに、

$$\delta \nabla^F \tilde{a} \stackrel{(24)}{=} (\nabla^F + \delta) \nabla^F \tilde{a}. \quad (25)$$

が出る。(23) により、

$$\delta^{-1} \nabla^F \tilde{a} = 0. \quad (26)$$

が出る。 δ^{-1} を当てて (26) 及び Hodge 分解を適用してやると、

$$\nabla^F \tilde{a} = \delta^{-1}(\nabla^F + \delta) \nabla^F \tilde{a} \quad (27)$$

が得られる。先ほどと同様にこの方程式は唯一解 $\nabla^F \tilde{a} = 0$ を持つ。

3 Twisted Fedosov connections and noncommutative Dirac operators

前節の構成からわかったように、単なるベクトル束とその接続を考えるのではなく、Weyl 代数 W をファイバーとする Weyl 代数束とその代数構造と相性のよい接続を考えるという要請が Fedosov 構成（特に底多様体の関数と平行断面との一対一対応を構成するところ）の crucial point であった。たとえば構造群を $GL(W)$ とみて $\dot{H}^2(M, GL(W))$ の元で捻って stack（直後の説明を参照）を考えるとそのような要請が満たされなくなってしまう。分類の際に現れた 2 次 Čech cohomology の係数に $\mathbb{R}[[\hbar]]$ が現れてくるのはこのような理由による。本節の目的は、素直な Weyl 代数束を $\dot{H}^2(M, \mathbb{R}[[\hbar]])$ の元で捻って stack を構成するということである。幾何学的量子化において良く用いられる事実として整係数のコホモロジークラスを定義する

ようなシンプレクティック構造を備えたシンプレクティック多様体について、そのシンプレクティック構造を曲率とするような接続付き線束が存在するという定理があるが、この結果得られる束を prequantum bundle (cf. [Wo]) と呼ぶのであった。この定理の証明の際もちいられている Čech-de Rham zig-zag construction の類似を用いることで実は必ずしも整とは限らない Poincaré-Cartan class についても接続付きの無限階数の stack で曲率が Poincaré-Cartan form と一致するようなものが構成できるということを紹介することがこのセクションの目的である (cf. [Mi1])。

3.1 Stacks, vectorial gerbes and twisted quantum gerbes

最初暫くの間 stack という用語の準備に費やされる ([Br], [Hi], [Mu])。

Definition 3.1 M を多様体とする。 S が M の sheaf of category とは対応 $U \mapsto S(U)$ であり (但しここで U は M の開集合、 $S(U)$ は category) 、

- (gluing conditions for objects) 包含写像 $U \rightarrow V$ が与えられた時 $r_{U,V} : S(V) \rightarrow S(U)$ があって、 $r_{UV} \circ r_{VW} = r_{UW}$ を満たし、 M の開集合 U の開被覆 $(U_i)_{i \in I}$ について、各 i と $x_i \in S(U_i)$ に関して写像 $g_{ij} : r_{U_i, U_j}(x_j) \rightarrow r_{U_i, U_j}(x_i)$ で $g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$ を満たすものが存在する時、在る $x \in S(U)$ が存在して $r_{U_i, U}(x) = x_i$ を満たす。
- (gluing conditions for morphisms) 二つの対象 $P, Q \in S(M)$ について $U \rightarrow \text{Hom}(r_{UM}(P), r_{UM}(Q))$ が sheaf である

という条件を満たしている時を言う。更に加えて以下の条件

- 適切な開被覆 $(U_i)_{i \in I}$ が存在して、各 i に対して $S(U_i)$ が空でない、
- U を M の開集合とすると、任意の $x, y \in S(U)$ に対してある U の開被覆 (U_i) が存在して $r_{U_i, U}(x)$ と $r_{U_i, U}(y)$ とが同型、
- $S(U)$ のすべての射は可逆であり、在る群の sheaf A が存在して、各 $S(U)$ の対象 x に対して $\text{Hom}(x, x) \cong A(U)$ となり、この各元は制限写像と可逆。 A を band と言う、

を満たすとき stack と言う。

band として群の sheaf H を考えたい。以下の目標は上述の概念 (あるいはその類似品) で H 係数の 2 次 Čech-cohomology の幾何学的な対象を作ることである。 M を多様体として $U = \{U_i\}_{i \in I}$ でその開被覆を表しているとする。

$$\pi : Y := y^{[0]} = \coprod U_i \rightarrow M \text{ (projection),} \quad (28)$$

$$Y^{[p]} := \{(y_0, y_1, \dots, y_p) \mid \pi(y_0) = \pi(y_1) = \dots = \pi(y_p)\}, \quad (29)$$

$$\pi_i : Y^{[p]} \rightarrow Y^{[p-1]}; \text{ omit the } i\text{-th argument} \quad (30)$$

$$\delta := \sum_{i=0}^p (-1)^i \pi_i^* \wedge^q(Y^{[p]}) \rightarrow \wedge^q(Y^{[p+1]}) \quad (31)$$

Definition 3.2 $\mathcal{G} = (Y, P, s)$ が M 上の (H -)gerbe であるとは

- π が局所的に断面を備えた上への沈め込みを与える
- $P \rightarrow Y^{[1]}$ が H を構造群とするファイバー束
- $s : Y^{[2]} \rightarrow \delta P$ が断面 (齟齬)
- $\delta s = 1$

i.e.

$$\begin{array}{ccccccc} & & P & & \delta P & & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow s & & \downarrow \delta s \\ Y & \longleftarrow & Y^{[1]} & \longleftarrow & Y^{[2]} & \longleftarrow & Y^{[3]} \\ & & \downarrow & & & & \\ & & M & & & & \end{array} \quad (32)$$

これが stack の特殊な場合であるのは容易に分かる。さて G -主束に対してその構造群 G の表現が与えられると、それに同伴してベクトル束が定義されるように、band の表現が与えられると同伴して vectorial gerbe と呼ばれるものが定義される。

Definition 3.3 表現 (V, ρ) が与えられているとする。 $S(U)$ が V を標準ファイバーとする U 上のベクトル束のなす category で $\rho \circ g_{ij} : U_{ij} \times V \rightarrow U_{ji} \times V; (x, y) \mapsto (x, \rho \circ g_{ij}(x)y)$, が 齟齬¹ になっているようなものを *vectorial gerbe* という。

これらには base を $Y^{[0]}$ と思うことによって自然に大域的断面や内積構造とそれによる完備化、更には作用するオペレーターやそれらがなす作用素環の構造が定義できる [A], [MS]。特に接続は $Y^{[0]}$ 上の接続で齟齬と相性のよいもの。また、曲率を使って Chern class、Chern character が定義できる ($\text{tr}(gAg^{-1}) = \text{tr}(A)$, $\text{Det}(gAg^{-1}) = \text{Det}(A)$ であることから well-def.)。

さてこの辺で最も基本的であると思われる例を挙げよう。これは $H = U(1)$ の場合である。

Example (Spin gerbe[MS]) 次の短完全列を考える：

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n) \rightarrow 1. \quad (33)$$

ここからえられる Bockstein の完全列：

$$\dots \rightarrow H^1(M, \text{Spin}(n)) \rightarrow H^1(M, \text{SO}(n)) \rightarrow H^2(M, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \dots \quad (34)$$

によって座標変換 (cocycle) $(g_{ij}) \in C^\infty(U_{ij}, \text{SO}(n))$ を送ったものが spin 構造の障害類 Stiefel-Whitney class を表しているのがあった。これが消えてくれば大域的な spin 束が立つ。これが消えていない場合 $\mathbb{Z}_2 \subset U(1)$ -値 2 cocycle $c_{ij,k} = \tilde{g}_{ij}\tilde{g}_{jk}\tilde{g}_{ki}$ が定まる。これを先ほどの gerbe の定義の s (齟齬) とすることによって gerbe が定まる。これを spin gerbe と呼ぼう。

我々の目的にはもう一つ形式的変形量子化に関連した vectorial gerbe が必要になる。以下その構成を行う。

Theorem 3.4 任意に与えられた Poincaré-Cartan class $c_\nu(\mathcal{A}_M)$ について、接続付きの $\mathbb{R}[[\hbar]]$ -vectorial gerbe (Q_M, ∇^Q) でその 1st Chern form $\Omega_\nu(*) = \Omega_\nu(\mathcal{A}_M)$ (これを以下では Poincaré-Cartan form と言う) が Poincaré-Cartan class と対応するようなものが存在する。さらに、得られた $\mathbb{R}[[\hbar]]$ -vectorial gerbe (Q_M, ∇^Q) には右 Weyl algebra module 構造が入る。これを twisted quantum gerbe endowed with twisted quantum connection と呼ぶ。

Remark 定理の前にも述べたが $\Omega_\nu(\mathcal{A}_M)$ は必ずしも整とは限らない。

Proof M の適当な開被覆 $U = \{U_\alpha\}$ を固定する。この開被覆を用いて、Čech-de Rham double complex $C^q(U, \Lambda_M^p)$ と de Rham 外微分とを double complex $C^q(U, \Lambda_M^p \otimes W_M)$ と Fedosov connection ∇^F とでそれぞれ置き換えたものすなわち、 $\Lambda_M^p \otimes W_M$ を係数とする Čech の 2 重複体を考えよう²。すると次が証明できる。

