数理解析研究所講究録 1408 巻 2004 年 77-96

幾何学的一階微分作用素と不変式

本間　泰史 (Yasushi Homma)[1]
東京理科大学理工学部（日本学術振興会特別研究員 PD)
Faculty of Science and Technology, Tokyo University of Science.

1　序論（背景と動機）

リーマン計量及び幾何構造から定まる一階微分作用素は，幾何学において重要な道具である．例えば,

幾何	ホロノミー群	微分作用素
スピン幾何	$\mathrm{Spin}(n)$	ディラック作用素，ツイスター作用素
リーマン幾何	$\mathrm{SO}(n)$	外微分，余微分，共形キリング作用素
ケーラー幾何	$\mathrm{U}(n/2)$	$\bar{\partial}$, ∂, $\bar{\partial}^*$, ∂^*
四元数ケーラー幾何	$\mathrm{Sp}(n/4)\mathrm{Sp}(1)$	四元数ケーラーディラック作用素

これら一階微分作用素の主表象をホロノミー環の展開環（普遍展開環）と関連付け，主表象の一般的かつ普遍的な性質を導くことが目的である．特に，展開環の不変元と作用素のボホナーワイゼンベック公式の関係を明らかにしたい．

まず，上記の幾何学的一階微分作用素を一般的な形で定義する．M をリーマンホロノミー群が G となる（または G に含まれる）リーマン多様体とし，$\mathbf{G}(M)$ を構造群 G のフレーム束とする．また highest weight ρ をもつ G の既約ユニタリ表現 (π_ρ, V_ρ) に対する同伴ベクトル束を $\mathbf{S}_\rho := \mathbf{G}(M)\times_{\pi_\rho} V_\rho$ とする．この同伴束上にはレビチビタ接続から導かれる共変微分 ∇ が存在する：

$$\nabla : \Gamma(M, \mathbf{S}_\rho) \to \Gamma(M, \mathbf{S}_\rho \otimes T^*_{\mathbb{C}}(M)) \simeq \Gamma(M, \mathbf{S}_\rho \otimes T_{\mathbb{C}}(M)).$$

ここで $\Gamma(M,\mathbf{S}_\rho)$ は $\mathbf{S}_\rho$ の滑らかな切断全体とし，$T_{\mathbb{C}}(M) = T(M)\otimes\mathbb{C}$ としている．右辺の同伴束 $\mathbf{S}_\rho\otimes T_{\mathbb{C}}(M)$ の既約分解を $\oplus_\lambda \mathbf{S}_\lambda$，各既約成分への射影を Π^ρ_λ とする,

$$\Pi^\rho_\lambda : \mathbf{S}_\rho\otimes T_{\mathbb{C}}(M) = \oplus_\lambda \mathbf{S}_\lambda \to \mathbf{S}_\lambda.$$

このとき，射影と共変微分を合成して一階微分作用素を得る：

$$D^\rho_\lambda : \Gamma(M,\mathbf{S}_\rho) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(M, \mathbf{S}_\rho\otimes T_{\mathbb{C}}(M)) \xrightarrow{\Pi^\rho_\lambda} \Gamma(M,\mathbf{S}_\lambda). \tag{1.1}$$

この一階微分作用素を **gradient** とよぶ．つまり **gradient とは ∇ の既約成分**と思えばよく，次が成立することは定義から従う．

$$\sum_\lambda (D^\rho_\lambda)^* D^\rho_\lambda = \nabla^*\nabla. \tag{1.2}$$

[1]The author is supported by the Grant-in-Aid for JSPS Research Fellowships.

この gradients は $G = \mathrm{SO}(n)$ の場合に，[19](Stein and Weiss, 1968) において定義された（よって Stein-Weiss 作用素と呼ばれることもある）．そして [7](Fegan,1976) により共形共変性が証明され，[9](Hitchin, 1980) などにも登場する．Gradients のボホナーワイゼンベック公式に関する最初の論文は [8](Gauduchon, 1991) である．その論文では，gradients が

$$\sum_{\lambda} w(\rho;\lambda)(D^{\rho}_{\lambda})^{*}D^{\rho}_{\lambda} = (\text{curvature action}). \tag{1.3}$$

を満たすことが証明されている．ここで $w(\rho;\lambda)$ は **conformal weight** と呼ばれる highest weights ρ と λ に依存した定数．例えば，微分形式上のホッジ-ラプラシアンに対するボホナーワイゼンベック公式 $dd^{*} + d^{*}d = \nabla^{*}\nabla + R$ は (1.2) と (1.3) から導くことが出来る．微分形式のような基本表現に対する同伴束上では (1.3) で事足りるが，一般の既約表現に対する同伴束上では，より多くの関係式が成立する．その事実を示したのが Branson の論文 [1](1997) である．その論文において，Branson は球面上のすべての gradient に対するスペクトル分解を行い，そこから gradients の楕円性について議論している．その系として，**最適ボホナーワイゼンベック公式**と呼ばれる

$$\sum_{\lambda} a_{\lambda}(D^{\rho}_{\lambda})^{*}D^{\rho}_{\lambda} = (\text{curvature action}) \tag{1.4}$$

なる関係式において，係数 $\{a_{\lambda}\}$ が複雑な連立線形方程式を満たさなければならないこと証明した．この結果から同伴束 $\mathbf{S}_{\rho}$ 上の **gradients** $\{D^{\rho}_{\lambda}\}_{\lambda}$ **の数が** N **個なら，独立な最適ボホナーワイゼンベック公式は** $[N/2]$ 個存在することがわかる．また Branson は [1] の結果からリーマン幾何における加藤不等式問題を解決している（[3], 2000)．しかし，簡単な場合を除けば，Branson の手法では係数 $\{a_{\lambda}\}$ を具体的に計算することは，ほぼ不可能であり，調和解析の大道具を用いるので（著者にとっては）難解である．そこで「[8] のように，主表象を直接的に扱うことで，Branson の結果を証明できないか？」という疑問が湧く．この疑問を解くための最初のステップは gradients の主表象と $\mathfrak{so}(n)$ の展開環を関連付けることである．これは [6](Calderbank, Gauduchon and Herzlich, 2000) において既に述べられているのだが，計算はやはり複雑であり，目的が加藤不等式であることもあって，上の疑問に対する答えを与えてはいない．実は，計算の複雑さを回避するには，表現空間上で議論するのではなく，展開環そのものを扱えばよいのである．これが第二のステップである（今となっては当たり前だが，このステップに気付くのに苦労した）．最終ステップは展開環の中でボホナーワイゼンベック公式に相当する関係式を与えることである．この手法で著者は [12](Homma) においてケーラー多様体上の gradients に対するボホナーワイゼンベック公式を与えた．その後，同様の手法で [10](Homma) 及び [13](Homma) において上の疑問に対する答えを与えることが出来た．

さて，上記はリーマン多様体に関する話である．Bergerによるリーマンホロノミー群の分類に従えば，考えるべき幾何構造は(1) リーマン，(2) ケーラー，(3) 四元数ケーラー，(4) カラビ-ヤウ，(5) 超ケーラー，(6) G_2，(7) Spin(7) である．我々が考えているのは微分作用素の主表象の話であるので，ホロノミー群の表現や展開環を調べればよい．つまり，(1) SO(n), (2) U($n/2$), (3) Sp($n/4$)Sp(1), (4) SU($n/2$), (5) Sp($n/4$), (6) G_2, (7) Spin(7) に対する展開環の構造を調べればよく，その意味では(4)は(2)に含まれると考えてよいし，(3)の結果から(5)を調べることもできる．しかし，幾何学へ応用するには(1.4)のcurvature actionを具体的に計算する必要などもあり，それぞれの幾何学に沿って個別に議論していかなくてはならない．

この論文では，リーマン多様体またはスピン多様体上のボホナーワイゼンベック公式に対する結果を[13]に沿って述べる．また最後の章で，そのほかの幾何構造に対するボホナーワイゼンベック公式について触れる．

2 基本的な例：ディラック作用素

一般論を議論する前に，ディラック作用素に対するボホナーワイゼンベック公式を考え，その仕組みを明らかにしておこう．n次元スピン多様体上のディラック作用素Dを考える．ディラック作用素とはスピノール束上の一階微分作用素であり，

$$D = \sum_{1\le i\le n} e_i \cdot \nabla_{e_i} \qquad (\{e_i\}_{i=1}^n \text{ は局所正規直交フレーム}).$$

