数理解析研究所講究録 1408 巻 2004 年 60-76

リウヴィル曲面のカットローカス

伊藤 仁一 熊本大学教育学部
清原 一吉 岡山大学理学部

Title: The cut loci on Liouville surfaces
Authors: Jin-ichi Itoh and Kazuyoshi Kiyohara
Kumamoto University, Fuculty of Education, and Okayama University, Fuculty of Science

Abstract

In the earier paper [6], we showed that the cut locus of a general point on two-dimensional ellipsoids is a segment of the curvature line passing through the antipodal point. In the present article, we show that a wider class of Liouville surfaces possess such simple cut loci. The results include the determination of cut loci and the set of poles on two-sheeted hyperboloids and elliptic paraboloids. The detailed proof will be contained in the forthcoming paper [7].

1 序

我々は論文 [6] において、楕円面の一般点のカットローカスを決定した。それによれば、楕円面上の点のカットローカスは、その点の対蹠点を通る曲率線上のある線分に等しい。(回転楕円面については [17] を参照。) すべての点のカットローカスがこのように単純なものになるというのは著しい性質であるが、実はこのような性質を持つ曲面は、楕円面に限らず、ある種のリウヴィル曲面に共通の性質であることが、最近の我々の研究で明らかになった。

この論説では、コンパクト、ノンコンパクトの両方に渡って、どのようなリウヴィル曲面が上記の性質を持つかということを、詳しく解説する。特にノンコンパクトの場合は、2葉双曲面と楕円放物面の一般点のカットロー

カスの決定を含み、結果として、それらの極の集合も特定される。本論説では、結果と証明の方針のみを述べる。証明の詳細は準備中の論文 [7] を参照されたい。なお、ノンコンパクトな回転面の場合にはカットローカスの様子と極の分布について田中氏の詳しい研究 [19, 20] が既にあることを注意しておく。また [18] にコンパクトなリウヴィル曲面のカットローカスについて数値計算と、それに基づく予想が述べられている。その結果とするカットローカスの形状については同じだが、想定するリウヴィル曲面の範囲において、我々の結果との関係は今の所あまり明らかとはなっていない。

以下、2節で対象とするリウヴィル曲面の解説をし、3節で測地線の大域的挙動について大まかな様子を述べる。4節では、コンパクトなリウヴィル曲面の一般点のカットローカスがある条件の下で曲線分になることを述べる。この節の最後に、少し強いが、はるかにチェックしやすい別の十分条件を与える。5節では、ノンコンパクトなリウヴィル曲面に対して、そのチェックしやすい方の条件に類似の条件を与えて、一般点のカットローカスが単純になることを述べる。この場合、カットローカスは空集合、曲線分、2つの曲線分の非連結和の3種類が現れる。非連結なカットローカスが現れるのは、極（カットローカスが空の点）の集合が非連結になるときのみである。2葉双曲面については、極の集合は連結の場合も非連結の場合もあることが判る。また、楕円放物面については極は2点のみであることが判る。

最後の6節では、5節で述べたものとは（重複部分もあるが）別の範囲のノンコンパクトなリウヴィル曲面について、5節と同様の結果が得られることを述べる。鍵となる考え方は、コンパクトなリウヴィル曲面の半分に、元の計量と射影同値な、完備なリーマン計量を入れることである。例えば、楕円面に2葉双曲面が射影同値に埋め込まれることを使って、2葉双曲面のカットローカスが判ることになる。

2 リウヴィル曲面

リウヴィル曲面はおおざっぱに言えば、

$$(f_1(x_1) - f_2(x_2))(dx_1^2 + dx_2^2)$$

の形のリーマン計量を持つ曲面のことであり、正確に言えば、測地流が各余接空間上2次形式であるような第一積分を持つ2次元完備リーマン多様体のことである。詳細については [11] と [5] を参照してほしい。ここでは [12] に従って、リウヴィル曲面の族を、core と呼ばれる、1次元リーマン多様体とその上の関数によってパラメトライズする方法をとる。ここで必要とするのは [12] の3節で type (A) と type (C) と呼んでいる2種類のリウヴィル曲面である。以下、この節ではそれらについて解説するが、ここで必要なのは少し制限された形のものなので、始めからその形で説明する。

2.1 Type (A) — コンパクトの場合

$l > 0$ とし、円 $\mathbb{R}/l\mathbb{Z} = \{s\}$ とその上の関数 $f(s)$ を考える。$f(s)$ は次の諸条件を満たすとする。

$$\begin{gathered} f(s) \text{ の値域を } [b_2, b_1] \text{ とすると}, b_2 < 0 < b_1, \\ f(-s) = f(s) = f(\frac{l}{2} - s), \qquad f(0) = b_1, \quad f(\frac{l}{4}) = b_2, \\ f'(s)^2 = \frac{4(b_1 - f)(f - b_2)}{A(f)^2}, \quad A(\lambda) \text{ は } [b_2, b_1] \text{ 上の正値関数.} \end{gathered} \tag{1}$$