1. $\delta \nabla^F \pm \nabla^F \delta = 0$
2. $p \geq 1$ とする。 $\nabla^F b = 0$ を満足する任意の $b \in C^q(U, \Lambda_M^{p+1} \otimes W_M)$ に対して、或る $a \in C^q(U, \Lambda_M^p \otimes W_M)$ で $\nabla^F a = b$ となるようなものが存在する。

この最初の主張は ∇^F の定義のされ方からすぐわかる。2 番目について考えよう。Intertwiner P であり、 $\nabla^F = -P^{-1}\delta P$ を満たすようなものの存在が示せれば良い。そうすると δ に関する複体と ∇^F に関する複体とは同値であることになる。その結果 ∇^F を δ によって置き換えた場合に定理の主張にあたる結果が正しい (その証明は Hodge 分解からすぐ分かる) ということから、 ∇^F に関する定理の主張が正しいということになる。さて、Hodge 分解 $((\nabla^F + \delta)a)_{00} = 0$ によって、

$$(\nabla^F + \delta)a = \delta^{-1}\delta(\nabla^F + \delta)a + \delta\delta^{-1}(\nabla^F + \delta)a. \quad (35)$$

が分かる。一方、 $(\nabla^F)^2 = \delta^2 = 0$ であるから

$$(\nabla^F + \delta)\nabla^F = \delta\nabla^F = \delta(\nabla^F + \delta) \quad (36)$$

となる。この関係を用いて、(35) は以下のように変形される。

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla^F a - \delta^{-1}(\nabla^F + \delta)\nabla^F a + \delta a - \delta\delta^{-1}(\nabla^F + \delta)a \\ &= (1 - \delta^{-1}(\nabla^F + \delta))\nabla^F a + \delta(1 - \delta^{-1}(\nabla^F + \delta))a \\ &= (P\nabla^F + \delta P)a, \end{aligned} \quad (37)$$

¹主束の構造が入っていないが齟齬といっても間違いはないであろう

²このような complex は Čech-Fedosov double complex と呼ぶのが良いのではないかな?

ただし、

$$Pa = (1 - \delta^{-1}(\nabla^F + \delta))a. \quad (38)$$

と置いている。\$P\$ が可逆であることを言うために、次のような方程式を考える。

$$b = Pa \quad (39)$$

ただし、\$b\$ が与えられていて \$a\$ が未知である。(38)における \$P\$ の定義からこの方程式は次の方程式

$$a = b + \delta^{-1}(\nabla^F + \delta)a, \quad (40)$$

と同値である。\$\delta^{-1}(\nabla^F + \delta)\$ が \$Wl\$-degree を少なくとも次数 1 挙げているので、(40) は帰納的に唯一の解を持つことがわかる。かくして \$P\$ の可逆性がわかり、さらに 目的の式

$$\nabla^F = -P^{-1}\delta P \quad (41)$$

が得られた。さて、Čech 2-cocycle \$c_\nu(\mathcal{A}_M) = \{c_{\alpha\beta\gamma}\}\$ を Poincaré-Cartan class に対応しているとしよう。さすれば上記 1 と 2 から、次のような図式が得られる (可換)。

$$\begin{array}{ccc} & & \Omega_\nu(\mathcal{A}_M) \\ & & \downarrow r \\ & \{ \xi_{U_\alpha} \} & \xrightarrow{\nabla^F} \{ \Omega_\nu(\mathcal{A}_M) \}_\alpha \\ & \delta \downarrow & \\ \{ h_{U_{\alpha\beta}} \} & \xrightarrow{\nabla^F} & \{ \nabla^F h_{\alpha\beta} \} \\ \delta \downarrow & & \\ \{ c_{\alpha\beta\gamma} \} & \xrightarrow{i} & \{ c_{\alpha\beta\gamma} \} \end{array} \quad (42)$$

ただし、\$\nabla^F\$ が Fedosov connection であり、\$\delta\$ は Čech coboundary operator である。\$W\$ (Weyl algebra) への作用を \$g_{\alpha\beta} = \exp[h_{U_{\alpha\beta}}]\$ とする³。そうすると

$$\xi_\alpha - \xi_\beta = \nabla^F \log g_{\alpha\beta}$$

さて

$$\mathcal{G} := Q_M := \{(\pi^{-1}(U_\alpha))\} \rightarrow Y^{[0]} \quad (43)$$

$$g_{\alpha\beta\gamma} := (\delta g)_{\alpha\beta\gamma}, \quad (44)$$

$$\nabla_Z^{\mathcal{G}}(\phi_\alpha 1_\alpha) := \{\nabla_Z^F + 2\pi\sqrt{-1}\xi_\alpha(Z)\} * \phi_\alpha 1_\alpha, \quad (45)$$

と置こう。ただし、\$\pi: W_M \to M\$ は標準射影で、\$1_\alpha\$ は \$x \mapsto (x, 1)\$ の局所自明化によるイメージ。このように (前述の意味での) 接続付きの \$\mathbb{R}[[\hbar]]\$-gerbe に同伴する (無限階数) vectorial gerbe が構成された。接続が \$*\$ と相性がよく、変換関数も \$*\$ 積を使って定義されているから \$W_M|_p\$ の上の algebra structure から各ファイバー \$Q_M|_p\$ の上の Weyl algebra right-module structure が自然に定まる。

3.2 Noncommutative Dirac operators

Definition 3.5 \$n = 2m\$ 次元内積付ベクトル空間 \$(V^*, g)\$ の Clifford 代数 \$Cl_\hbar(V^*)\$ とは \$\mathbb{R}_\hbar = \mathbb{R}[\hbar^{-1}, \hbar]\$ 上で \$g\$ に関する正規直交基底 \$e^1, \dots, e^n\$ で形式的に生成され以下の関係式を満たすもの

$$e^i e^j + e^j e^i = -2\delta^{ij} \hbar. \quad (46)$$

この代数での次数を次のように定める。

$$Cl - \deg(e^{i_1} \dots e^{i_k} \hbar^l) = k + 2l. \quad (47)$$

Definition 3.6 Chiral element とは⁴

$$\Gamma_\hbar = \left(\frac{\sqrt{-1}}{\hbar} \right)^{\frac{n}{2}} e^1 \dots e^n \quad (48)$$

で定義された元のこと。

³\$g_{\alpha\beta}\$ は通常の有限階数のベクトル束の変換関数ではない (cf. [Y]).

⁴Mckean-Singer 型定理を示す際にこの元を用いるのであった。

すると直接計算によって

$$\Gamma_{\hbar}^2 = 1, \quad \Gamma_{\hbar} v = -v \Gamma_{\hbar} \quad (v \in V^*). \quad (49)$$

となることがわかる。

つぎにクリフォード作用にあたるものを考えたい。 $V^*[\hbar^{-1}, \hbar] = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}[\hbar^{-1}, \hbar]$ の向きつけられた polarization⁵ $P_{\hbar} = \left\langle \{w^j = \frac{1}{2}\{e^{2j-1} - \sqrt{-1}e^{2j}\} : 1 \leq j \leq \frac{n}{2}\} \right\rangle_{\mathbb{C}[\hbar^{-1}, \hbar]}$ を固定する。さらに

$$S_{\hbar} = \Lambda P_{\hbar}, \quad S_{\hbar}^{\pm} = \Lambda^{\pm} P_{\hbar}, \quad (50)$$

とおく。

c_{\hbar} は以下のように定義された $Cl_{\hbar}(V^*)$ の S_{\hbar} への作用。 $s = \sum_i s_i \hbar^i \in S_{\hbar}$ に対して、

$$c_{\hbar}(w)s = 2^{1/2} w \wedge s \quad (w \in P_{\hbar}) \quad (51)$$

$$c_{\hbar}(\bar{w})s = -2^{1/2} \iota_{\hbar}(\bar{w})s = -2^{1/2} \hbar g(\bar{w}, s) \quad (\bar{w} \in P_{\hbar}) \quad (52)$$

$$c_{\hbar}(\hbar)s = \hbar s \quad (53)$$

ついで Γ_{\hbar} の作用について見てみよう。

$$c_{\hbar}(\Gamma_{\hbar})s = \left(\frac{-1}{\hbar}\right)^{n/2} ((w^1 \wedge) \iota_{\hbar g}(\bar{w}^1) - \iota_{\hbar g}(\bar{w}^1)(w^1 \wedge)) \cdots \\ \cdots ((w^{n/2} \wedge) \iota_{\hbar g}(\bar{w}^{n/2}) - \iota_{\hbar g}(\bar{w}^{n/2})(w^{n/2} \wedge)). \quad (54)$$