で与えられる．$e_i\cdot$ はクリフォード積と呼ばれるスピノール束への作用であり，クリフォード関係式 $e_i \cdot e_j \cdot + e_j \cdot e_i \cdot = -2\delta_{ij}$ を満たす．これを書き換えれば

$$e_i e_j + \delta_{ij} = -(e_j e_i + \delta_{ji}) \tag{2.1}$$

という（添え字に対して）反対称な関係式を得る．一方，∇ はスピノール束上の共変微分であり，$\nabla^2_{e_i,e_j} := \nabla_{e_i}\nabla_{e_j} - \nabla_{\nabla_{e_i}e_j}$ とし，$R(\cdot,\cdot)$ を ∇ の曲率とすれば，

$$\nabla^2_{e_i,e_j} - R(e_i,e_j)/2 = \nabla^2_{e_j,e_i} - R(e_j,e_i)/2 \tag{2.2}$$

という（添え字に対して）対称な関係式を得る．そこで(2.1)と(2.2)から，

$$\begin{aligned}
&D^2 - \nabla^*\nabla - \sum_{ij} e_i e_j R(e_i,e_j)/2 \\
&= \sum_{ij}(e_i e_j + \delta_{ij})(\nabla^2_{e_i,e_j} - R(e_i,e_j)/2) = -\sum_{ij}(e_j e_i + \delta_{ji})(\nabla^2_{e_j,e_i} - R(e_j,e_i)/2) \\
&= -(D^2 - \nabla^*\nabla - \sum e_i e_j R(e_i,e_j)/2).
\end{aligned}$$

ここで$\nabla^*\nabla$は接続ラプラシアンであり $-\sum \nabla^2_{e_i,e_i}$ で定義される．さらにクリフォード関係式とビアンキ恒等式により $\sum e_i e_j R(e_i,e_j) = \kappa/4$（$\kappa$ はスカラー曲率）がわかる．よってディラック作用素に対するボホナーワイゼンベック公式

$$D^2 = \nabla^*\nabla + \kappa/4.$$

を得る．このディラック作用素に対する議論をgradientsへと一般化するには，(2.1)に対応する式が得られればよい．つまり **gradientの主表象に対する反対称な関係式を見つければよい**のである．しかし，gradientsの定義(1.1)を見ただけでは，そのような関係式は全くわからない．そのため主表象とホロノミー環の展開環を結びつけるのであるが，展開環の話をする前に$\mathrm{SO}(n)$の表現論について述べることにする．

3 $\mathrm{SO}(n)$ 及び $\mathrm{Spin}(n)$ の表現論

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ を考え，内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle$，標準基底を $\{e_i\}_{i=1}^n$ とする．$e_{ij} := e_i \wedge e_j \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ に対して，$e_{ij}(e_k) = \delta_{ik}e_j - \delta_{jk}e_i$ として $\mathbb{R}^n$ の線形変換 e_{ij} を定義し，リー環 $\mathfrak{so}(n)$ と $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ を同一視する．このとき

$$[e_{kl}, e_{ij}] = \delta_{ki}e_{lj} + \delta_{kj}e_{il} - \delta_{il}e_{kj} - \delta_{lj}e_{ik}, \qquad e_{ij} = -e_{ji}$$

が成立．また，$\{e_{ij} | 1 \le i < j \le n\}$ が $\mathfrak{so}(n)$ の基底となる．

リー環 $\mathfrak{so}(n)$ のカルタン部分環を $\mathfrak{h} := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_{2i-1,2i} | 1 \le i \le m = [n/2]\}$ とする．そして $(\sqrt{-1}\mathfrak{h})^*$ の基底 $\{\mu_i\}_{i=1}^m$ を $\mu_i(-\sqrt{-1}e_{2j-1,2j}) = \delta_{ij}$ となるように選び，内積を $\langle\mu_i, \mu_j\rangle = \delta_{ij}$ として導入しておく．そこで $(\sqrt{-1}\mathfrak{h})^*$ を m 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$ とみなせるので，μ_i を次のように表示する．

$$\mu_i = (\underbrace{0, \cdots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{m-i}).$$

さて，$\mathrm{SO}(n)$ または $\mathrm{Spin}(n)$ の有限次元既約ユニタリ表現 (π, V) を考える．表現空間 V を $\sqrt{-1}\mathfrak{h}$ に対して同時固有空間分解する．このとき，各同時固有値 (weight) ν は $\{\mu_i\}_i$ の整数係数または半整数係数の線形結合である，

$$\nu = \sum \nu^i \mu_i = (\nu^1, \cdots, \nu^m) \in \mathbb{Z}^m \cup (\mathbb{Z} + 1/2)^m.$$

Weightsを辞書式順序に並べると，最高次のweight $\rho = (\rho^1, \cdots, \rho^m)$ は重複度1となる．このhighest weight ρ は次のdominant条件を満たす．

$$\rho^1 \ge \rho^2 \ge \cdots \ge \rho^{m-1} \ge |\rho^m|, \quad \text{for } n = 2m,$$
$$\rho^1 \ge \rho^2 \ge \cdots \ge \rho^{m-1} \ge \rho^m \ge 0, \quad \text{for } n = 2m+1.$$

逆に，この条件を満たす $\rho \in \mathbb{Z}^m \cup (\mathbb{Z}+1/2)^m$ に対して，highest weightが ρ となる有限次元既約表現を同値類を除いて唯一つ構成できる．そこで$\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{Spin}(n)$, $\mathfrak{so}(n)$ $(= \mathfrak{spin}(n))$ のhighest weight ρ の有限次元既約表現を (π_ρ, V_ρ) と書くことにする．ここで ρ が $(\mathbb{Z}+1/2)^m$ に入る時には，$\mathrm{Spin}(n)$ の表現にはなるが，$\mathrm{SO}(n)$ の表現には落ちないことに注意．また，highest weightを書く時には，k が j 個並んだときに k_j とし，一番後ろに並んだ0は省略することにする．

例 1. 自然表現空間 $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{C}$ の p 次交代テンソル積空間 $\Lambda^p(\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{C})$ $(0 \le p \le [\frac{n-1}{2}])$ への表現は既約表現であり，highest weightは $(1_p) = (1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$.

4 展開環とカシミール元

リー環$\mathfrak{so}(n)$の複素化を$\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$と書き，その展開環を$U(\mathfrak{so}(n,\mathbb{C}))$と書く．展開環とは，ベクトル空間としては$\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$の対称テンソル代数（または多項式環）と同型で，対称テンソル代数の関係式$XY-YX=0$ $(X,Y\in\mathfrak{so}(n,\mathbb{C}))$を$XY-YX=[X,Y]$と変形した環である．また，$\mathfrak{so}(n)$の表現$(\pi,V)$は，自然に展開環の表現へと持ち上がるので，その表現も同じ記号(π,V)で書くことにする．

$\mathfrak{z}$を$U(\mathfrak{so}(n,\mathbb{C}))$の中心とする．これは$U(\mathfrak{so}(n,\mathbb{C}))$内の$\mathfrak{so}(n)$随伴表現で不変な元全体が成す部分環といってもよい．$\mathfrak{z}$の元を**カシミール元**と呼ぶ．

$\mathfrak{z}$の生成元を構成しよう．まず，様々なところで見かける通常のカシミール元は$c_2=\sum_{ij}e_{ij}e_{ji}$で与えられる．$c_2$は不変元であるので，シューアの補題から既約表現空間上に定数で作用する．実際，c_2はV_ρ上で，

$$\pi_\rho(c_2)=2\langle\rho,\rho\rangle+4\langle\rho,\delta\rangle \tag{4.1}$$

となる．ここでδは正ルートの和の半分であり，具体的には次のよう，

$$\delta=\begin{cases}(m-1,m-2,\cdots,1,0) & \text{for } n=2m,\\ (m-1/2,m-3/2,\cdots,3/2,1/2) & \text{for } n=2m+1.\end{cases}$$

例えば，自然表現$(\pi_{(1_1)},\mathbb{C}^n)$上では$\pi_{(1_1)}(c_2)=2(n-1)$となる．

次に高次カシミール元を構成する．まず展開環の元e^q_{ij}を次で定義，

$$e^q_{ij}:=\begin{cases}\sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_{q-1}\le n}e_{ii_1}e_{i_1i_2}\cdots e_{i_{q-1}j}, & q\ge 1,\\ \delta_{ij}, & q=0.\end{cases}$$