$0 < \beta < l/4$ を $f(\beta) = 0$ なる点とする。この $f(s)$ から α_1, α_2 を次のように定義する：

$$\alpha_1 = 4\int_0^\beta \frac{ds}{\sqrt{f(s)}}, \qquad \alpha_2 = 4\int_\beta^{l/4} \frac{ds}{\sqrt{-f(s)}}.$$

次に、円 $\mathbb{R}/\alpha_1\mathbb{Z} = \{x_1\}$ と $\mathbb{R}/\alpha_2\mathbb{Z} = \{x_2\}$ を考え、そこから各々円 $\mathbb{R}/l\mathbb{Z} = \{s\}$ の区間 $[-\beta, \beta]$ 及び $[\beta, l/2 - \beta]$ への写像 $x_i \mapsto s$ を

$$\left(\frac{ds}{dx_1}\right)^2 = f(s), \quad x_1 = 0 \mapsto s = \beta, \quad s(-x_1) = s(x_1)$$

及び

$$\left(\frac{ds}{dx_2}\right)^2 = -f(s), \quad x_2 = 0 \mapsto s = \beta, \quad s(-x_2) = s(x_2)$$

で定義し、円 $\mathbb{R}/\alpha_i\mathbb{Z}$ 上の関数 $f_i(x_i)$ をこの写像による $f(s)$ の引き戻しで定義する：

$$f_i(x_i) = f(s(x_i)) \qquad (i = 1, 2).$$

トーラス $R = \mathbb{R}/\alpha_1\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\alpha_2\mathbb{Z} = \{(x_1, x_2)\}$ に同値関係

$$(-x_1, -x_2) \sim (x_1, x_2)$$

を入れ、それによる商空間を S とする。S は2次元球面に同相である。商写像 $R \to S$ の分岐点は4点あるが、例えば $(0,0)$ の像の近くで $x_1^2 - x_2^2$, $2x_1x_2$ を座標系とする可微分多様体の構造が S に入り、商写像 $R \to S$ は C^∞ 写像となる。

商写像での "push forward" により、

$$g = (f_1(x_1) - f_2(x_2))(dx_1^2 + dx_2^2)$$

及び

$$F = \frac{f_2(x_2)\xi_1^2 + f_1(x_1)\xi_2^2}{f_1(x_1) - f_2(x_2)}$$

は各々 S 上のリーマン計量と余接束上の滑らかな関数を表す。ここで (ξ_1, ξ_2) は (x_1, x_2) に付随した、余接束のファイバー座標である。F は g の定義する測地流の第一積分になっている。

例として、$A(\lambda) = 1$ の時は S は定曲率1の球面であり、$A(\lambda) = \sqrt{a_2 - \lambda}$ $(a_2 > b_1)$ の時は、S は主軸の長さ $\sqrt{a_2 - b_2}$, $\sqrt{a_2}$, $\sqrt{a_2 - b_1}$ の楕円面に等長になる。

2.2 Type (C) — ノンコンパクトの場合

直線 $\mathbb{R} = \{s\}$ とその上の関数 $f(s)$ を考える。$f(s)$ は次の諸条件を満たすとする。

$$
\begin{gathered}
f(s) \text{ の値域は } (-\infty, b] \text{ の形で、} \\
0 < b, \qquad f(-s) = f(s), \quad f(0) = b, \\
f'(s)^2 = \frac{4(b-f)}{B(f)^2}, \quad B(\lambda) \text{ は } (-\infty, b] \text{ 上の正値関数.}
\end{gathered}
\tag{2}
$$

$0 < \beta$ を $f(\beta) = 0$ なる点とする。この $f(s)$ から α_1, α_2 を次のように定義する（α_2 は ∞ になり得る）：

$$
\alpha_1 = 4\int_0^{\beta} \frac{ds}{\sqrt{f(s)}}, \qquad \alpha_2 = \int_{\beta}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{-f(s)}}.
$$

次に、円 $\mathbb{R}/\alpha_1\mathbb{Z} = \{x_1\}$ と区間 $-\alpha_2 < x_2 < \alpha_2$ を考え、そこから各々区間 $[-\beta, \beta]$ 及び $[\beta, \infty)$ への写像 $x_i \mapsto s$ を

$$
\left(\frac{ds}{dx_1}\right)^2 = f(s), \quad x_1 = 0 \mapsto s = \beta, \quad s(-x_1) = s(x_1)
$$