よって

$$\Gamma_{\hbar}|_{\Lambda^k P_{\hbar}} = (-1)^k \quad (55)$$

このようにして次が得られた。

$$S_{\hbar}^{\pm} = \{\pm 1 \text{-eigen space of } \Gamma_{\hbar}\}. \quad (56)$$

さて以上から、適当な多様体 M 上の代数束 $\mathcal{E} = Q_M \otimes_{\mathbb{C}[\hbar^{-1}, \hbar]} S_{\hbar}(M)$ において、

- ここに作用する作用素: $\nabla^{\mathcal{E}} = \nabla = \nabla^Q \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^S$ 但し ∇^Q は twisted quantum connection で ∇^S は Levi-Civita 接続から得られる Clifford(Spin) 接続、⁶
- 係数を非可換化したことにより、非可換 Dirac 作用素: $D = \sum_i c_{\hbar}(e^i) \nabla_{e_i}^{\mathcal{E}}$ 、ただし、ここで c_{\hbar} は Clifford 作用、 $\{e_i\}$ は正規直交枠 $\{e^i\}$ は双対枠とする、

らが得られることとなる。見てわかるとおり \hbar というパラメータが含まれているので、Riemann 計量 $g \rightarrow \frac{1}{\hbar}g = g_{\hbar}$ に連動して体積形式(密度)、Levi-Civita 接続、Laplacian、そして Lichnerowicz formula の変化が生ずる。

Proposition 3.7

$$\begin{array}{ll} \text{volume form} & : \quad \text{vol}_M \rightarrow \hbar^{-n/2} \text{vol}_M, \\ \text{Christoffel} & : \quad \Gamma_{jk}^i \rightarrow \Gamma_{\hbar jk}^i = \Gamma_{jk}^i, \\ \text{Laplacian} & : \quad \Delta \rightarrow \Delta_{\hbar} = \hbar \Delta, \\ \text{Lichnerowicz formula} & : \quad \not{D}^2 \rightarrow \not{D}_{\hbar}^2 = \Delta_{\hbar} + V \end{array}$$

ただしここで $V = \frac{\hbar r_M}{4} + c_{\hbar}(\tilde{\Omega}_M(\nu))$ そして r_M はスカラー曲率である。

Proof 各対象上局所的な議論を行う。volume form に関しては

$$\begin{aligned} \text{vol}_M &= \det^{1/2}(g_{ij}(x)) dx \\ \rightarrow \hbar^{-n/2} \text{vol}_M &= \det^{1/2}\left(\frac{1}{\hbar}g_{ij}(x)\right) dx. \end{aligned} \quad (57)$$

⁵ P は $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}[\hbar^{-1}, \hbar]$ の $\mathbb{C}[\hbar^{-1}, \hbar]$ 部分空間で $V^* \otimes_{\mathbb{R}} V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}[\hbar^{-1}, \hbar] = P \oplus \bar{P}, g|_P = 0$ となっているようなもの。

⁶ T^*M の orthonormal (local) frame $e = (e^1, \dots, e^n)$ 、その $S_{\hbar}(M)$ への parallel lift \hat{e} とすると

$$\nabla^S(\hat{e}) = \frac{-1}{4} \omega_{jk} e^j \cdot e^k \cdot \hat{e}$$

となる。通常 orthonormal frame で tangent cotangent bundle を同一視するがここではきちんと区別しておく。係数 $\frac{-1}{4}$ の符号はそのためである。

次に、Christoffel に関しては、

$$\begin{aligned} \Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2} g^{il} \{ \partial_{x^j} g_{kl} + \partial_{x^k} g_{jl} - \partial_{x^l} g_{jk} \} \\ \rightarrow \Gamma_{hjk}^i &= \frac{1}{2} (hg^{il}) \{ \partial_{x^j} (h^{-1} g_{kl}) + \partial_{x^k} (h^{-1} g_{jl}) - \partial_{x^l} (h^{-1} g_{jk}) \}. \end{aligned} \quad (58)$$

更に、Laplacian に関しては、

$$\begin{aligned} \Delta &= g^{ij} (\nabla_i^{\varepsilon} \nabla_j^{\varepsilon} + \Gamma_{ij}^k \nabla_k^{\varepsilon}) \\ \rightarrow \Delta_h &= hg^{ij} (\nabla_i^{\varepsilon} \nabla_j^{\varepsilon} + \Gamma_{ij}^k \nabla_k^{\varepsilon}). \end{aligned} \quad (59)$$

Lichnerowicz の証明は、本間氏の普遍 BW 公式を導く原理による導出方法を用いれば容易。

3.3 熱核の構成

今考えている vectorial gerbe は \mathbb{C} 上のベクトル束とみると階数無限である (よって断面全体は Fréchet 空間である) のでファイバーについて通常のノルムを考えて、それをもちいることによってセクションの C^1 -ノルムを考えるわけにはいかない。

実はこのような $\text{rk} = \infty$ のバンドルに作用している非可換 Dirac 作用素から定まる Dirac-Laplacian について、上手いフィルター付けをしてやることにより、熱核が構成される場合がある。

Proposition 3.8 ([Mi]) 熱方程式

$$(\partial_t + \mathcal{D}_Q^{\varepsilon}) p_t = 0 \quad (60)$$

の

$$p_t(x, y) = q_t(x, y) \sum_{i=0}^{\infty} t^i \Phi_i(x, y) |vol_{M_y}|^{\frac{1}{2}} |_{\mathcal{E}_n} \quad (61)$$

($q_t(x, y) = (4\pi\hbar t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4\hbar t}}$: Euclid heat kernel) を漸近展開とする基本解が各 \mathcal{E}_n ⁷ 毎に存在し、射影系 $\{\mathcal{E}_n\}$ の忘却写像とは可換である。故に、射影極限を定義し、Fréchet 位相に関する解を定めている。

射影系の定義

Weyl 代数の次数 $Wl\text{-deg}$ と \hbar つきの微分形式の次数 $Cl\text{-deg}$ をあわせて (ただし ν と \hbar は 2 次と数えることとする) 全次数を $\text{deg} := Wl\text{-deg} + Cl\text{-deg}$ と定義してやる。それをもちいて射影系を次のように定義する

$$\mathcal{E}^n := \{a \in \mathcal{E} : \text{deg } a = n\}, \quad \mathcal{E}_n := \mathcal{E} / \sum_{l>n} \mathcal{E}^l$$

Proof 平らな空間の熱方程式

$$(\partial_t + \Delta_h) q_t(x) = 0 \quad (62)$$

の解として

$$q_t(x) = (4\pi\hbar t)^{-n/2} e^{-\|x\|^2/4\hbar t} |dx|^{1/2} \quad (63)$$

があるが⁸ ($|dx|^{1/2}$ は half-density (半密度)), 計量が g_h で与えられた曲がった Riemann 多様体上では作用素などが Proposition 3.7 のような変更を受けて、以下のようになる。

$$(\partial_t + \Delta_h - j_h^{1/2} (\Delta_h \cdot j_h^{-1/2})) q_t^h = 0 \quad (64)$$

但し、 $j_h(x) = \det^{1/2}(g_{h,ij}(x))$ 。これを利用して Dirac 作用素 \mathcal{D}_Q の 2 乗の熱核を漸近解析的な手法で求めよう。まず、半密度を考慮に入れて以下のような作用素を $\mathcal{D}_Q^{\varepsilon}$ から定義しておく。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}_h : \Gamma(C_M \otimes S_h(M)) &\rightarrow \Gamma(C_M \otimes S_h(M)) \\ s &\rightarrow j_h^{1/2} (\mathcal{D}_Q^{\varepsilon}(s \cdot j_h^{-1/2})). \end{aligned} \quad (65)$$

すると、熱方程式は半密度を込みにして次の方程式に書きかえられる (cf. [BGV])。

$$(\partial_t + |vol_M|_{g_h}^{-1/2} (\mathcal{D}_Q^{\varepsilon}(s |vol_M|_{g_h}^{1/2}))) (s \cdot q_t^h) = ((\partial_t + t^{-1} \nabla_{\mathcal{R}} + \tilde{\mathcal{D}}_h) s_t) q_t^h = 0. \quad (66)$$

⁷ \mathcal{E}_n の定義は以下説明する。

⁸ Euclid heat kernel と呼んでおこう。

これを解く為に s_t を時間 t に関する形式的冪級数

$$\sum_{i=0}^{\infty} t^i \Phi_i(x, y) |vol_{M_y}|_g^{1/2} \quad (67)$$

だと仮定して、上の式に代入して t の次数毎に 0 とした式を作ると、次のような漸化式ができる。

$$\nabla_{\mathcal{R}} \Phi_0 = 0, \quad (68)$$

$$(\nabla_{\mathcal{R}} + i) \Phi_i = -\tilde{J}_h \cdot \Phi_{i-1} \quad (i > 0). \quad (69)$$