このe^q_{ij}は直接計算により次を満たすことがわかる．

$$\mathrm{ad}(e_{kl})e^q_{ij}=[e_{kl},e^q_{ij}]=\delta_{ki}e^q_{lj}+\delta_{kj}e^q_{il}-\delta_{il}e^q_{kj}-\delta_{lj}e^q_{ik},$$
$$\sum_{1\le k\le n}e^p_{ik}e^q_{kj}=e^{p+q}_{ij}.$$

そこで$c_q:=\sum_i e^q_{ii}$とすれば，$[e_{kl},c_q]=0$なのでc_qはカシミール元となる．$n=2m$の場合にはパフィアンとよばれるカシミール元pfもある，

$$\mathrm{pf}:=\frac{1}{(\sqrt{-1})^m2^mm!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{2m}}\mathrm{sign}(\sigma)e_{\sigma(1)\sigma(2)}e_{\sigma(3)\sigma(4)}\cdots e_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)}.$$

ここで$\mathfrak{S}_{2m}$は$\{1,\cdots,2m\}$に対する置換群．不変元であることは直接計算でわかる．

上で構成したカシミール元が$\mathfrak{z}$の生成元となる（see [20]）．

命題 4.1. *1.* （$n=2m$の場合）$\{c_2,c_4,\cdots,c_{2m-2},\mathrm{pf}\}$は$\mathfrak{z}$を代数的に生成する．またpfの既約$\mathfrak{so}(2m)$加群$V_\rho$への作用は

$$\pi_\rho(\mathrm{pf})=(\rho^1+m-1)(\rho^2+m-2)\cdots(\rho^{m-1}+1)\rho^m. \tag{4.2}$$

2.　($n=2m+1$ の場合) $\{c_2, c_4, \cdots, c_{2m}\}$ は $\mathfrak{Z}$ を代数的に生成する.

Remark 1. ベクトル空間として展開環＝多項式環である．よってカシミール元は不変多項式である．例えば，パフィアンはオイラー類を与える不変多項式である．

第2章で述べたように，主表象の反対称な関係式を見つけることが目的であった．それは e_{ij}^q を $\{e_{ji}^q\}_q$ により表示することに対応する（次章参照）．e_{ij}^q をそのまま扱うと計算が複雑なのでシフトする必要がある．$\hat{e}_{ij} := e_{ij} + \frac{n-1}{2}\delta_{ij}$ とシフトして，$\hat{e}_{ij}^q$ を

$$\hat{e}_{ij}^q := \begin{cases} \sum_{1 \le i_1, i_2, \cdots, i_{q-1} \le n} \hat{e}_{ii_1}\hat{e}_{i_1 i_2} \cdots \hat{e}_{i_{q-1}j}, & q \ge 1, \\ \delta_{ij}, & q = 0, \end{cases}$$

により定義する．また $\hat{c}_q := \sum \hat{e}_{ii}^q$ とする．次の補題は直接計算すればよい．

補題 4.2. $\{\hat{e}_{ij}^q | q = 0, 1, 2, \ldots,\ i, j = 1, \ldots, n\}$ は次をみたす．

$$[\hat{e}_{kl}, \hat{e}_{ij}^q] = \delta_{ki}\hat{e}_{lj}^q + \delta_{kj}\hat{e}_{il}^q - \delta_{il}\hat{e}_{kj}^q - \delta_{lj}\hat{e}_{ik}^q,$$
$$\sum_k \hat{e}_{ik}^p \hat{e}_{kj}^q = \hat{e}_{ij}^{p+q}, \quad \hat{e}_{ij} = -\hat{e}_{ji} + (n-1)\delta_{ij}.$$

特に，次が成立する．

$$\hat{e}_{ij}^{q+1} = \delta_{ji}\hat{c}_q - \hat{e}_{ji}^q - \sum_k \hat{e}_{kj}^q \hat{e}_{ki}. \tag{4.3}$$

式(4.3)から，$\hat{e}_{ij}^q$ がカシミール元を係数とする $\{\hat{e}_{ji}^q\}_q$ の線形結合として $\sum_{p=0}^q \hat{a}_{q,p}\hat{e}_{ji}^p$ のように表されることがわかる．係数 $\hat{a}_{q,p}$ は帰納的に決定することができ $\{\hat{c}_q\}_q$ の多項式となる．実際，$\{\hat{a}_{q,p}\}_{q \ge p \ge 0}$ に対する漸化式を作って解けば次の定理を得る．

定理 4.3 (普遍ボホナーワイゼンベック公式１). シフトした展開環の元 $\hat{e}_{ij}^q$ はカシミール元を係数とする $\{\hat{e}_{ji}^p\}_{p=0}^q$ の線形結合となる，

$$\hat{e}_{ij}^q = (-1)^q \hat{e}_{ji}^q - \frac{1-(-1)^q}{2}\hat{e}_{ji}^{q-1} + \sum_{p=0}^{q-1}(-1)^p \hat{c}_{q-1-p}\hat{e}_{ji}^p. \tag{4.4}$$

特に，

$$\hat{e}_{ij}^{2q} = \hat{e}_{ji}^{2q} + \sum_{p=0}^{2q-1}(-1)^p \hat{c}_{2q-1-p}\hat{e}_{ji}^p, \tag{4.5}$$

$$\hat{e}_{ij}^{2q+1} = -\hat{e}_{ji}^{2q+1} - \hat{e}_{ji}^{2q} + \sum_{p=0}^{2q}(-1)^p \hat{c}_{2q-p}\hat{e}_{ji}^p. \tag{4.6}$$

式(4.6)においてトレースを取れば，カシミール元の関係式を得る，

$$2\hat{c}_{2q+1} = -\hat{c}_{2q} + \sum_{p=0}^{2q}(-1)^p \hat{c}_{2q-p}\hat{c}_p, \quad \mathit{for}\ q = 0, 1, \cdots.$$

Remark 2. 反対称な関係式ということをはっきりさせた方がよいであろう.

$$\hat{E}^q_{ij} := -\frac{1+(-1)^q}{2}\hat{e}^q_{ij} + \sum_{p=0}^{q}(-1)^p \hat{c}_{q-p}\hat{e}^p_{ij},$$

とすれば $\hat{E}^q_{ij} = (-1)^q \hat{E}^q_{ji}$ を満たす. よって $\hat{E}^{2q+1}_{ij} = -\hat{E}^{2q+1}_{ji}$ という（添え字に対して）反対称な関係式を得る.

$n = 2m$ の場合には pf というカシミール元が存在した. この pf に付随した添え字に対して反対称な関係式を作ってみよう. e^q_{ij} のトレースがカシミール元 c_q であった. 同様にトレースを取って pf となる展開環 $U(\mathfrak{so}(n,\mathbb{C}))$ の元を考える.

定義 4.4. 展開環の元 pf_{ij} $(i, j = 1, \cdots, 2m)$ を

$$\mathrm{pf}_{ij} := \begin{cases} \mathrm{pf}, & i = j, \\ (-1)^{i+j}\frac{2m}{(\sqrt{-1})^m 2^m m!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}^{ij}_{2m}} \mathrm{sgn}(\sigma) e_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots e_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)}, & i < j, \\ -\mathrm{pf}_{ji} & i > j, \end{cases}$$

と定義する. ここで $\mathfrak{S}^{ij}_{2m}$ は $\{1, \cdots, 2m\} \setminus \{i, j\}$ に対する置換群.

定義から $\sum_i \mathrm{pf}_{ii} = 2m\mathrm{pf}$ であることは明らか. また (4.4) と同様に, 次は反対称な関係式を与えるので, 普遍ボホナーワイゼンベック公式と呼ぶ.

定理 4.5 (普遍ボホナーワイゼンベック公式 2).

$$\mathrm{pf}_{ij} + \mathrm{pf}_{ji} = 2\delta_{ij}\mathrm{pf}. \tag{4.7}$$

例 2 (4 次元の場合). $\mathbb{R}^4$ の向き付き正規直交基底を $\{e_i\}_{i=1}^4$ とする. このとき

$$\mathrm{pf}_{12} = e_{34}, \quad \mathrm{pf}_{13} = -e_{24}, \quad \mathrm{pf}_{14} = e_{23},$$
$$\mathrm{pf}_{23} = e_{14}, \quad \mathrm{pf}_{24} = -e_{13}, \quad \mathrm{pf}_{34} = e_{12}.$$

が成立する. ホッジ作用素を $*$ とすれば $\mathrm{pf}_{ij} = *e_{ij}$ $(i \neq j)$ である.