及び

$$
\left(\frac{ds}{dx_2}\right)^2 = -f(s), \quad x_2 = 0 \mapsto s = \beta, \quad s(-x_2) = s(x_2)
$$

で定義し、$\mathbb{R}/\alpha_1\mathbb{Z}$ 及び $(-\alpha_2, \alpha_2)$ 上の関数 $f_1(x_1)$, $f_2(x_2)$ をこの写像による $f(s)$ の引き戻しで定義する：

$$
f_i(x_i) = f(s(x_i)) \qquad (i = 1, 2).
$$

シリンダー $R = \mathbb{R}/\alpha_1\mathbb{Z} \times (-\alpha_2, \alpha_2) = \{(x_1, x_2)\}$ に同値関係

$$
(-x_1, -x_2) \sim (x_1, x_2)
$$

を入れ、それによる商空間を S とする。S は $\mathbb{R}^2$ に同相である。商写像 $R \to S$ の分岐点は２点あるが、コンパクトの場合と同様、自然な可微分多様体の構造が S に入り、商写像 $R \to S$ は C^∞ 写像となる。

コンパクトの場合と同じく、

$$g = (f_1(x_1) - f_2(x_2)(dx_1^2 + dx_2^2)$$

及び

$$F = \frac{f_2(x_2)\xi_1^2 + f_1(x_1)\xi_2^2}{f_1(x_1) - f_2(x_2)}$$

は各々S上のリーマン計量と余接束上の滑らかな関数を表し、Fはgの定義する測地流の第一積分になっている。

例として、２葉双曲面

$$\frac{u_1^2}{a_1} + \frac{u_2^2}{a_2} + \frac{u_3^2}{a_3} = 1 \qquad (a_1 > 0 > a_2 > a_3)$$

の場合は$b = a_2 - a_3$, $B(\lambda) = \sqrt{\dfrac{-a_3 - \lambda}{a_1 - a_3 - \lambda}}$とされ、楕円放物面

$$\frac{u_1^2}{a_1} + \frac{u_2^2}{a_2} - 2u_3 = 0 \qquad (a_1 > a_2 > 0)$$

の場合は$b = a_1 - a_2$, $B(\lambda) = \sqrt{a_1 - \lambda}$とされる。また、$B(\lambda) = 1$の場合は平坦な$\mathbb{R}^2$になる。

3 測地線の方程式

前節の(x_1, x_2)をSの局所座標系として用いる。エネルギー関数（測地流のハミルトニアン）Eは

$$2E = \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{f_1(x_1) - f_2(x_2)}$$

となる。従って、Sがtype(A), type(C)であるに関わらず、$2E = 1$, $F = c$なる測地線の方程式は

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \frac{dx_1}{\sqrt{f_1 - c}} &= \epsilon_2 \frac{dx_2}{\sqrt{c - f_2}} \\ dt &= \epsilon_1 \sqrt{f_1 - c}\, dx_1 + \epsilon_2 \sqrt{c - f_2}\, dx_2\ , \end{aligned} \qquad (3)$$

で与えられる。ここで $\epsilon_i(=\pm 1)$ は dx_i/dt の符号である $(i=1,2)$。測地線の軌跡は最初の方程式で決まり、その軌跡上で２番目の式を積分することにより、長さのパラメタ t が決まる。この節では type (A), type (C) 各々の場合に測地線のおおまかな動きを見ておくことにする。$\gamma(t)=(x_1(t),x_2(t))$ を $2E=1$, $F=c$ なる測地線とする。c の変域（$2E=1$ の時の F の値域）は type (A) の時は $[b_2,b_1]$ であり、type(C) の時は $(-\infty,b]$ である。

3.1　Type (A) の場合

まず $0<c\leq b_1$ の時を見よう。$0<x_1<\alpha_1/4$ の範囲で $f_1(x_1)=c$ なる（一意的な）x_1 の値を $\nu_1(c)$ とおく。このとき、$x_1(t)$ は $\nu_1(c)$ と $\alpha_1/2-\nu_1(c)$ の間を単振動するか、または $\alpha_1/2+\nu(c)$ と $\alpha_1-\nu(c)$ の間を単振動する。また、$x_2(t)$ は単調増加または単調減少する。$b_2\leq c<0$ の時は x_1 と x_2 の役割を入れ替えて、同様の動きをする。$\nu_2(c)$ は $C<0$ に対して、同様に定義される。