熱核の初期条件から $\Phi_0 = I$ もわかる。これについては、parallel transform を利用して解が構成できる。しかし、これではまだ形式的な熱核を構成したに過ぎない。そこで、続いて近似解および厳密解を構成するのであるがそのためにはベクトル束の C^1 -ノルムが必要となる。しかし、今考えているベクトル束はランクが無限次元なので通常のように議論できない。これを回避する為に Weyl 代数の次数 $Wl-deg$ と \hbar -つきの微分形式の次数 $Cl-deg$ をあわせて (ただし ν と \hbar は 2 次と数えることとする) 全次数を $\deg = Wl-deg + Cl-deg$ と定義してやった。それを使って $\mathcal{E}^n = \{a \in \mathcal{E} : \deg a = n\}$, $\mathcal{E}_n = \mathcal{E} / \sum_{l>n} \mathcal{E}^l$ と置くのであった。すると

$$\tilde{J}_h : s \rightarrow j_h^{1/2} ((\mathcal{D}_Q)^2 (s \cdot j_h^{-1/2}))$$

と Lichnerowicz formula

$$(\mathcal{D}_Q)^2 = \hbar \nabla^* \nabla + c_h(\tilde{\Omega}_M(\nu)) + \frac{\hbar r_M}{4}$$

における \hbar の作用の仕方から \tilde{J}_h によって全次数が下がらないことが容易にわかる。以上から、議論が無限次元のベクトル束から有限次元の商ベクトル束 \mathcal{E}_n に帰着されるということがわかる。よって、次数 n を固定して、 C^1 -ノルムを考えることができるようになる。その結果、漸近解析的⁹に近似解そして厳密解が構成できる。以上述べてきたことをまとめると命題が得られる。

3.4 局所自明化と共形変換

このセクションでは Mehler's formula の導出を行う。シンプレクティック構造と相性の良い複素構造を固定し、そこからリーマン計量を定義しておく。

1. 点 x_0 の周りの正規座標 (U, x) を固定する。 $\{e_i\}$ で x_0 における g_{x_0} に関する正規直交基底 $\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}$ を x_0 から出る測地線に沿っての平行移動による正規直交枠とする。また、その双対を $\{e^i\}$ とあらわす。この自明化のもとで Clifford 作用は定数作用となり、接続は $\nabla = \nabla^{\mathcal{E}} = d + \omega$ とあらわせる。ただし、 ω は twisted quantum connection の接続形式である。 Ω を ∇ の曲率テンソルとする。そのとき以下がよく知られている:

Proposition 3.9

$$\sum (|\alpha| + 1) \partial^\alpha \omega_i(0) \frac{x^\alpha}{\alpha!} = \sum \partial^\alpha \Omega(\partial_k, \partial_i)(0) x^k \frac{x^\alpha}{\alpha!}. \quad (70)$$

Proof cf. [Sa].

両辺の各次数ごとに係数の比較を行って

$$\partial_j \omega_i(0) = -\frac{1}{2} \Omega(\partial_i, \partial_j)(0), \quad \partial_\ell \partial_j \omega_i = \frac{1}{3} \partial_\ell \Omega(\partial_j, \partial_i)(0) \quad (71)$$

さらに Taylor expansion により、

$$\begin{aligned} \omega_i(x) &\sim -\frac{1}{2} \sum_j R^{Spin}(\partial_i, \partial_j) x^j - \frac{1}{2} \sum_j F(\partial_i, \partial_j) x_j + \sum O_{ik\ell}(|x|^2) e_k e_\ell + \sum O_i(|x|) \\ &= -\frac{1}{8} \sum_{k\ell} g \left(R^{LC}(\partial_k, \partial_\ell) \partial_i, \sum_j x^j \partial_j \right) e_k e_\ell \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_j F(\partial_i, \partial_j) x^j + \sum O_{ik\ell}(|x|^2) e_k e_\ell + \sum O_i(|x|) \end{aligned} \quad (72)$$

⁹線形偏微分方程式において良く使われる手法である。たとえば Schrödinger 方程式をアイコナル方程式、高次輸送方程式を解くことに帰着させて時間依存解を求める方法がある。詳しくは [Fu], [Le], あるいは [BGV] を参照のこと。

がわかる。ただし、 R^{spin} (resp. R^{LC}) は spin (resp. Levi-Civita) connection の曲率、 $F = \Omega_\nu(\mathcal{A}_M)$ 、そして $O(r)$ は Landau's symbol. かようにして以下の公式を得る。

$$\begin{aligned} \nabla_i(x) &= \partial_i - \frac{1}{8} \sum_{k\ell} g \left(R^{LC}(\partial_k, \partial_\ell) \partial_i, \sum_j x^j \partial_j \right) e_k e_\ell \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_j F(\partial_i, \partial_j) x^j + \sum O_{ik\ell}(|x|^2) e_k e_\ell + \sum O_i(|x|). \end{aligned} \quad (73)$$

2. 次に Proposition 3.8 において得られた発展方程式の共形変換 (conformal rescaling) を考えたい。粗っぽくいえば conformal rescaling とは共変 (resp. 反変) 時間方向に u (resp. u^{-1}) をかけ、そして共変 (resp. 反変) 空間方向に $u^{\frac{1}{2}}$ (resp. $u^{-\frac{1}{2}}$) をかけるということである。もう少し詳しい定義を以下に与えよう。Heat kernel $k_h(t, \mathbf{x})$ は $V^*[\hbar^{-1}, \hbar] \otimes_{\mathbb{C}[\hbar^{-1}, \hbar]} \text{End}_{C\ell_h}(Q_M \otimes S_h(M)) \otimes$ “density bundle”-値断面とみなされるべきなので、厳密な conformal rescaling の定義のためには t, \mathbf{x} という変数や微分形式 dx のみならず “density bundle” に関する影響も考慮に入れねばならない。

Definition 3.10

$$\alpha \in C^\infty \left(\mathbb{R}_+ \times U; \Lambda V^*[\hbar^{-1}, \hbar] \otimes_{\mathbb{C}[\hbar^{-1}, \hbar]} \text{End}_{C\ell_h}(Q_M \otimes S_h(M) \otimes |\Omega|^{\frac{1}{2}}) \right)$$

に対し、共形変換 $\delta_u(\alpha)$ を以下のように定義しよう。

$$r_h(t, u, \mathbf{x}) = (\delta_u(\alpha))(t, \mathbf{x}) = u^{n/2} \sum_{i=0}^n u^{-i/2} \alpha(ut, u^{1/2} \mathbf{x})_{[i]}$$

ただしここで、 $\alpha_{[i]}$ は α の i th-differential form を意味している。 $u^{n/2}$ という因子は “density bundle” からの寄与。そして、 α は $V^*[\hbar^{-1}, \hbar] \otimes_{\mathbb{C}[\hbar^{-1}, \hbar]} \text{End}_{C\ell_h}(Q_M \otimes S_h(M))$ -値断面とみなされている。Euclid heat kernel $g_i(\mathbf{x}) = (4\pi\hbar t)^{-n/2} e^{-\|\mathbf{x}\|^2/4\hbar t} |\mathbf{d}\mathbf{x}|^{1/2}$, が conformal rescaling の下で invariant であることにも注意を要す。

Proposition 3.8 の rescaled heat equation は以下ようになる。

$$\begin{aligned} (\partial_t + u\delta_u(\mathcal{P}_Q)^2 \delta_u^{-1}) r(u, t, \mathbf{x}) &= u^{\frac{n}{2}} \left(u\delta_u \partial_t \delta_u^{-1} + u\delta_u(\mathcal{P}_Q)^2 \delta_u^{-1} \right) (\delta_u k)(t, \mathbf{x}) \\ &= u^{\frac{n}{2}+1} \left(\delta_u \partial_t + \delta_u(\mathcal{P}_Q)^2 \right) k(t, \mathbf{x}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (74)$$

というわけでわれわれは以下のような rescaling limit に興味を持つ。

$$u\delta_u(\mathcal{P}_Q)^2 \delta_u^{-1} := u\delta_u(\mathcal{P}_Q)^2 \delta_u^{-1} \longrightarrow ? \quad \text{when } u \rightarrow 0.$$

\mathcal{P}_Q が ∇^Q によって非可換化された接続 ∇ をもちいて定義されていることを考えて、まず ∇ が conformal rescaling の下でどのような振る舞いをするかを調べておこう。

Proposition 3.11 $\nabla_i^u := u^{\frac{1}{2}} \delta_u \nabla_i \delta_u^{-1}$ とおく。

$$\nabla_i^u \xrightarrow{u \rightarrow 0} \partial_i - \frac{1}{8} \sum_{k\ell} g(R^{LC}(\partial_k, \partial_\ell) \partial_i, \partial_j) e_k \wedge e_\ell \wedge = \partial_i - \frac{1}{4} \sum_{ij} R_{ij} x^j$$