5 Gradients の主表象

$SO(n)$ または $Spin(n)$ の既約ユニタリ表現 (π_ρ, V_ρ) を考え, 自然表現 $(\pi_{(1_1)}, \mathbb{C}^n)$ とテンソル積する. そして $V_\rho \otimes \mathbb{C}^n$ の既約分解を $V_\rho \otimes \mathbb{C}^n = \oplus_\lambda V_\lambda$ として, V_λ への直交射影を $\Pi^\rho_\lambda : V_\rho \otimes \mathbb{C}^n \to V_\lambda$ とする. ここで V_λ には $V_\rho \otimes \mathbb{C}^n$ 上のテンソル積内積から導かれるエルミート内積を入れておく. 一階微分作用素 gradients の定義 (1.1) から, **次が gradients の主表象**であることがわかる.

定義 5.1. $\xi \in \mathbb{C}^n$ に対して, V_ρ から V_λ への線形写像 $p^\rho_\lambda(\xi)$ を次のように定義する,

$$\mathbb{C}^n \times V_\rho \ni (\xi, \phi) \mapsto p^\rho_\lambda(\xi)\phi := \Pi^\rho_\lambda(\phi \otimes \xi) \in V_\lambda.$$

またエルミート内積に関する $p^\rho_\lambda(\xi)$ の随伴線形写像を $p^\rho_\lambda(\xi)^*$ と書く. $p^\rho_\lambda(\xi)$ 及び $p^\rho_\lambda(\xi)^*$ をクリフォード積の一般化とみて**クリフォード準同形**と呼ぶ.

既約分解 $V_\rho \otimes \mathbb{C}^n = \oplus_\lambda V_\lambda$ に同じ既約成分が二つ以上現れてしまうと直交射影を定義できないが，実は既約成分の重複度は 1 である．

命題 5.2. *[7, Theorem 3.4]*

1. 「$n = 2m$」または「$n = 2m+1$ かつ $\rho^m = 0$」のとき，$V_\rho \otimes \mathbb{C}^n$ の既約成分の *highest weight* は $\rho \pm \mu_i$ ($i = 1, 2, \cdots, m$) で *dominant* 条件を満たすもの．

2. $n = 2m+1$ かつ $\rho^m > 0$ のとき．既約成分の *highest weight* は ρ または $\rho \pm \mu_i$ ($i = 1, 2, \cdots, m$) で *dominant* 条件をみたすもの．

例 3. スピノール空間上でクリフォード準同形はクリフォード積の定数倍．

例 4. 自然表現の p 次交代テンソル積表現 $(\pi_{(1_p)}, V_{(1_p)})$ を考える．このとき $V_{(1_p)} \otimes \mathbb{C}^n = V_{(2,1_{p-1})} \oplus V_{(1_{p+1})} \oplus V_{(1_{p-1})}$ となる．対応する gradients は，順に共形キリング作用素 C，外微分 d，余微分 d^* である．

クリフォード準同形に対する関係式は，定義から簡単にわかるわけではない．そのため展開環 $U(\mathfrak{so}(n, \mathbb{C}))$ と関連付ける．まず，補題を二つほど用意する．

補題 5.3. クリフォード準同形 p^ρ_λ は

$$\sum_i p^\rho_\lambda(e_i)\pi_\rho(e_{ij}) = w(\rho; \lambda)p^\rho_\lambda(e_j) \quad \textit{for each } j, \tag{5.1}$$

を満たす．ここで $w(\rho; \lambda)$ は ρ と λ に依存した ***conformal weight*** と呼ばれる定数であり，次で与えられる．

$$w(\rho; \lambda) := \frac{1}{2}(\langle \delta + \lambda, \delta + \lambda \rangle - \langle \delta + \rho, \delta + \rho \rangle - n + 1).$$

Proof. テンソル積表現空間 $V_\rho \otimes \mathbb{C}^n$ 上の作用素

$$C := \pi_\rho \otimes \pi_{\mu_1}(c_2) - \pi_\rho(c_2) \otimes \mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes \pi_{\mu_1}(c_2)$$

を考える．既約成分 V_λ 上では $\pi_\rho \otimes \pi_{\mu_1}(c_2)$ は $\pi_\lambda(c_2)$ であるので，(4.1) から作用素 C は V_λ 上で $4w(\rho; \lambda)\mathrm{id}$ として作用する．よって

$$C(\phi \otimes e_i) = C(\sum_\lambda p^\rho_\lambda(e_i)\phi) = \sum_\lambda 4w(\rho; \lambda)p^\rho_\lambda(e_i)\phi$$

が成立する．一方，

$$\begin{aligned}
C =& \pi_\rho \otimes \pi_{\mu_1}(c_2) - \pi_\rho(c_2) \otimes \mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes \pi_{\mu_1}(c_2) \\
=& \sum_{ij}(\pi_\rho(e_{ij}) \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \pi_{\mu_1}(e_{ij}))(\pi_\rho(e_{ji}) \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \pi_{\mu_1}(e_{ji})) \\
& - \sum_{ij} \pi_\rho(e_{ij})\pi_\rho(e_{ji}) \otimes \mathrm{id} - \sum_{ij} \mathrm{id} \otimes \pi_{\mu_1}(e_{ij})\pi_{\mu_1}(e_{ji}) \\
=& 2\sum_{ij} \pi_\rho(e_{ij}) \otimes \pi_{\mu_1}(e_{ji}).
\end{aligned}$$

となるので，

$$C(\phi\otimes e_i)=2\sum_{kl}\pi_\rho(e_{kl})\phi\otimes\pi_{\mu_1}(e_{lk})e_i=2\sum_{kl}\pi_\rho(e_{kl})\phi\otimes(\delta_{il}e_k-\delta_{ki}e_l)$$
$$=4\sum_k\pi_\rho(e_{ki})\phi\otimes e_k=4\sum_\lambda\sum_k p^\rho_\lambda(e_k)\pi_\rho(e_{ki})\phi.$$

よって，各 λ に対して $\sum_k p^\rho_\lambda(e_k)\pi_\rho(e_{ki})=w(\rho;\lambda)p^\rho_\lambda(e_i)$ を得る． □

補題 5.4. 各 $i,j=1,\cdots,n$ に対して，次が成立する．

$$\sum_\lambda p^\rho_\lambda(e_i)^*p^\rho_\lambda(e_j)=\delta_{ij}. \tag{5.2}$$

Proof. $\phi,\psi\in V_\rho$ とすれば，

$$\delta_{ij}\langle\phi,\psi\rangle=\langle\phi\otimes e_i,\psi\otimes e_j\rangle=\sum_\lambda\langle p^\rho_\lambda(e_i)\phi,p^\rho_\lambda(e_j)\psi\rangle=\langle\sum_\lambda p^\rho_\lambda(e_j)^*p^\rho_\lambda(e_i)\phi,\psi\rangle.$$

を得る．ϕ,ψ は任意でよいので (5.2) が証明できた． □

上の二つの補題をあわせれば，次の命題は明らかであろう．

命題 5.5. クリフォード準同形 $\{p^\rho_\lambda\}_\lambda$ は次をみたす．

$$\sum_\lambda w(\rho;\lambda)^q p^\rho_\lambda(e_i)^*p^\rho_\lambda(e_j)=\pi_\rho(e^q_{ij})\quad for\ q=0,1,\cdots. \tag{5.3}$$

特に，カシミール元 c_q の各既約成分への作用（固有値）は次で与えられる．

$$\sum_\lambda w(\rho;\lambda)^q\sum_i p^\rho_\lambda(e_i)^*p^\rho_\lambda(e_i)=\pi_\rho(c_q). \tag{5.4}$$