　$c=0$ の時の測地線の動きは次のようである。$(x_1,x_2)=(0,0)$, $(0,\alpha_2/2)$, $(\alpha_1/2,\alpha_2/2)$, $(\alpha_1/2,0)$ なる４点を順に p_1, p_2, p_3, p_4 と名付けると、これらは商写像 $R\to S$ の分岐点であり、単一の閉測地線 L（$x_1=0,\alpha_1/2$ または $x_2=0,\alpha_2/2$ で表される）の上にこの順で並んでいる。この L が最初にとった $\mathbb{R}/l\mathbb{Z}$ と同一視される。$c=0$ なる測地線 $\gamma(t)$ で L と異なるものは、ある時刻 t_0 で必ずこの４点のうちどれかを通る。$\gamma(t_0)=p_i$ とすると、$t(t_0+l/2)=p_{i+2}$（i は mod 2 で考える）であり、$t_0<t<t_0+l/2$ において $\gamma(t)$ は L と交わらず、この間 $x_1(t)$, $x_2(t)$ は単調に推移する。特に $\gamma(t_0+l)=p_i$ である。逆に、これら４点のどれかを通る測地線に対する F の値は常に０である。

3.2　Type (C) の場合

$0<c\leq b$ の時は $\nu_1(c)$ を type (A) の時と同様に定義して、$x_1(t)$ は $\nu_1(c)$ と $\alpha_1/2-\nu_1(c)$ の間を単振動するか、または $\alpha_1/2+\nu(c)$ と $\alpha_1-\nu(c)$ の間を単振動し、$x_2(t)$ は単調増加または単調減少する。$-\alpha_2<b<0$ の時は $x_1(t)$

は単調に動くが、$x_2(t)$ は区間 $[\nu_2(c), \alpha_2)$ 内、または $(-\alpha_2, -\nu_2(c)]$ 内を動く。ここで、$\nu_2(c)$ は $0 < \nu_2(c)$, $f_2(\nu_2(c)) = 0$ なる値である。このとき、例えば $x_2(0) > 0$, $x_2'(0) < 0$ とすると、$x_2(t)$ は初め減少して $\nu_2(c)$ に至り、次に反転して α_2 まで単調に増加する。

$c = 0$ の時は、$(x_1, x_2) = (0, 0)$, $(\alpha_1/2, 0)$ で表される 2 点 p_1, p_2 を必ず通る。その両方を通る測地線 L は $x_1 = 0$, $\alpha_1/2$, または $x_2 = 0$ で表される。$t = 0$ でこれらの点のどちらかを通る L でない測地線は、$t \neq 0$ で決して L と交わらず、また $x_1(t)$, $x_2(t)$ 共に単調に動く。結局、この 2 点は極（つまり、カットローカスが空集合）であることがわかる。

4 Type (A) のリウヴィル曲面のカットローカス

定積分 $I_1(c)$, $I_2(c)$ を次のように定義する：$0 < c < b_1$ の時は

$$I_1(c) = \int_{\nu_1(c)}^{\alpha_1/2-\nu_1(c)} \frac{dx_1}{\sqrt{f_1(x_1) - c}}, \qquad I_2(c) = \int_0^{\alpha_2/2} \frac{dx_2}{\sqrt{c - f_2(x_2)}}.$$

そして $b_2 < c < 0$ の時は

$$I_1(c) = \int_0^{\alpha_1/2} \frac{dx_1}{\sqrt{f_1(x_1) - c}}, \qquad I_2(c) = \int_{\nu_2(c)-0}^{\alpha_2/2-\nu_2(c)} \frac{dx_2}{\sqrt{c - f_2(x_2)}}.$$

この積分を f_i に関する積分に書き直すと、$0 < c$ の場合

$$I_1(c) = \int_c^{b_1} \frac{A(\lambda)\, d\lambda}{\sqrt{(b_1 - \lambda)(\lambda - b_2)\lambda(\lambda - c)}},$$
$$I_2(c) = \int_{b_2}^{0} \frac{A(\lambda)\, d\lambda}{\sqrt{(b_1 - \lambda)(\lambda - b_2)(-\lambda)(-\lambda + c)}}$$

となる。$c < 0$ の場合も類似の式になる。

次の条件式を考える：

$$\begin{aligned} &I_2(c) - I_1(c) > 0 \quad \text{for any } c \in (b_2, b_1), \\ &c \mapsto \sqrt{c - b_2}\,(I_2(c) - I_1(c)) \text{ は単調増加} \end{aligned} \tag{4}$$

ここで差$I_2(c) - I_1(c)$は$c=0$にも連続に拡張されることを注意しておく。

4点p_1, p_2, p_3, p_4とは異なるSの点pのカットローカス$C(p)$を考える。pは$(x_1, x_2) = (s_1, s_2)$で表されるとする。Sの対称性から、$0 \leq s_i \leq \alpha_i/4$として良い。$\bar{p}$で$p$の「対蹠点」$(\alpha_1/2 - s_1, \alpha_2/2 + s_2)$を表すことにする。