Proof

$$\begin{aligned} &\nabla_i^u \\ &= u^{\frac{1}{2}} \delta_u \nabla_i \delta_u^{-1} \\ &\stackrel{(73)}{=} \partial_i - \frac{1}{8} \sum_{k\ell} g \left(R^{LC}(\partial_k, \partial_\ell) \partial_i, \sum_j x^j \partial_j \right) \cdot (e_k \wedge -u^1 \iota_{e_k}) (e_\ell \wedge -u^1 \iota_{e_\ell}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_j F(\partial_i, \partial_j) (u^{\frac{1}{2}} x) \\ &\quad + u^{\frac{1}{2}} \sum f_{ik\ell} (u^{\frac{1}{2}} x) (e_k \wedge -u^1 \iota_{e_k}) (e_\ell \wedge -u^1 \iota_{e_\ell}) + u^{\frac{1}{2}} g_i (u^{\frac{1}{2}} x) \end{aligned}$$

がえられ、更に $u \rightarrow 0$ の極限は以下のようになる：

$$\partial_i - \frac{1}{8} \sum_{kl} g \left(R^{LC}(\partial_k, \partial_l) \partial_i, \partial_j \right) e_k \wedge e_l \wedge = \partial_i - \frac{1}{4} \sum_{ij} R_{ij} x^j \quad (75)$$

$$\text{where } R_{ij} := \sum_{kl} g \left(R^{LC}(\partial_k, \partial_l) \partial_i, \partial_j \right) e_k \wedge e_l \wedge$$

以上により ∇ 自身の conformal rescaling の下での挙動がわかった。このことを使うと、以下がわかる：

Proposition 3.12 $C^\infty(U, \Lambda^* T_q M \otimes \text{End}_{C^1}(Q_q \otimes S_h(M)))$ に作用する作用素 $u \delta_u \mathcal{P}_Q^2 \delta_u^{-1}$ は $u \rightarrow 0$ の時に以下のような極限を持つ：

$$K = - \sum_i \left(\partial_i - \frac{1}{4} \sum_j R_{ij} x^j \right)^2 + F.$$

Proof Lichnerowicz formula と

$\hbar \nabla^* \nabla = -\hbar \sum (\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i})$ をの組み合わせによってわれわれは

$$\begin{aligned} & u \delta_u (\mathcal{P}_Q)^2 \delta_u^{-1} \\ \stackrel{\text{Prop. 3.11}}{=} & -\hbar \sum_i (\nabla_i^u)^2 + \sum_i F(e_i, e_j) (u^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}) (e_k \wedge -u e_{c_k}) (e_l \wedge -u e_{c_l}) \\ & + \frac{u}{4} \kappa(u^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}) + \hbar u^{\frac{1}{2}} \nabla_{\nabla_{e_i} e_i}^u \end{aligned} \quad (76)$$

を得る。最後に

$$\begin{aligned} & -\hbar \sum_i (\nabla_i^u)^2 + \sum (\Omega_\nu(\mathcal{A}_M)(e_i, e_j) (u^{\frac{1}{2}} \mathbf{x})) (e_k \wedge -u e_{c_k}) (e_l \wedge -u e_{c_l}) \\ \stackrel{u \rightarrow 0 \& \text{Prop. 3.11}}{\rightarrow} & -\hbar \sum (\partial_i - \frac{1}{4} \sum_j R_{ij}^C x^j)^2 + \sum \Omega_\nu(\mathcal{A}_M)(e_i, e_j) e_k \wedge e_l \wedge \end{aligned} \quad (77)$$

$$\text{3rd, 4th, 5th terms } \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0 \quad (78)$$

を使えば命題を得ることができる。

$1/\hbar$ をかけて、以下を得ることができる。

$$\left(\frac{\partial}{\hbar \partial t} - \sum_i \left(\partial_i - \frac{1}{4} \sum_j R_{ij} x^j \right)^2 + \frac{\Omega_\nu(\mathcal{A}_M)}{\hbar} \right) p_t(\mathbf{x}) = 0 \quad (79)$$

この方程式を解くと以下の公式を得る。

$$(4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \det^{1/2} \left(\frac{tR/2}{\sinh(tR/2)} \right) \times \exp \left(-\frac{1}{4t} \langle \mathbf{x} | \frac{tR}{2} \coth \left(\frac{tR}{2} \right) | \mathbf{x} \rangle - t \Omega_\nu(\mathcal{A}_M) \right).$$

以上まとめることによって以下の結論に到達する：

Proposition 3.13 1. 上記の局所自明化と conformal rescaling $\delta(u)$ によって書き換えられた方程式は以下のような極限を持つ：

$$(u \delta_u \mathcal{P}_Q^2 \delta_u^{-1})^2 \rightarrow - \sum_i \hbar \left(\partial_i - \frac{1}{4} \sum_j R_{ij} x^j \right)^2 + \Omega_\nu(\mathcal{A}_M)$$

as $u \rightarrow 0$.

2. $\lim_{u \rightarrow 0} (u \delta_u \mathcal{P}_Q^2 \delta_u^{-1})^2$ の heat kernel $r_h(t, u, \mathbf{x})$ は以下のようになる：

$$(4\pi t \hbar)^{-\frac{n}{2}} \det^{1/2} \left(\frac{t \hbar R/2}{\sinh(t \hbar R/2)} \right) \times \exp \left(-\frac{1}{4t \hbar} \langle \mathbf{x} | \frac{t \hbar R}{2} \coth \left(\frac{t \hbar R}{2} \right) | \mathbf{x} \rangle - t \Omega_\nu(\mathcal{A}_M) \right),$$

as $u \rightarrow 0$.

注意：

(1) [BGV] にあるように普通この式に類似公式を導くのは結構面倒で行列のサイズを 2×2 くらいに話を掃きさせて済ませてしまうことが多い。計算の際、大森・前田・吉岡・宮崎の Star exponential function of quadratic form の公式 [OMMY2] を用いることによって直接計算が可能となる。その公式の結果は Appendices を参照のこと。

(2) この式を (quantized) Mehler's formula と呼ぶ。

(3) この式で、微分形式は Clifford 作用のスケール変換での極限、i.e. Grassmann の Λ で作用している。

(4) $\tilde{\Omega}_M(\nu)$ は twisted quantum gerbe を用いた結果 Lichnerowicz で抽出できた。

(5) 熱核のときと同じような議論で Dirac 作用素そのものも

1. フィルターを保つ
2. 従って、波動方程式に形式的な解が構成できる。

ことなどがわかる。

3.5 Noncommutative differential geometry

本稿において用いられる K-theory は C^* -algebras に定義される K-theory [W-O] の概念を拡張して、積構造の入った局所凸線形空間に定義されるものである。実は同様の拡張は KK-theory にまで及んでいて、局所凸線形空間に関して bivariant K-theory (kk と小文字で表す) と呼ばれるものが定義されている。さらに bivariant cyclic theory も確立されている。 C^* -algebra までの K-theory と本質的に異なる点は考えている基本的な関数空間が連続関数環から微分可能関数環に置き換わり、homotopy 不変性の代わりに difftopy 不変性を持っているという点である (p.66 [CST])。以上 bivariant K-theory や bivariant cyclic theory と Connes' Chern character の定義と性質は他書 ([Cu], [CQ]) に譲って、ここでは必要になる範囲で K-theory の準備をする ([Ph], [CST])。

$C[a, b]$ で端点における微分が消えるような C^∞ -function 全体がなす Fréchet $*$ -algebra とする。 $C(a, b)$ は $C[a, b]$ の部分空間で端点において関数の値そのものも消えるもの全体とする。 \mathcal{F} を Fréchet $*$ -algebra とする。 \mathcal{F} と区間 I に対して、 $\mathcal{F}I := \mathcal{F} \hat{\otimes} CI$ と記す。また、

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \text{"smooth compact operators"} \\ &= \left\{ [a_{ij}]_{i,j \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \mid a_{ij} \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}; p_n([a_{ij}]) := \sum_{ij} |1+i+j|^n |a_{ij}| < \infty \right\} \\ &\cong S(\mathbb{R}). \end{aligned} \quad (80)$$

として、これを rapidly decreasing matrix algebra と呼んでおく。ちなみに急減少という条件は Fourier transform を通して無限回微分可能性を言っている。これが完備な Fréchet $*$ -algebra になることが知られている。

Definition 3.14 与えられた continuous homomorphism $\rho_0, \rho_1 : A \rightarrow B$ について continuous homomorphism の道 $\rho_t, t \in [0, 1]$ が存在して、 $\rho_i = \rho_i$ ($i = 0, 1$) と任意の $a \in A$ に対して写像 $t \mapsto \rho_t(a)$ が無限回微分可能であるとき、 ρ_0 と ρ_1 は difftopic であると言う。この条件は continuous homomorphism $\rho : A \otimes C^\infty([0, 1]) \rightarrow B$ が存在し、 $\rho(x)(0) = \rho_0(x)$ かつ $\rho(x)(1) = \rho_1(x)$ が成り立っているという条件に置き換えてよい。さらに、continuous homomorphism $\rho : A \otimes C([0, 1]) \rightarrow B$ が存在し、 $\rho(x)(0) = \rho_0(x)$ かつ $\rho(x)(1) = \rho_1(x)$ が成り立っているという条件とも同値である。したがってこれは同値関係 $\sim^{difftopic}$ を定める (端の点で微分が消えて微分まで込めてうまく繋がってくる)。