この命題を使って $p^\rho_\lambda(e_i)^*p^\rho_\lambda(e_j)$ は $\pi_\rho(e^q_{ij})$ の線形結合で表せることを証明したい．まず $V_\rho\otimes\mathbb{C}^n$ における既約成分の数を N としておく．つまり $N=\#\{\lambda|V_\lambda\subset V_\rho\otimes\mathbb{C}^n\}$．各既約成分の highest weight を辞書式順序でならべて，$\lambda_1=\rho+\mu_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_N$ とすれば，

$$w(\rho;\lambda_1)>w(\rho;\lambda_2)>\cdots>w(\rho;\lambda_N)$$

となることがわかる．ただし，$n=2m$ で $\rho=(\rho^1,\cdots,\rho^m)$ が $\rho^{m-1}>\rho^m=0$ となる場合には，必ず $\lambda_+:=\rho+\mu_m$ 及び $\lambda_-:=\rho-\mu_m$ を highest weight とする既約成分が存在し，conformal weight を並べると，

$$w(\rho;\lambda_1)>w(\rho;\lambda_2)>\cdots>w(\rho;\lambda_+)=w(\rho;\lambda_-)>\cdots>w(\rho;\lambda_N).$$

この $n=2m$ かつ $\rho^{m-1}>\rho^m=0$ となる場合を**例外的な場合**と呼ぶ．このように既約成分の conformal weights は，ほとんど互いに異なっている．そこで命題5.5より，

$$\left(p^\rho_{\lambda_1}(e_i)^*p^\rho_{\lambda_1}(e_j),\cdots,p^\rho_{\lambda_N}(e_i)^*p^\rho_{\lambda_N}(e_j)\right)W^t=\left(\delta_{ij},\pi_\rho(e_{ij}),\cdots,\pi_\rho(e^{N-1}_{ij})\right)$$

を得る．ここで W はサイズが $N\times N$ のファンデルモンデ行列

$$W=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ w(\rho;\lambda_1) & w(\rho;\lambda_2) & \cdots & w(\rho;\lambda_N) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w(\rho;\lambda_1)^{N-1} & w(\rho;\lambda_2)^{N-1} & \cdots & w(\rho;\lambda_N)^{N-1} \end{pmatrix}.$$

この W は例外的な場合を除けば可逆なので $p^\rho_\lambda(e_i)^*p^\rho_\lambda(e_j)$ は $\{\pi_\rho(e^q_{ij})\}_q$ の線形結合となる．例外的な場合には，$\{\pi_\rho(e^q_{ij})\}_q$ だけでは $p^\rho_{\lambda_+}(e_i)^*p^\rho_{\lambda_+}(e_j)$ と $p^\rho_{\lambda_-}(e_i)^*p^\rho_{\lambda_-}(e_j)$ の区別ができない．そこで定義4.4における pf_{ij} を使う．次の命題の証明は面倒ではあるが，直接計算すればよい．

命題 5.6. 展開環の元 pf_{ij} とクリフォード準同形 $\{p^\rho_\lambda\}_\lambda$ の関係は

$$\sum_\lambda \pi_\lambda(\mathrm{pf})p^\rho_\lambda(e_i)^*p^\rho_\lambda(e_j)=\pi_\rho(\mathrm{pf}_{ij}). \tag{5.5}$$

特に，

$$\sum_\lambda \pi_\lambda(\mathrm{pf})\sum_i p^\rho_\lambda(e_i)^*p^\rho_\lambda(e_i)=2m\pi_\rho(\mathrm{pf}).$$

例外的な場合を考えよう．式(4.2)より $\pi_{\lambda_+}(\mathrm{pf})=-\pi_{\lambda_-}(\mathrm{pf})\neq 0$ であり，$\lambda\neq\lambda_\pm$ の場合に $\pi_\lambda(\mathrm{pf})=0$ となる．よって

$$p^\rho_{\lambda_+}(e_i)^*p^\rho_{\lambda_+}(e_j)-p^\rho_{\lambda_-}(e_i)^*p^\rho_{\lambda_-}(e_j)=\frac{1}{\pi_{\lambda_+}(\mathrm{pf})}\pi_\rho(\mathrm{pf}_{ij}).$$

を得る．以上から，次の系を得る．

系 5.7. $p^\rho_\lambda(e_i)^*p^\rho_\lambda(e_j)$ は $\{\pi_\rho(e^q_{ij})\}_q$ 及び $\pi_\rho(\mathrm{pf}_{ij})$ の線形結合で表せる．

我々の目的はgradientsの主表象に対する反対称関係式であった．系5.7から $\{\pi_\rho(e^q_{ij})\}_q$ 及び $\pi_\rho(\mathrm{pf}_{ij})$ の添え字に対する反対称関係式を導けばよい．それは普遍ボホナーワイゼンベック公式(4.4)と(4.7)である．このように主表象の反対称関係式は**表現に依存しない普遍ボホナーワイゼンベック公式という展開環内での関係式から導かれる**．

実際に主表象の反対称な関係式を与えよう．まず，もっとも簡単な場合を議論する．式(5.3)において $q=0,1$ の場合を考える．$e_{ij}=-e_{ji}$ を使えば，

$$\sum_\lambda (p^\rho_\lambda(e_i)^*p^\rho_\lambda(e_j)+p^\rho_\lambda(e_j)^*p^\rho_\lambda(e_i))=2\delta_{ij}, \tag{5.6}$$

$$\sum_\lambda w(\rho;\lambda)(p^\rho_\lambda(e_i)^*p^\rho_\lambda(e_j)+p^\rho_\lambda(e_j)^*p^\rho_\lambda(e_i))=0.$$

を得る．例えば，クリフォード積のクリフォード関係式はこの二式から導くことができる．より多くの関係式を得るために(4.4)及び(4.7)を使う．e^q_{ij} をシフトし

て $\hat{e}^q_{ij}$ としたように，conformal weight も $\hat{w}(\rho;\lambda) := w(\rho;\lambda) + \frac{n-1}{2}$ とシフトしておく．このとき次が成立することは明らかであろう．

$$\sum_\lambda \hat{w}(\rho;\lambda)^q p^\rho_\lambda(e_i)^* p^\rho_\lambda(e_j) = \pi_\rho(\hat{e}^q_{ij}).$$

この式に (4.5) を代入すれば，クリフォード準同形の反対称関係式を得る．

$$\sum_\lambda \left\{ \sum_{p=0}^{2q-1} (-\hat{w}(\rho;\lambda))^p \pi_\rho(\hat{c}_{2q-1-p}) \right\} (p^\rho_\lambda(e_i)^* p^\rho_\lambda(e_j) + p^\rho_\lambda(e_j)^* p^\rho_\lambda(e_i)) = 0.$$

次に $n = 2m$ のとき (4.7) 及び (5.5) より

$$\sum_\lambda \pi_\lambda(\mathrm{pf})\,(p^\rho_\lambda(e_i)^* p^\rho_\lambda(e_j) + p^\rho_\lambda(e_j)^* p^\rho_\lambda(e_i)) = 2\pi_\rho(\mathrm{pf})\delta_{ij}.$$

を得る．応用上はもう少しこの式を変形する必要がある．まず (4.2) から

$$(w(\rho;\lambda) + m - 1)\pi_\lambda(\mathrm{pf}) = (w(\rho;\lambda) + m)\pi_\rho(\mathrm{pf}) \tag{5.7}$$

が各 λ について成立することがわかる．そこで

$$\begin{aligned}
&\sum_\lambda \pi_\lambda(\mathrm{pf}) w(\rho;\lambda)\,(p^\rho_\lambda(e_i)^* p^\rho_\lambda(e_j) + p^\rho_\lambda(e_j)^* p^\rho_\lambda(e_i)) \\
=&\sum_\lambda (-(m-1)\pi_\lambda(\mathrm{pf}) + w(\rho;\lambda)\pi_\rho(\mathrm{pf}) + m\pi_\rho(\mathrm{pf}))(p^\rho_\lambda(e_i)^* p^\rho_\lambda(e_j) + p^\rho_\lambda(e_j)^* p^\rho_\lambda(e_i)) \\
=&-2(m-1)\pi_\rho(\mathrm{pf})\delta_{ij} + 2m\pi_\rho(\mathrm{pf})\delta_{ij} = 2\pi_\rho(\mathrm{pf})\delta_{ij}
\end{aligned}$$

となる．以上のことを定理として述べておこう．

定理 5.8. $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ とする．このときクリフォード準同形 $\{p^\rho_\lambda\}_\lambda$ は次をみたす．

$$\sum_\lambda (p^\rho_\lambda(\xi)^* p^\rho_\lambda(\eta) + p^\rho_\lambda(\eta)^* p^\rho_\lambda(\xi)) = 2\langle \xi, \eta \rangle,$$

$$\sum_\lambda \left\{ \sum_{p=0}^{2q-1} (-\hat{w}(\rho;\lambda))^p \pi_\rho(\hat{c}_{2q-1-p}) \right\} (p^\rho_\lambda(\xi)^* p^\rho_\lambda(\eta) + p^\rho_\lambda(\eta)^* p^\rho_\lambda(\xi)) = 0. \tag{5.8}$$