定理1　$C(p)$は座標線$x_1 = \alpha_1/2 - s_1$内の、$\bar{p}$を通るある線分である。その端点$x_2 = s_+$, $x_2 = s_- + \alpha_2$ $(s_2 - \alpha_2/2 < s_- < s_2 < s_+ < s_2 + \alpha_2/2)$は、$c = f_1(s_1)$として、

$$I_1(c) = \int_{s_2}^{s_+} \frac{dx_2}{\sqrt{f_2(x_2) - c}} = \int_{s_-}^{s_2} \frac{dx_2}{\sqrt{f_2(x_2) - c}}$$

で与えられる。□

定理の証明の方針は楕円面の場合（[6]）とほぼ同じである。条件(4)は具体的な曲面の場合にチェックしにくいのが難点であるが、これより条件は強いものの、はるかにチェックしやすいのが、次に与える条件である。

$$A'(\lambda) < 0, \quad A''(\lambda) < 0 \qquad \text{on } [b_2, b_1] \tag{5}$$

定理2　$A(\lambda)$が条件(5)を満たせば、対応する関数$f_1(x_1)$, $f_2(x_2)$は条件(4)を満たす。□

例えば、楕円面の場合の$A(\lambda)$が(5)を満たすことは直ちに判る。(5)は満たさないが、条件(4)を満たす例として、

$$A(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{b_0 - \lambda}} \qquad (b_0 > b_1)$$

の場合がある。この形の、あるものについては[18]で取り上げられている。

5 Type (C) のリウヴィル曲面のカットローカス — — その1

コンパクトの場合と同様、次の条件を考える：

$$B'(\lambda) < 0, \quad B''(\lambda) < 0 \qquad \text{on } (-\infty, b] \tag{6}$$

この条件を満たすときは $\alpha_2 = \infty$ となるので、以下この節では $\alpha_2 = \infty$ とする。ノンコンパクトな場合の基本的な考え方は、(いくらでも大きくとれる) 有界な部分を type (A) のリウヴィル曲面の一部分に等長的に埋め込むことにより、前節の結果に帰着させるということである。

命題3 条件 (6) の下で、$b_1 = b$ とおき、任意に $b_0 < 0$ を固定する時、ある $b_2 < b_0$ と $[b_2, b_1]$ 上の関数 $A(\lambda)$ で次の諸条件を満たすものがとれる：

1. $A(\lambda) > 0, \quad A'(\lambda) < 0, \quad A''(\lambda) < 0 \quad \text{on } [b_2, b_1]$.
2. $A(\lambda) = B(\lambda)\sqrt{\lambda - b_2} \quad \text{if} \quad b_0 \le \lambda \le b_1$.

□

この命題の意味するところは次のようなことである：条件 (6) を満たす type(C) のリウヴィル曲面 S をとり、$b_0 < 0$ を任意に選ぶと、ある type(A) のリウヴィル曲面 S_1 で、条件 (5) を満たすものがとれて、S の $|x_2| < \nu_2(b_0)$ の部分が、S_1 の $|x_2| < \nu_2(b_0)$ の部分に等長的であるようにできる。後者は S_1 の半分である $|x_2| < \alpha_2/4$ に含まれていることに注意する。このことから次の定理を得る。

定理4 S を type(C) のリウヴィル曲面で、条件 (6) を満たすとする。このとき S の点 $p = (s_1, s_2)$ のカットローカスは、(i) 空集合、(ii) 座標線 $x_1 = \alpha_1/2 - s_1$ 上の非有界な線分、(iii) 座標線 $x_1 = \alpha_1/2 - s_1$ 上の非有界な 2つの線分の非連結和、のいずれかである。□

カットローカスの様子をより詳細に見るために、$J_1(c)$, $J_2(c)$ を次のように定義する： $0<c<b$ の時は

$$J_1(c)=\int_{\nu_1(c)}^{\alpha_1/2-\nu_1(c)}\frac{dx_1}{\sqrt{f_1(x_1)-c}},\qquad J_2(c)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx_2}{\sqrt{c-f_2(x_2)}}.$$

そして $-\infty<c<0$ の時は

$$J_1(c)=\int_0^{\alpha_1/2}\frac{dx_1}{\sqrt{f_1(x_1)-c}},\qquad J_2(c)=2\int_{\nu_2(c)}^{\infty}\frac{dx_2}{\sqrt{c-f_2(x_2)}}.$$

今考えているリウヴィル曲面は $J_2(c)<\infty$ の場合と $J_2(c)=\infty$ の場合に大きく分けられる。(ある c で ∞ ならばすべての c で ∞ であることに注意する。) ２葉双曲面の場合は $J_2(c)<\infty$ であり、楕円放物面の場合は $J_2(c)=\infty$ である。

以下しばらく、$J_2(c)<\infty$ の場合を考える。この条件は $B(\lambda)/(-\lambda)^{3/2}$ の $\lambda=-\infty$ の近傍での積分値が有限であるということと同値である。