Definition 3.15 (K-group の定義)

$$K_0(\mathcal{F}) = \left\{ [e] \mid e \text{ is an idempotent element } \in M_2((\mathcal{K} \hat{\otimes} \mathcal{F})^\sim), \right. \\ \left. \text{such that } e - e_0 \in M_2(\mathcal{K} \hat{\otimes} \mathcal{F}) \right\}, \quad (81)$$

$$K_1(\mathcal{F}) = K_0(\mathcal{F}(0, 1)) \quad (82)$$

但し、 $[\]$ は $\sim^{difftopic}$ による同値類、 $\hat{\otimes}$ は completion of algebraic tensor product を意味している。

これらはカテゴリーが Fréchet $*$ -algebra である時、非常に良い性質を持つ。基本的なものを列挙すると、安定性 (stability)、連続性 (continuity)、ディフトピー不変性 (difftopy invariance)、6-term exact sequence、Bott periodicity など等。

1. **stability:** $K_*(\mathcal{A}) \cong K_*(\mathcal{A} \times \mathcal{K})$,
2. **continuity:** $\{A_i\}$ が Fréchet $*$ -algebra の帰納系とするとき、 $K_*(\lim_{\rightarrow} A_i) \cong \lim_{\rightarrow} K_*(A_i)$,
3. **diffotopy invariance:** ρ_0 と ρ_1 は diffotopic であるとき K-group 上に誘導される homomorphism ρ_{0*}, ρ_{1*} は一致する。
4. **6-term exact sequence:** $0 \rightarrow \mathcal{I} \xrightarrow{i} \mathcal{A} \xrightarrow{p} \mathcal{A}/\mathcal{I} \rightarrow 0$ から以下の 6-term exact sequence

$$\begin{array}{ccccc} K_0(\mathcal{I}) & \xrightarrow{i} & K_0(\mathcal{A}) & \xrightarrow{p} & K_0(\mathcal{A}/\mathcal{I}) \\ \partial_1 \uparrow & & & & \downarrow \partial_0 \\ K_1(\mathcal{A}/\mathcal{I}) & \xleftarrow{p} & K_1(\mathcal{A}) & \xleftarrow{i} & K_1(\mathcal{I}) \end{array} \quad (83)$$

が誘導される。

5. **Bott periodicity:** $K_i(\mathcal{A}) \cong K_i(\mathcal{A} \otimes C_0(\mathbb{R}^2))$, ($i = 0, 1$)
6. **strongly Morita equivalence:** 強森田同値は K-theory の同型を induce する。

これらについては [Ph] に詳しく記されている。

さて、非可換微分幾何学において重要と思われる性質として

Proposition 3.16 A : unital C^* -algebra $\supset^{dense} \mathcal{A}$ unital $*$ -algebra, holomorphically closed, この時 $K_0(\mathcal{A}) \cong K_0(A)$ 。

Fredholm 作用素の指数について思い出そう。記号の乱用になるがコンパクト作用素からなる C^* -algebra を \mathcal{K} 、Bounded operator のなす C^* -algebra を \mathcal{B} 、 $\mathcal{Q} = \mathcal{B}/\mathcal{K}$ を Calkin algebra としよう。Atkinson によれば operator T が Fredholm であるとは、その定める Calkin algebra の元 $[T]$ が \mathcal{Q} 内で可逆であることと同値であり、それによって自然に $K_1(\mathcal{Q})$ (直前の定義を思いだそう) の元 $p(T)$ を定めている。この状況下で指数とは bounded operator のなす C^* -algebra \mathcal{B} と Calkin algebra \mathcal{Q} による short exact sequence:

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{i} \mathcal{B} \xrightarrow{p} \mathcal{Q} \rightarrow 0$$

から誘導される 6-term exact sequence

$$\begin{array}{ccccc} K_0(\mathcal{K}) & \xrightarrow{i} & K_0(\mathcal{B}) & \xrightarrow{p} & K_0(\mathcal{Q}) \\ \partial_1 \uparrow & & & & \downarrow \partial_0 \\ K_1(\mathcal{Q}) & \xleftarrow{p} & K_1(\mathcal{B}) & \xleftarrow{i} & K_1(\mathcal{K}) \end{array} \quad (84)$$

において ∂_1 で $p(T)$ を送ったものである。

さて、我々のケースに戻って指数の定義を与えるために通常のコンパクト作用素からなる C^* -algebra \mathcal{K} にあたるものを次のように定めよう。

Definition 3.17

$$\tilde{\mathcal{K}} = \{k \in \text{End } \Gamma(Q_M \otimes S_n(M)) : \text{フィルターを保ち、各 } \varepsilon_n \text{ ごとにコンパクト}\}$$

この定義は D_n^2 の熱核の持っている性質を念頭に置けば自然なものと思われる。しかし、これは \mathcal{K} とは異なっているだけでなく、本質的に C^* -algebra (あるいはその densely defined $*$ -algebra) とみなすことが難しい。

さて、6-term exact sequence における ∂_1 を使って指数を定義したい。

Definition 3.18 ディラック作用素対応する指数とは

$$\begin{array}{ccccc} K_0(\tilde{\mathcal{K}}) & \xrightarrow{i} & K_0(\tilde{\mathcal{B}}) & \xrightarrow{p} & K_0(\tilde{\mathcal{Q}}) \\ \partial_1 \uparrow & & & & \downarrow \partial_0 \\ K_1(\tilde{\mathcal{Q}}) & \xleftarrow{p} & K_1(\tilde{\mathcal{B}}) & \xleftarrow{i} & K_1(\tilde{\mathcal{K}}) \end{array} \quad (85)$$

において ∂_1 で $p(D_Q)$ を送ったものである。ただし

$$\tilde{\mathcal{B}} = \{b \in \text{End } \Gamma(Q_M \otimes S_n(M)) : \text{フィルターを保ち、各 } \varepsilon_n \text{ ごとに有界}\}$$

Remark 以下のように指数を定義することもできる。定義の前に必要な事実をひとつ。

Theorem 3.19

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in C_0(\mathbb{R}) \otimes M_2(\mathbb{C}) \mid a, d : \text{ev}, b, c : \text{odd} \right\}$$

とする。

$$\begin{array}{ccc} K_0(\mathcal{A}) & \cong & K_0(C_0\mathbb{R}) * \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z} \\ \hat{e}_x - e_0 & \leftrightarrow & e_x - e_0 \leftrightarrow 1, \end{array} \quad (86)$$

但し、 $\hat{e}_x = \begin{bmatrix} 1-\varphi & \psi \\ \psi & \varphi \end{bmatrix}$, $e_x := \begin{bmatrix} \frac{1}{1+x^2} & \frac{x}{1+x^2} \\ \frac{x}{1+x^2} & \frac{x^2}{1+x^2} \end{bmatrix}$, $e_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\varphi : \text{ev}$, $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\pm\infty) = 1$, $\psi : \text{odd}$, $\psi^2 = \varphi(1-\varphi)$

これらの、 \hat{e}_x, e_x に“代入”と言う操作を考えたい。

Definition 3.20

$$\text{Ind } \mathcal{D}_Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+p_Q^2} & \frac{p_Q}{1+p_Q^2} \\ \frac{p_Q}{1+p_Q^2} & \frac{p_Q^2}{1+p_Q^2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in K_0(\mathcal{K}).$$

を (Dirac 作用素から定まる) 指数と呼ぼう¹⁰。

以上で指数を考えられるようになったので (Fred-Index というようなカーネルの次元の差と言う表示ができないのだが ...)、トレースにあたるものの住処を考えたい。

Definition 3.21 (巡回 cocycle、巡回 cohomology) (\mathcal{F}, \cdot) を今までと同様に Fréchet *-algebra としておく。 \mathcal{F} 上の $(k+1)$ -線形写像 ϕ が

$$\phi(a_0, \dots, a_k) = (-1)^k \phi(a_1, \dots, a_k, a_0)$$

を満たすときを *cyclic k-cochain* という。 *cyclic k-cochain* 全体を $C_\lambda^k(\mathcal{F})$ であらわしておく。 *Hochschild coboundary operator* $b : C_\lambda^k(\mathcal{F}) \rightarrow C_\lambda^{k+1}(\mathcal{F})$ を次のように定義する。

$$(b\phi)(a_0, \dots, a_{k+1}) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \phi(a_0, \dots, a_j \cdot a_{j+1}, \dots, a_{k+1}) + (-1)^{k+1} \phi(a_{k+1}, a_0, \dots, a_k) \quad (87)$$

$b^2 = 0$ 。ゆえに $(C_\lambda^k(\mathcal{F}), b)$ は *cochain complex* になる。このとき

$$Z_\lambda^k(\mathcal{F}) = \{a \in C_\lambda^k(\mathcal{F}) \mid b\phi = 0\}$$

の元を *cyclic k-cocycle* と呼ぶ。また、 $(C_\lambda^k(\mathcal{F}), b)$ から定義される *cohomology* を $H_\lambda^k(\mathcal{F})$ (or $HC^*(\mathcal{F})$) と記し、 \mathcal{F} の *cyclic cohomology* と言う。