また $n = 2m$ の時,

$$\sum_\lambda \pi_\lambda(\mathrm{pf})(p^\rho_\lambda(\xi)^* p^\rho_\lambda(\eta) + p^\rho_\lambda(\eta)^* p^\rho_\lambda(\xi)) = 2\pi_\rho(\mathrm{pf})\langle \xi, \eta \rangle, \tag{5.9}$$

$$\sum_\lambda \pi_\lambda(\mathrm{pf})(w(\rho;\lambda) - 1)(p^\rho_\lambda(\xi)^* p^\rho_\lambda(\eta) + p^\rho_\lambda(\eta)^* p^\rho_\lambda(\xi)) = 0. \tag{5.10}$$

さて，カシミール元 c_q の既約 $\mathfrak{so}(n)$ 加群上での固有値を計算する．まずクリフォード準同形が $\mathrm{SO}(n)$ または $\mathrm{Spin}(n)$ の作用と可換であることがわかる．

補題 5.9. $g \in \mathrm{SO}(n)$ または $g \in \mathrm{Spin}(n)$ とし， $\xi \in \mathbb{C}^n$ とすれば，

$$p_\lambda^\rho(\pi_{\mu_1}(g)\xi) = \pi_\lambda(g)p_\lambda^\rho(\xi)\pi_\rho(g^{-1}).$$

Proof. $g \in \mathrm{SO}(n)$ の $V_\rho \otimes \mathbb{C}^n = \oplus_\lambda V_\lambda$ への作用を考えると，

$$\sum_\lambda \pi_\lambda(g)p_\lambda^\rho(\xi)\phi = \pi_\rho \otimes \pi_{\mu_1}(g)(\phi \otimes \xi) = \pi_\rho(g) \otimes \pi_{\mu_1}(g)\xi = \sum_\lambda p_\lambda^\rho(\pi_{\mu_1}(g)\xi)\pi_\rho(g)\phi$$

が成立する．よって， $p_\lambda^\rho(\pi_{\mu_1}(g)\xi) = \pi_\lambda(g)p_\lambda^\rho(\xi)\pi_\rho(g^{-1})$ が成立する． □

カシミール元 c_q の固有値を計算するには，(5.4) により $\sum p_\lambda^\rho(e_i)^* p_\lambda^\rho(e_i)$ を計算すればよい．上の補題からこれは不変元であり，定数となる．実際，

命題 5.10. V_ρ の次元を $d(\rho)$ と書けば，

$$\sum_i p_\lambda^\rho(e_i)^* p_\lambda^\rho(e_i) = d(\lambda)/d(\rho).$$

そこでカシミール元 c_q 及びシフトしたカシミール元 $\hat{c}_q$ の V_ρ 上での固有値は

$$\pi_\rho(c_q) = \frac{1}{d(\rho)}\sum_\lambda w(\rho;\lambda)^q d(\lambda), \quad \pi_\rho(\hat{c}_q) = \frac{1}{d(\rho)}\sum_\lambda \hat{w}(\rho;\lambda)^q d(\lambda).$$

Proof. まず $\{\phi_\alpha\}_{1\le\alpha\le d(\rho)}$ を V_ρ の正規直交基底とする．クリフォード準同形は直交射影 Π_λ^ρ により定義されたので，この Π_λ^ρ のトレースを計算すると，

$$\begin{aligned}
d(\lambda) &= \sum_{\alpha,i}\langle \Pi_\lambda^\rho(\phi_\alpha \otimes e_i), \phi_\alpha \otimes e_i\rangle = \sum_{\alpha,i}\langle p_\lambda^\rho(e_i)\phi_\alpha, \sum_{\lambda'} p_{\lambda'}^\rho(e_i)\phi_\alpha\rangle \\
&= \sum_{\alpha,i}\langle p_\lambda^\rho(e_i)\phi_\alpha, p_\lambda^\rho(e_i)\phi_\alpha\rangle = \sum_\alpha \langle \phi_\alpha, \phi_\alpha\rangle \sum_i p_\lambda^\rho(e_i)^* p_\lambda^\rho(e_i) \\
&= d(\rho)\sum_i p_\lambda^\rho(e_i)^* p_\lambda^\rho(e_i).
\end{aligned}$$

よって $\sum_i p_\lambda^\rho(e_i)^* p_\lambda^\rho(e_i) = d(\lambda)/d(\rho)$ となる． □

ここでの固有値の公式は [16] に基づいている． $d(\rho) = \dim V_\rho$ はワイルの次元公式を使って計算できるので， c_q の固有値に対する具体的な公式を得ることができる．しかし， $d(\lambda)$ と $d(\rho)$ をワイルの次元公式を使って計算するのはかなり面倒である．それを回避する方法は conformal weights を用いた相対次元 $d(\lambda)/d(\rho)$ に対する公式である．これは [6] に載っていて，カシミール元の固有値を計算するにはもっとも効率がよい．

6 リーマン多様体上の gradients

リーマン多様体上の gradients を定義して，その基本的性質である共形共変性について述べる．スピン多様体の場合は，レビチビタ接続をスピン接続に変えて同様にすればよい．

(M,g) を n 次元の向きつきリーマン多様体として，$\mathbf{SO}(M)$ を向きつき正規直交フレーム束とする．構造群 $\mathrm{SO}(n)$ の既約ユニタリ表現 (π_ρ, V_ρ) に対して，同伴エルミートベクトル束 $\mathbf{S}_\rho := \mathbf{SO}(M) \times_{\pi_\rho} V_\rho$ を得る．そして，この同伴束上のレビチビタ接続から導かれる共変微分を ∇ とする．

定義 6.1. テンソル積束 $\mathbf{S}_\rho \otimes T_{\mathbb{C}}(M) = \mathbf{S}_\rho \otimes (T(M) \otimes \mathbb{C})$ の既約分解を $\oplus_\lambda \mathbf{S}_\lambda$ とする．この分解に沿って共変微分 ∇ を分解すれば，次の一階微分作用素を得る．

$$D^\rho_\lambda : \Gamma(M, \mathbf{S}_\rho) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(M, \mathbf{S}_\rho \otimes T^*_{\mathbb{C}}(M)) \xrightarrow{\simeq} \Gamma(M, \mathbf{S}_\rho \otimes T_{\mathbb{C}}(M)) \xrightarrow{\Pi^\rho_\lambda} \Gamma(M, \mathbf{S}_\lambda).$$

ここで Π^ρ_λ は fiberwise な直交射影．**この D^ρ_λ を ρ, λ に付随した gradient** と呼ぶ．

クリフォード準同形は，自然に束準同形に拡張することができる．そこで gradient D^ρ_λ の主表象は p^ρ_λ であるので，ディラック作用素の場合と同様に

$$D^\rho_\lambda(\phi) = \Pi^\rho_\lambda(\sum_i \nabla_{e_i}\phi \otimes e^*_i) = \sum_i p^\rho_\lambda(e_i)\nabla_{e_i}\phi$$

と書ける．また D^ρ_λ の形式的随伴作用素は次で与えられる：

$$(D^\rho_\lambda)^* = -\sum_i p^\rho_\lambda(e_i)^* \nabla_{e_i}.$$

Gradients の重要な性質は共形共変性である．この事実は [7] において述べられているが，クリフォード準同形の性質を使えば直接的な証明を与えられる（[13] 参照）．

命題 6.2 (共形共変性). 計量 g を $g' = \exp(2\sigma)g$（$\sigma \in C^\infty(M)$）と共形変形する．*g から定まる gradient D^ρ_λ と g' から定まる gradient D'^ρ_λ は次のように関係する：*

$$D'^\rho_\lambda = e^{(w(\rho;\lambda)-1)\sigma} \circ D^\rho_\lambda \circ e^{-w(\rho;\lambda)\sigma}.$$