補題 条件 (6) の下で、$c>0$ の時、

$$J_2(c)-J_1(c)>0,\qquad \frac{d}{dc}(J_2(c)-J_1(c))>0.$$

特に、c が正で増加する時、$J_2(c)$ は減少、$J_2(c)-J_1(c)$ は増加、$J_1(c)$ は減少する。□

$0<c<b$ に対して $\sigma(c)$ を

$$J_1(c)=\int_{-\infty}^{\sigma(c)}\frac{dx_2}{\sqrt{c-f_2(x_2)}}$$

で定義する。

$$J_2(c)-J_1(c)=\int_{\sigma(c)}^{\infty}\frac{dx_2}{\sqrt{c-f_2(x_2)}}$$

なので、

- cが増加するとき、$\sigma(c)$は減少する。
- $\sigma(c) > 0 \Longleftrightarrow J_1(c) > \frac{1}{2}J_2(c)$.

また、

$$\lim_{c\to b} J_1(c) = 2\pi\frac{B(b)}{b}, \quad \lim_{c\to 0}(J_2(c) - J_1(c)) = -\int_{-\infty}^{b} \frac{B(\lambda) - B(0)}{\lambda\sqrt{b-\lambda}}\,d\lambda$$

なので、$\sigma(b) := \lim_{c\to b}\sigma(c)$と$\sigma(0) := \lim_{c\to 0}\sigma(c)$がwell-definedで$\sigma(0) > 0$かつ

$$\sigma(b) < 0 \Longleftrightarrow 2\pi\frac{B(b)}{b} < \int_{-\infty}^{0} \frac{B(\lambda)\,d\lambda}{(b-\lambda)\sqrt{-\lambda}} \tag{7}$$

となる。

$p \in S$とし、pは$(x_1, x_2) = (s_1, s_2)$で表されているとする。ただし、$0 \leq s_1 \leq \alpha_1/4,\ 0 \leq s_2$で、$(s_1, s_2) \neq (0,0)$.

定理5 点pのカットローカス$C(p)$は次のようになる。

1. $\sigma(f_1(s_1)) \geq 0$で$0 \leq s_2 \leq \sigma(f_1(s_1))$の時、$C(p)$は空集合。
2. $0 \leq \sigma(f_1(s_1)) < s_2$または$0 < -\sigma(f_1(s_1)) \leq s_2$の時、$C(p)$は$x_1 = \alpha_1/2 - s_1,\ -\infty < x_2 \leq \tilde{s}_-$で表される曲線分である。ただし、$\tilde{s}_-$は

$$J_1(f_1(s_1)) = \int_{\tilde{s}_-}^{s_2} \frac{dx_2}{\sqrt{f_1(s_1) - f_2(x_2)}}$$

   で定義される。
3. $\sigma(f_1(s_1)) < 0$かつ$0 \leq s_2 < -\sigma(f_1(s_1))$の時、$C(p)$は

$$x_1 = \alpha_1/2 - s_1, \quad x_2 \in (-\infty, \tilde{s}_-] \cup [\tilde{s}_+, \infty)$$

   で表される、2つの曲線分の非連結和である。ここで$\tilde{s}_-$は上の通りであり、$\tilde{s}_+$は

$$J_1(f_1(s_1)) = \int_{s_2}^{\tilde{s}_+} \frac{dx_2}{\sqrt{f_1(s_1) - f_2(x_2)}}$$

   で定義される。

□

注意　上の定理で、$s_1=0$（従って $f_1(s_1)=0$）の場合の $\tilde{s}_-$ は

$$J_2(c)-J_1(c)|_{c=0}=\int_{-\infty}^{\tilde{s}_-}\frac{dx_2}{\sqrt{-f_2(x_2))}}+\int_{s_2}^{\infty}\frac{dx_2}{\sqrt{-f_2(x_2))}}$$

で定義される。

上の定理から、曲線 $x_2=\sigma(f_1(x_1))$（とその自然な延長）により、曲面 S は異なるカットローカスの型を持つ点集合に分割されることが判るが、そのありようが $\sigma(f_1(s_1))<0$ となる s_1 があるかどうかで、大きく２つに分かれる（図１を参照のこと）。すなわち、常に $\sigma(f_1(s_1))\geq 0$ ならば（図１の左側）、S は２つの部分に分割され、有界な方はカットローカスが空集合であるような点（つまり極）の集合、外部の非有界な開集合はカットローカスが１つの曲線分であるような点の集合である。