続いて巡回コホモロジーと K-theory とのあいだの関係を見よう。

Definition 3.22 $\text{tr} \in Z_\lambda^0(M_n(\mathbb{C}))$ とのカップ積により次の写像が定まる。

$$\begin{array}{ccc} H_\lambda^k(\mathcal{F}) & \rightarrow & H_\lambda^k(M_n(\mathcal{F})) \\ \phi & \mapsto & \phi \# \text{tr}. \end{array} \quad (88)$$

ただし、

$$(\phi \# \text{tr})(a_0, \dots, a_k) = \sum_{j_0, \dots, j_k} \phi(a_{0, j_0 j_1}, a_{1, j_1 j_2}, \dots, a_{k, j_k j_0}), \quad (89)$$

$a_{i, pq}$ は $a_i \in M_n(\mathcal{F})$ の (p, q) -成分である。

Definition 3.23 $[e] \in K_0(\mathcal{F})$, $[\phi] \in H_\lambda^{2n}(\mathcal{F})$ に対し、

$$\langle [e], [\phi] \rangle = (2\pi i)^{-n} (n!)^{-n} (\phi \# \text{tr})(e, \dots, e)$$

とおくと双加法的ペアリング (*pairing*) になる。

さて指数と巡回コサイクルとの *pairing* で非可換の度合いを測ろう。

¹⁰いわゆる、Bott プロジェクションあるいはグラフ・プロジェクションといわれるものである。

Definition 3.24

$$\text{Ind}_r(\mathcal{D}_Q) = (\text{Ind}\mathcal{D}_Q, \tau), \quad (\tau \in HC^0(\tilde{K})).$$

以上の準備の下、Propositions 3.7, 3.8, 3.12 を用いて、我々は次を得た。

“Theorem”

1. \mathcal{D}_Q^2 は熱核をもつ。更にその熱核は時間に関する漸近展開を持つ。
2. \mathcal{D}_Q は Lichnerowicz formula をもつ。
3. \mathcal{D}_Q は McKean-Singer 型の Lemma をみたす。

さらに $\exists \tau$: 巡回コサイクル、 $\forall[*]$: star product、 $\exists \mathcal{D}_Q$: Dirac operator detecting $c[*]$. i.e.

$$\text{Ind}_r(\mathcal{D}_Q) = (\hat{A}(M)e^{\Omega_\nu[*]}, [M]). \quad (90)$$

4 Appendices

4.1 A: Star exponential functions

Weyl algebra W_\hbar とは \mathbb{C} 上 $z_1, \dots, z_m, z_{m+1}, \dots, z_{2m}$ により生成される代数で、以下の関係式を満たすものとして定義された。

$$z_i * z_j - z_j * z_i (= [z_i, z_j]_*) = \nu J^{ij}, \quad (\nu = i\hbar) \quad (91)$$

但しここで、 J は $2m \times 2m$ 行列で次のように定義される: $J = \begin{bmatrix} 0 & -J_m \\ J_m & 0 \end{bmatrix}$ また、 \hbar はパラメーターであり $[a, b] = a * b - b * a$. W_\hbar の積を $*$ と記そう。 $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m, z_{m+1}, \dots, z_{2m})$ とおく。 W_\hbar を具体的に実現する方法として、normal ordering, the anti-normal ordering そして、Weyl ordering などが良く知られている。これらは非可換な代数を可換な世界の非可換積として捉えるための方法である。このような方法はほかにもたくさんある。任意の symmetric complex $2m \times 2m$ matrix $K = (K^{ij})$ 、に対して $\Gamma = (\Gamma^{ij}) = (K^{ij} + J^{ij})$ として、次のような積を定める。

$$f(\mathbf{z}) *_{K} g(\mathbf{z}) = f \exp\left\{\frac{\nu}{2} \left(\sum_{i,j=1}^{2m} \overleftarrow{\partial}_{z_i} \Gamma^{ij} \overrightarrow{\partial}_{z_j}\right)\right\} g, \quad (92)$$

そうすると積公式 (92) は $f, g \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$ に関して well-defined であることがすぐわかる。但し、 $\mathbb{C}[\mathbf{z}] = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_{2m}]$. また、積公式 (92) は次の関係を満たす。

$$z_i *_{K} z_j - z_j *_{K} z_i (= [z_i, z_j]_{*K}) = \nu J^{ij}, \quad (93)$$

これは Weyl algebra W_\hbar の交換関係 (91) と一致。このように実現の仕方は無数にあり代数としては同型であるが、表示がだいぶ異なる。また超越的な世界にまで来るとこれらが本質的に異なることもわかる。というのも抽象的な積 $*$ がある表示では発散し、ほかの表示では収束するという状況が起こってくる。これは代数的な世界を超越的な世界にまで広げた世界を多様体のごとく考える時、表示というものがあたかも座標系のごとき役割を果たしていると思ふべきであることを示唆している。

Proposition 全ての、complex symmetric $2m \times 2m$ matrix K 、に対して、 $(\mathbb{C}[\mathbf{z}], *_{*K})$ は W_\hbar と同型な結合的代数をなす。

4.1.1 $e_*^{tA_*}(\mathbf{z})$ via K -ordering

$A \in \text{Sym}(2m, \mathbb{C})$ に対して、 $A[\mathbf{z}]$ で以下のように定義される symmetric quadratic function

$$A[\mathbf{z}] = \sum_{i,j=1}^{2m} A_{ij} z_i z_j. \quad (94)$$

を表すこととする。 $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} - \{0\}$ とおき、 \mathcal{F} を以下で定義された集合とする:

$$\mathcal{F} = \{F = g \exp Q[\mathbf{z}] \mid g \in \mathbb{C}^\times, Q \in \text{Sym}(2m, \mathbb{C})\}. \quad (95)$$

$A \in \text{Sym}(2m, \mathbb{C})$ に対して、

$$A_{*K}(z) = \sum_{i,j=1}^{2m} A_{ij} \frac{1}{2} (z_i *_{K} z_j + z_j *_{K} z_i). \quad (96)$$

とする。この時積公式 (92) から

$$A_{*K}(z) = A[z] + \nu \text{Tr} K A. \quad (97)$$

がわかる。我々は、 $A \in \text{Sym}(2m, \mathbb{C})$ から定まる 2 次形式 $A_*(z)$ に対し、 K -ordering を用いて star exponential functions の表示を与えたい。その為に、 $F_K(t) = e^{A_{*K}(t)}$ として、次のような発展方程式を考えよう。

$$\begin{cases} \partial_t F_K(t) = A_{*K}(z) *_{K} F_K(t), \\ F_K(0) = 1. \end{cases} \quad (98)$$

積公式 (92) と (96) によって、発展方程式 (98) が微分方程式として記述される。そして、解が存在する時その一意性もわかる。

$$F_K(t) = g_K(t) \exp Q_K(t)[z], \quad \text{where } Q_K(t)[z] \in \text{Sym}(2m, \mathbb{C}), \quad (99)$$

とおけば、方程式 (98) は $g_K(t)$ と $Q_K(t)[z]$ に関する常微分方程式系と同値になり、それは具体的に解くことが出来て次のような定理を得る。

Theorem 発展方程式 (98) は唯一の解析的解 $F_K(t) \in \mathcal{F}$ をもち、その具体的な形が次のように与えられる：

$$F_K(t) = g_K(t) \exp Q_K(t)[z], \quad (100)$$

ただし、

$$Q_K(t) = \frac{-J}{\hbar} (\tan(-t\nu J A)) \cdot (I - iK \tan(-t\nu J A))^{-1} \quad (101)$$

$$g_K(t) = \left(\det(\cos(-t\nu J A) - iK \sin(-t\nu J A)) \right)^{-1/2}. \quad (102)$$

参考文献

- [A] Aristide, T An Atiyah-Singer theorem for gerbes, math.DG/0302050v1
- [B] Bayen, F. Star exponentials of the elements of the homogeneous symplectic Lie algebra, Lett. Math. Phys. 6 (1982), 491-497
- [BCMMS] ouwknegt, P. Carey, A. Mathai, V. Murray, M. Stevenson, M. Twisted K -theory and K -theory of bundle gerbes, Commun. Math. Phys. 228 (2002), no.1 17-45
- [BFFLS] Bayen, F., Flato, M., Fronsdal, C., Lichnerowicz, A. and Sternheimer, D. Deformation theory and quantization I, Ann. of Phys. 111 (1978), 61-110.
- [BGV] Berline, N. Getzler, E. and Vergne, M. Heat Kernels and Dirac Operators, Springer-Verlag, 298(1996)
- [Br] Brylinski, J-L. Loop spaces, Characteristic classed and Geometric quantization, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1993
- [BW] Bursztyn, H. and Waldmann, S. Bimodule deformations, Picard groups and contravariant connections, math.QA/0207255
- [C1] Connes, A Non-commutative differential geometry, Parts I and II, IHES. Publ. Math. 62 (1985), 257-360
- [C2] Connes, A. Noncommutative geometry, Academic Press, (1994)
- [CD] Connes, A. and Dubois-Violette, M. Noncommutative finite-dimensional manifolds I, spherical manifolds and related examples, math.QA/0107070
- [CF] Cattaneo, A.S. and Felder, G. A path integral approach to the Kontsevich quantization formula, Commun. math. Phys. 212(2000), 591-611
- [CST] Cuntz, J. Tsygan, B. and Skandalis, G. Cyclic Homology in Non-Commutative Geometry, EMS. 121, Springer, (2004)