この式が $w(\rho;\lambda)$ を *conformal weight* と呼んだ理由である．

7 リーマン多様体上のボホナーワイゼンベック公式

Gradients に対するボホナーワイゼンベック公式を議論する前に，同伴束 $\mathbf{S}_\rho$ 上の曲率変換についてみていく．$T(M)$ の局所正規直交フレーム $e = (e_1, \cdots, e_n)$ をとって，リーマン曲率テンソル R_T の局所表示を $R_{ijkl} := g(R_T(e_i, e_j)e_k, e_l)$ とする．またリッチテンソルを $R_{ij} = \sum_k R_{ikkj}$ とし，スカラー曲率を $\kappa = \sum_i R_{ii}$ とする．このとき R_{ijkl} は

$$R_{ijkl} = W_{ijkl} + K_{ijkl} + S_{ijkl}$$

と分解される．ここで

$$S_{ijkl} := \frac{\kappa}{n(n-1)}(\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl}), \quad E_{ij} := \frac{1}{n-2}\left(\frac{\kappa}{n}\delta_{ij} - R_{ij}\right),$$
$$K_{ijkl} := E_{ik}\delta_{jl} + E_{jl}\delta_{ik} - E_{il}\delta_{jk} - E_{jk}\delta_{il}, \quad W_{ijkl} := R_{ijkl} - E_{ijkl} - S_{ijkl}.$$

W_{ijkl} は共形ワイルテンソルであり，$\sum_i W_{ijil} = 0$ を満たす．また E_{ij} はアインシュタインテンソルであり，$E_{ij} = E_{ji}$，$\sum_i E_{ii} = 0$ を満たす．

さて，$\mathbf{S}_\rho$ 上の共変微分はレビチビタ接続から導いたものなので，

$$\nabla^2_{X,Y} := \nabla_X \nabla_Y - \nabla_{\nabla_X Y}$$

とすれば，$\mathbf{S}_\rho$ 上の曲率 $R_\rho(X,Y) = \nabla^2_{X,Y} - \nabla^2_{Y,X}$ の局所表示は

$$R_\rho(e_i, e_j) = \frac{1}{2}\sum_{ij} R_{ijkl}\pi_\rho(e_{kl})$$

となる．この曲率 R_ρ を e^q_{ij} を使って縮約する．

定義 7.1. 同伴ベクトル束 $\mathbf{S}_\rho$ 上の**曲率変換**R^q_ρ，$\hat{R}^q_\rho$ $(q = 0, 1, \cdots)$ を

$$R^q_\rho := \sum_{ij} \pi_\rho(e^q_{ij})R_\rho(e_i, e_j), \quad \hat{R}^q_\rho := \sum_{ij} \pi_\rho(\hat{e}^q_{ij})R_\rho(e_i, e_j).$$

によって定義する．また n が偶数のとき pf_{ij} により縮約して曲率変換 R^{pf}_ρ を次で定義：

$$R^{\mathrm{pf}}_\rho := \sum_{ij} \pi_\rho(\mathrm{pf}_{ij})R_\rho(e_i, e_j).$$

リーマン曲率テンソル R_{ijkl} の分解に沿って R^q_ρ 及び $\hat{R}^q_\rho$ は次のように分解する．

$$R^q_\rho = \frac{1}{2}\sum_{ijkl} W_{ijkl}\pi_\rho(e^q_{ij}e_{kl}) - \sum_{ij} E_{ij}\pi_\rho(2e^{q+1}_{ij} + ne^q_{ij}) + \frac{\pi_\rho(c_{q+1})\kappa}{n(n-1)},$$
$$\hat{R}^q_\rho = \frac{1}{2}\sum_{ijkl} W_{ijkl}\pi_\rho(\hat{e}^q_{ij}\hat{e}_{kl}) - \sum_{ij} E_{ij}\pi_\rho(2\hat{e}^{q+1}_{ij} + \hat{e}^q_{ij}) + \frac{\pi_\rho(2\hat{c}_{q+1} - (n-1)\hat{c}_q)\kappa}{n(n-1)}.$$

この分解は消滅定理や固有値評価などの応用を考える際，必要な公式である．

例 5. M が球面 S^n なら R^q_ρ は $\pi_\rho(c_{q+1})$ となる．

次に R^{pf}_ρ を分解する．式 (5.1)，(5.9)，(5.10) を使えば，R^{pf}_ρ のアインシュタインテンソルに依存した部分は

$$\sum_{\lambda,ijk} \pi_\lambda(\mathrm{pf})p^\rho_\lambda(e_i)^* p^\rho_\lambda(e_j)(E_{ik}\pi_\rho(e_{kj}) - E_{jk}\pi_\rho(e_{ki})) = 0$$

となり，スカラー曲率に依存した部分は $\pi_\rho(\mathrm{pf})\kappa/(n-1)$ である．

命題 7.2. 曲率変換 R_ρ^{pf} は**アイシュタインテンソルには依存せず**,

$$R_\rho^{\mathrm{pf}} = \frac{1}{2}\sum_{ijkl} W_{ijkl}\pi_\rho(\mathrm{pf}_{ij}e_{kl}) + \frac{\pi_\rho(\mathrm{pf})\kappa}{n-1}.$$

特に,（1）M が偶数次元共形平坦なら $R_\rho^{\mathrm{pf}} = \frac{\pi_\rho(\mathrm{pf})\kappa}{n-1}$.（2）例外的な場合には, $R_\rho^{\mathrm{pf}} = \sum_{ijkl} W_{ijkl}\pi_\rho(\mathrm{pf}_{ij}e_{kl})/2$.

さて, いよいよ, ボホナーワイゼンベック公式を与える. まず同伴束 $\mathbf{S}_\rho$ 上の二階微分作用素 $(D_\lambda^\rho)^* D_\lambda^\rho$ は

$$(D_\lambda^\rho)^* D_\lambda^\rho = -\sum_{i,j} p_\lambda^\rho(e_i)^* p_\lambda^\rho(e_j)\nabla^2_{e_i,e_j}.$$

となるので, (5.6) より

$$\sum_\lambda (D_\lambda^\rho)^* D_\lambda^\rho = -\sum_{\lambda,i,j} p_\lambda^\rho(e_i)^* p_\lambda^\rho(e_j)\nabla^2_{e_i,e_j} = -\sum_{i,j}\delta_{ij}\nabla^2_{e_i,e_j} = \nabla^*\nabla,$$

を得る. ここで $\nabla^*\nabla$ は $\mathbf{S}_\rho$ 上の**接続ラプラシアン**であり, $\nabla^*\nabla := -\sum_i \nabla^2_{e_i,e_i}$ で与えられる. また普遍ボホナーワイゼンベック公式 (4.5) を使えば

$$\begin{aligned}
\hat{R}_\rho^{2q} &= \sum_{i,j}\pi_\rho(\hat{e}_{ij}^{2q})(\nabla^2_{e_i,e_j} - \nabla^2_{e_j,e_i}) \\
&= -\sum_\lambda \hat{w}(\rho;\lambda)^{2q}(D_\lambda^\rho)^* D_\lambda^\rho - \sum_{i,j}\pi_\rho(\hat{e}_{ji}^{2q} + \sum_{p=0}^{2q-1}(-1)^p\hat{c}_{2q-1-p}\hat{e}_{ji}^p)\nabla^2_{e_j,e_i} \\
&= \sum_\lambda\{\sum_{p=0}^{2q-1}\pi_\rho(\hat{c}_{2q-1-p})(-\hat{w}(\rho;\lambda))^p\}(D_\lambda^\rho)^* D_\lambda^\rho.
\end{aligned}$$

同様に (5.9) を使えば,

$$R_\rho^{\mathrm{pf}} = \sum_\lambda 2(\pi_\rho(\mathrm{pf}) - \pi_\lambda(\mathrm{pf}))(D_\lambda^\rho)^* D_\lambda^\rho.$$

定理 7.3 (最適ボホナーワイゼンベック公式). 同伴束 $\mathbf{S}_\rho$ 上の *gradients* $\{D_\lambda^\rho\}_\lambda$ 及び, その形式的随伴作用素 $\{(D_\lambda^\rho)^*\}_\lambda$ は次を満たす.

$$\sum_\lambda (D_\lambda^\rho)^* D_\lambda^\rho = \nabla^*\nabla, \tag{7.1}$$

$$\sum_\lambda \left\{\sum_{p=0}^{2q-1}\pi_\rho(\hat{c}_{2q-1-p})(-\hat{w}(\rho;\lambda))^p\right\}(D_\lambda^\rho)^* D_\lambda^\rho = \hat{R}_\rho^{2q}, \quad q = 1, 2, \cdots. \tag{7.2}$$