一方、$\sigma(f_1(s_1))<0$ となる s_1 があれば（図１の右側）、極の集合は２つの有界な連結成分に分離し、間にカットローカスが２つの非連結な曲線分よりなる点の集合（有界開集合）が生じる。外部の非有界な部分は、やはりカットローカスが１つの曲線分であるような点の集合である。この図において、印を付けた２点は F がそこで０となる点（シリンダーからの分岐被覆での分岐点）、横線はその２点を通る測地線である。

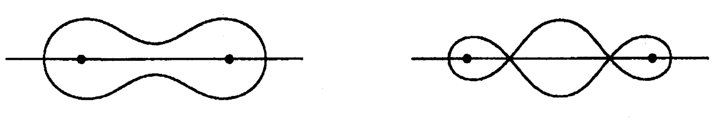

図１ カットローカスの型による曲面の分割

例えば２葉双曲面

$$\frac{u_1^2}{a_1}+\frac{u_2^2}{a_2}+\frac{u_3^2}{a_3}=1 \qquad (a_1>0>a_2>a_3)$$

の場合にはどちらの場合も起こりうる。a_1 が 0 に近い時は S はフラットな $\mathbb{R}^2$ に近く、図 1 の左図のようになる。一方、a_2 が 0 に近い時は、S は双曲線の内部のダブルに近く、図 1 の右図のようになる。

次に $J_2(c)=\infty$ の場合を考える。この場合はカットローカスの様子はより簡単になる。楕円放物面はこの場合になる。

定理 6 $(x_1,x_2)=(s_1,s_2)$, $0\le s_1\le \alpha_1/4$, $s_2\ge 0$, で表される点 p のカットローカス $C(p)$ は次のようになる。

1. $s_1\neq 0$ の時は
$$x_1=\alpha_1/2-s_1,\quad x_2\in(-\infty,\tilde{s}_-]\cup[\tilde{s}_+,\infty)$$
で表される、2 つの曲線分の非連結和である。ここで $\tilde{s}_\pm$ の定義は前の定理と同じ。
2. $s_1=0$, $s_2>0$ の時は $x_1=\alpha_1/2$, $-\infty<x_2\le\tilde{s}_-$ で表される曲線分。
3. $s_1=s_2=0$ の時は、空集合。

特に、極になるのは 2 点のみである。□

注 上の定理で、$s_1=0$ の時の $\tilde{s}_-$ の定義は、前の定理のそれに類似しているが、$J_2(c)=\infty$ なので、代わりに有限部分の積分に置き換えたものを用いて定義する。

6 Type (C) のリウヴィル曲面のカットローカス —— その 2

リウヴィル曲面の計量 $g=(f_1(x_1)-f_2(x_2))(dx_1^2+dx_2^2)$ に対して、新しい計量 $\bar{g}$ を

$$\begin{aligned}\bar{g}=&\frac{f_1(x_1)-f_2(x_2)}{(\alpha f_1+\beta)(\alpha f_2+\beta)}\left(\frac{dx_1^2}{\alpha f_1+\beta}+\frac{dx_2^2}{\alpha f_2+\beta}\right)\\ =&\left(\frac{f_1}{\beta(\alpha f_1+\beta)}-\frac{f_2}{\beta(\alpha f_2+\beta)}\right)\left(\frac{dx_1^2}{\alpha f_1+\beta}+\frac{dx_2^2}{\alpha f_2+\beta}\right)\end{aligned}$$

で定義すると（α, β は定数)、これもリウヴィル計量であるが、g と $\bar{g}$ の定める測地線の軌跡はすべて一致することが古くから知られている。即ち、g と $\bar{g}$ の定めるレビ・チビタ接続は互いに射影同値である。(例えば [21] を参照のこと。)

ここで元の計量 g を type(A) の計量とし、$\alpha, \beta > 0$, $\alpha b_2 + \beta \leq 0$ となるように α, β をとれば、$\bar{g}$ は

$$U = \{(x_1, x_2) \in S \mid |x_2| < \nu_2(-\alpha/\beta)\}$$

の上の完備なリーマン計量を与えて、$(U, \bar{g})$ はここで考えている形の type(C) のリウヴィル曲面になることがわかる。例えば、S を定曲率 1 の球面とすると $-\alpha/\beta = b_2$ ならば U は平坦な $\mathbb{R}^2$ であり、$0 > -\alpha/\beta > b_2$ ならば U は負の定曲率曲面となる。これは 2 次元双曲空間のクラインモデルと実質的に同じものである。

以下では、$-\alpha/\beta = b_2$ の場合のみを考える。S と U とで測地線の軌跡が一致することから、次の定理を得る。

定理 7 S を条件 (4) を満たす type(A) のリウヴィル曲面とすると、U の点 p でのカットローカスは p の S でのカットローカスと U との共通部分に等しい。より詳しく言うと、この場合、$J_2(c) < \infty$ であり、定理 5 がそのままの形で成り立つ。□