- [Cu] Cuntz, J. *Bivariate K-theorie für lokalkonvexe Algebren und der bivariate Chern-Connes-Charakter*, Docum. Math. J. DMV 2 (1997), 139-182.
- [CQ] Cuntz, J. Quillen, *Excision in bivariate periodic cyclic cohomology*, Invent. Math. 127 (1997), 67-98.
- [De] Deligne, P. *Déformation de l'Algèbre des Fonctions d'une Variété Symplectique: Comparaison entre Fedosov et De Wilde, Lecomte*, Selecta Math. New Series 1 No.4 (1995), 667-697
- [DL] De Wilde, M. and Lecomte, P. B. *Existence of star-products and formal deformations of the Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds*, Lett. Math. Phys. 7 (1983), 487-496.
- [Dr] Drinfel'd, V.G. *Quantum groups*, Proc. ICM86, Berkeley, AMS. 1(1987), 101-110
- [EGT] El Galiou, M. and Tihami, A. *Star-product of a quadratic Poisson structure*, Tokyo Jour. Math. 19(1996), no2, 475-498
- [ENN] Elliott, G.A. and Natsume, T. and Nest, R. *The Heisenberg group and K-theory*, K-theory, 7 (1993), 409-428
- [ENN] Elliott, G.A. and Natsume, T. and Nest, R. *The Atiyah-Singer index theorem as passage to the classical limit in quantum mechanics*, Commun. Math. Phys. 182(1996), 505-533
- [FL] Fiorese, B. and Lledo, M. A. *A Comparison Between Star Products on Regular Orbits of Compact Lie Groups*, math.QA/0106129 v2
- [F1] Fedosov, B. V. *A simple geometrical construction of deformation quantization*, J. Differential Geom. 40 (1994), 213-238.
- [F2] Fedosov, B.V. *Deformation quantization and index theory*, Akademie Verlag, (1996)
- [Fuj] Fujiwara, D. *Mathematical method of Feynman path integrals*, Springer-Verlag, (1999) (in Japanese)
- [Ge] Getzler, E. *Pseudodifferential Operators on Supermanifolds and the Atiyah-Singer Index Theorem*, Commun.Math.Phys.92, (1983)pp.163-178.
- [Gi] Gilkey, P. *Invariance theory, the heat equation and the Atiyah-Singer index theorem*, 2nd ed. CRC Press, Boca Raton, Ann Arbor, London, Tokyo, (1995)
- [GM] Goldman, W and Millson, J. *The homotopy invariance of Kuranishi space*, Illinois J. Math. 34 (1990), 337-367
- [Go] Gomi, K. *Connections and curvings on lifting bundle gerbes*, J. London Math. Soc. (2) 67 (2003), no.2, 510-526
- [GR] Gutt, S. and Rawnsley, J. *Equivalence of star products on a symplectic manifold; an introduction of Deligne's Cech cohomology classes*, J. Geom. Phys. 29 (1999), 347-392.
- [GS] Guillemin, V. and Sternberg, S. *Symplectic Technique in Physics*, Cambridge Univ Press, (1984)
- [Hi] Hitchin, .
- [H1] Hörmander, L. *Weyl calculus of pseudo-differential operators*, Commun.Pure.Appl.Math.32 (1979), 359-443
- [H2] Hörmander, L. *The analysis of linear partial differential operators III*, Springer (1994)
- [K1] Kontsevich, M. *Deformation quantization of Poisson manifolds*, q-alg/9709040.
- [K2] Kontsevich, M. *Formality conjecture*, Math. Phys. St, 20, (1997), 139-157
- [KM] Karasev, M.K. and Maslov, V.P. *Nonlinear Poisson brackets*, A.M.S. MMONO, 119 (1993)
- [Ku] Kumano-go, H. *Pseudodifferential Operators*, MIT, (1982)
- [Le] J. Leray, *Analyse lagrangienne et mécanique quantique*, Seminaire du College de France 1976-1977; R.C.P.25, Strasbourg, (1978).
- [MK] Maeda, Y. and Kajiwara, H. *Introduction to deformation quantization*, Lectures in Math.Sci. The Univ. of Tokyo, 20 (2002), Yurinsya
- [Ma] Masmoudi, M. *Tangential deformation of Poisson bracket and tangential star-products on a regular Poisson manifold*, J.Geom.Phys.9, pp.155-171(1992)
- [Mi1] Miyazaki, N. *Mehler's formula in Deformation quantization*, preprint.

- [Mi2] Miyazaki, N. *Deformation Quantization, localization and the Kirillov formula*, RIMS Kokyuroku 1260 (2002), (in Japanese),
- [Mu] Murray, M. *Bundle gerbes*, J. London Math. Soc. (2)54 (1996), no.2, 403-416.
- [MS] Murray, M. and Singer, M. *Gerbes, Clifford modules and the Index theorem*
- [N1] Natsume, T. *C^* -algebraic deformation quantization of closed Riemann surfaces*, Proceedings of the SNB-Workshop on C^* -algebras, Germany, (1999)142-15
- [N2] Natsume, T. *C^* -algebraic deformation quantization and index theory*, Math. Phys. St. 23(2001), 155-168
- [NM] Natsume, T. and Moriyoshi, H. *Operator algebras and Geometry*, Mathematical Society of Japan, Memoire, 2 (2001), (in Japanese)
- [NT1] Nest, R. and Tsygan, B. *Algebraic index theorem*, Commun. Math. Phys. 172 (1995), 223-262.
- [NT2] Nest, R. and Tsygan, B. *Algebraic index theory for families*, Adv. Math. 113 (1995), 151-205.
- [O] Omori, H. *Infinite dimensional Lie groups*, A.M.S. Trans. Mono.158 (1997)
- [OMMY1] Omori, H., Maeda, Y., Miyazaki, N. and Yoshioka, A. *Poincaré-Cartan class and deformation quantization of Kähler manifolds*, Commun. Math. Phys. 194 (1998), 207-230.
- [OMMY2] Omori, H., Maeda, Y., Miyazaki, N. and Yoshioka, A. *Deformation quantization of Fréchet-Poisson algebras associated with Heisenberg Lie algebra*, Contemp. Math. 288(2001), 391-395
- [OMMY3] H. OMOIRI, Y. MAEDA, N. MIYAZAKI AND A. YOSHIOKA : *Strange phenomena related to ordering problems in quantizations*, Jour. Lie Theory vol. 13, no 2, 481-510, 2003..
- [OMY] Omori, H., Maeda, Y. and Yoshioka, A. *Deformation quantization and Weyl manifolds*, Advances in Mathematics 85 (1991), 224-255.
- [Ph] Phillips, N. C. *The Toeplitz operator proof of non-commutative Bott periodicity*, J. Australian Math.
- [Ri] Rieffel, M. *Deformation quantization for actions of \mathbb{R}^n* , Memoir. A.M.S. 106(1993)
- [Roe] Roe, J. *Elliptic operators, topology and asymptotic methods*, Pitman Research Notes in Math. 179, Longman (1988)
- [Ros] Rosenberg, J. *K-theory under deformation quantization*, q-alg/9607021
- [Sa] Sakai, T. *Riemannian geometry*, (1992), Shokabo
- [Sh] Shubin, M.A. *Pseudodifferential operators and spectral theory*, Springer Verlag, (1987)
- [St] Sternheimer, D. *Deformation quantization twenty years after*, q-alg/9809056.
- [U] Upmeyer, H. *Toeplitz operators and index theory in several complex variables*, OT. vol.81, Birkhäuser
- [UU] Unterberger, A. and Upmeyer, H. *Pseudodifferential Analysis on symmetric cone*, (1996) CRC Press
- [W-O] Wegge-Olsen N.E. *K-theory and C^* -algebras*, Oxford Univ. Press (1993)
- [We] Weinstein, A. *Deformation quantization*. Seminaire Bourbaki, Vol. 1993/94. Asterisque No. 227, (1995), Exp. No. 789, 5, 389-409.
- [Wi] Witten, E. *A note on the antibracket formalism*, Mod. Phys. Lett. A5 (1990), 487
- [Wo] Woodhouse, N. *Geometric quantization*, Clarendon Press, (1980), Oxford
- [X] Xu, P. *Quantum groupoids*, Commun. Math. Phys. 216(2001), 539-581
- [Y] Yoshioka, A. *Contact Weyl manifold over a symplectic manifold*, in "Lie groups, Geometric structures and Differential equations", Adv. St. in Pure Math. 37(2002), 459-493