この定理の重要な点は、上の様にして得られた U は必ずしも条件 (6) を満たさないということである。例えば S が条件 (5) のうちの $A'(\lambda) < 0$ を満たさないときは U は条件 (6) のうちの $B'(\lambda) < 0$ を満たさない。4 節であげた $A(\lambda) = (b_0 - \lambda)^{-1/2}$ がこのような例である。つまりこの方法で、前節で考えた範囲を超えて、同様に単純なカットローカスを持つリウヴィル曲面の族を得ることができる。一方、条件 (6) を満たすけれど、楕円放物面のように type(A) の曲面の一部として実現できないものも存在する（$J_2(c) = \infty$ だから)。

しかし、もちろん両方に属するものもある。例えば2葉双曲面がそうである。それを命題として記しておこう。

命題8 楕円面S

$$\frac{u_1^2}{a_1}+\frac{u_2^2}{a_2}+\frac{u_3^2}{a_3}=1 \qquad (a_1>a_2>a_3>0)$$

に対して、上記のUは2葉双曲面

$$\frac{u_1^2}{c_1}+\frac{u_2^2}{c_2}+\frac{u_3^2}{c_3}=1 \qquad (c_1>0>c_2>c_3)$$

の連結成分に等長になる。ここで$\beta=a_1(a_1-a_2)(a_1-a_3)$ととって、

$$c_1=(a_1-a_2)(a_1-a_3), \quad c_2=-a_3(a_1-a_2), \quad c_3=-a_2(a_1-a_3)$$

である。□

このように、2葉双曲面が楕円面に射影同値に埋め込まれることなどは、あまり知られていないのではないだろうか。

References

[1] V. I. Arnold, Topological invariants of plane curves and caustics, University Lecture Series, **5**, Amer. Math. Soc., 1994.

[2] M. Berger, Riemannian Geometry during the Second Half of Twentieth Century, University Lecture Series, **17**, AMS, Providence (2000).

[3] M. Berger, Peut-on définir la géometrie aujourd'hui? Results Math., **40** (2001), 37–87.

[4] A. v. Braunmühl, Geodätische Linien und ihre Enveloppen auf dreiaxigen Flächen zweiten Grades, Math. Ann., **20** (1882), 557–586.

[5] M. Igarashi, K. Kiyohara, and K. Sugahara, Noncompact Liouville surfaces, J. Math. Soc. Japan, 45 (1993), 459–479.

[6] J. Itoh, K. Kiyohara, The cut loci and the conjugate loci on ellipsoids, Manuscripta Math., **114** (2004), 247–264.

[7] J. Itoh, K. Kiyohara, The cut loci on Liouville surfaces, in preparation.

[8] J. Itoh, R. Sinclair, Thaw: A tool for approximating cut loci on a triangulation of a surface, to appear in Experiment. Math..

[9] C. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, C.G.J. Jacobi's Gesammelte Werke, 2nd ed., Supplement Volume, Georg Reimer, Berlin (1884).

[10] C. Jacobi, A. Wangerin, Über die Kurve, welche alle von einem Punkte ausgehenden geodätischen Linien eines Rotationsellipsoides berührt, C.G.J. Jacobi's Gesammelte Werke, **7**, Georg Reimer, Berlin (1891), 72-87.

[11] K. Kiyohara, Compact Liouville surfaces, J. Math. Soc. Japan, **43** (1991), 555–591.

[12] K. Kiyohara, Two classes of Riemannian manifolds whose geodesic flows are integrable, Mem. Amer. Math. Soc., 130/619 (1997).

[13] W. Klingenberg, Riemannian geometry, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1982.

[14] S. Myers, Connections between differential geometry and topology I, II, Duke Math. J. **1** (1935), 276-391, **2** (1936), 95-102.

[15] H. Poincaré, Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes, Trans. Amer. Math. Soc. **6** (1905), 237-274.

[16] R. Sinclair, On the last geometric statement of Jacobi, to appear in Experiment. Math..

[17] R. Sinclair, M. Tanaka, The structure theorem of the cut locus of an ellipsoid of revolution, Preprint.

[18] R. Sinclair, M. Tanaka, Jacobi's last geometric statement extends to a wider class of Liouville surfaces, Preprint.

[19] M. Tanaka, On the cut loci of a von Mangoldt's surface of revolution, J. Math. Soc. Japan **44** (1992), 631–641.

[20] M. Tanaka, On a characterization of a surface of revolution with many poles, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A **46** (1992), 251–268.

[21] P. Topalov, V. Matveev, Geodesic equivalence via integrability, Geometriae Dedicata **96** (2003), 91–115.

Email addresses:
`j-itoh@kumamoto-u.ac.jp`
`kiyohara@math.okayama-u.ac.jp`