また n が偶数なら, 次が成立.

$$\sum_\lambda 2(\pi_\rho(\mathrm{pf}) - \pi_\lambda(\mathrm{pf}))(D_\lambda^\rho)^* D_\lambda^\rho = R_\rho^{\mathrm{pf}}. \tag{7.3}$$

特に，例外的な場合には，$\lambda_\pm := \rho \pm \mu_m$ として，次が成立．

$$(D^\rho_{\lambda_+})^* D^\rho_{\lambda_+} - (D^\rho_{\lambda_-})^* D^\rho_{\lambda_-} = -\frac{1}{4\pi_{\lambda_+}(\mathrm{pf})} \sum_{ijkl} W_{ijkl}\pi_\rho(\mathrm{pf}_{ij} e_{kl}). \tag{7.4}$$

上のボホナーワイゼンベック公式の一次独立性について見ていこう．gradients の数を N として，$\{D^\rho_{\lambda_i}\}_{i=1}^N$ としておく，Branson の結果から独立な最適ボホナーワイゼンベック公式は $[N/2]$ 個である（序論を参照）．そこで (7.2) 及び (7.3) が $[N/2]$ 個の独立なボホナーワイゼンベック公式を与えることを証明する．式 (7.2) の係数からなるベクトルを $v(q)$ とする，

$$v(q) := {}^t\Big(\sum_{p=0}^{2q-1}(-1)^p\pi_\rho(\hat{c}_{2q-1-p})\hat{w}(\rho;\lambda_1)^p, \cdots, \sum_{p=0}^{2q-1}(-1)^p\pi_\rho(\hat{c}_{2q-1-p})\hat{w}(\rho;\lambda_N)^p\Big).$$

このとき $V(q) := (v(1), v(2), \cdots, v(q))$ は $q \times 2q$ 行列 $C(q)$ と $2q \times N$ 行列 $W(q)$ の積に分解できる．

$$C(q) := \begin{pmatrix} \pi_\rho(\hat{c}_1) & -\pi_\rho(\hat{c}_0) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \pi_\rho(\hat{c}_3) & -\pi_\rho(\hat{c}_2) & \pi_\rho(\hat{c}_1) & -\pi_\rho(\hat{c}_0) & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \pi_\rho(\hat{c}_{2q-1}) & -\pi_\rho(\hat{c}_{2q-2}) & \cdots & \cdots & \cdots & \pi_\rho(\hat{c}_1) & -\pi_\rho(\hat{c}_0) \end{pmatrix},$$

$$W(q) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \hat{w}(\rho;\lambda_1) & \hat{w}(\rho;\lambda_2) & \cdots & \hat{w}(\rho;\lambda_N) \\ \hat{w}(\rho;\lambda_1)^2 & \hat{w}(\rho;\lambda_2)^2 & \cdots & \hat{w}(\rho;\lambda_N)^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{w}(\rho;\lambda_1)^{2q-1} & \hat{w}(\rho;\lambda_2)^{2q-1} & \cdots & \hat{w}(\rho;\lambda_N)^{2q-1} \end{pmatrix}.$$

例外的な場合を除けば，conformal weight は互いに異なるので．行列 $V([N/2]) = C([N/2])W([N/2])$ のランクは $[N/2]$ である．例外的な場合は $V([N/2])$ のランクが $[N/2]-1$ となるが，(7.2) とは独立な公式 (7.4) が存在する．以上から，我々の公式は $[N/2]$ 個の独立な最適ボホナーワイゼンベック公式を与え，Branson の結果と合わせれば次がわかる．

系 7.4. 公式 (7.2) 及び (7.3) は *gradients* に対する，**すべてのボホナーワイゼンベック公式を与える．**

さて，我々がもとめたボホナーワイゼンベック公式と Branson による共形共変作用素との関係について述べる．Branson は [2] において，同伴束上の共形共変二階微分作用素の分類を行っている．まず，次で与えられる微分作用素を考える．

$$(D^\rho_{\lambda_\pm})^* D^\rho_{\lambda_\pm} \quad (\text{例外的な場合}),$$
$$\sum_\lambda \frac{1}{w(\rho;\lambda) + \frac{n-2}{2}}(D^\rho_\lambda)^* D^\rho_\lambda + \frac{\kappa}{2(n-1)} \quad (\text{その他の場合}). \tag{7.5}$$

命題 6.2の証明方法と同様にして，これらが共形共変作用素であることがわかる．

Remark 3. $\Lambda^0(M)$ 上で (7.5) は山辺ラプラシアン（共形ラプラシアン）である．つまり (7.5) は山辺ラプラシアンのベクトル束への一般化．

論文 [2] における重要な結果は，$\mathbf{S}_\rho$ 上の gradients の数 N が偶数なら，微分作用素 (7.5) が零階作用素となることである．つまり (7.5) は最適ボホナーワイゼンベック公式を与える．ここで N が偶数となるのは，次の三つのいずれか (1)$n = 2m$ かつ $\rho^m \neq 0$, (2)$n = 2m+1$ かつ $\rho^m = 1/2$, (3) 例外的な場合．そして，Branson の結果を我々の言葉に翻訳すれば次の命題を得る．

命題 7.5 ([2]). 「$n = 2m$ かつ $\rho^m \neq 0$」または「$n = 2m+1$ かつ $\rho^m = 1/2$」とする．このとき次の主表象の反対称関係式を得る．

$$\sum_\lambda \frac{1}{w(\rho;\lambda)+\frac{n-2}{2}}(p^\rho_\lambda(\xi)^* p^\rho_\lambda(\eta) + p^\rho_\lambda(\eta)^* p^\rho_\lambda(\xi)) = 0 \quad \textit{for } \xi \textit{ and } \eta \textit{ in } \mathbb{R}^n. \tag{7.6}$$

まず「$n = 2m$ かつ $\rho^m \neq 0$」の場合を考えてみる．実は，反対称関係式 (7.6) はパフィアン型の反対称関係式と同値である．$\rho^m \neq 0$ なら，$\pi_\rho(\mathrm{pf}) \neq 0$ なので，式 (5.7) 及び (5.9) を使えば (7.6) を証明できる．実際，(7.3) を書き換えると，

$$\sum_\lambda \frac{1}{w(\rho;\lambda)+\frac{n-2}{2}}(D^\rho_\lambda)^* D^\rho_\lambda + \frac{\kappa}{2(n-1)} = -\frac{1}{4\pi_\rho(\mathrm{pf})}\sum W_{ijkl}\pi_\rho(\mathrm{pf}_{ij}e_{kl}). \tag{7.7}$$

となる．このように，パフィアン型ボホナーワイゼンベック公式は Branson の零階共形共変作用素に一致する．また $n = 2m$ かつ $\rho^{m-1} > \rho^m = 0$ となる例外的な場合には (7.4) における $(D^\rho_{\lambda_+})^* D^\rho_{\lambda_+} - (D^\rho_{\lambda_-})^* D^\rho_{\lambda_-}$ が零階共形共変微分作用素になる．

次に「$n = 2m+1$ かつ $\rho^m = 1/2$」の場合を考える．この場合に主表象レベルで (7.6) を**直接証明する方法は現在のところ知られていない**．なぜなら n が奇数の場合にはパフィアンに相当するものが存在しないからである．命題 7.4より (7.6) は (5.8)（$q = 1, \cdots, [N/2]$）の線形結合として書けることは確かであるのだが．

「$n = 2m+1$ かつ $\rho^m = 1/2$」の場合の直接的な証明法はわからないが，遠回りして (7.6) が成立することは証明できる．そして (7.6) を使えば，次のボホナーワイゼンベック公式を得る（$n = 2m$ なら (7.7) に一致）．

$$\begin{aligned}&\sum_\lambda \frac{1}{w(\rho;\lambda)+\frac{n-2}{2}}(D^\rho_\lambda)^* D^\rho_\lambda + \frac{\kappa}{2(n-1)}\\ &= -\frac{1}{4}\sum_{\lambda,i,j,k,l}\frac{1}{w(\rho;\lambda)+\frac{n-2}{2}}W_{ijkl}p^\rho_\lambda(e_i)^* p^\rho_\lambda(e_j)\pi_\rho(e_{kl}).\end{aligned} \tag{7.8}$$

また [2] の結果と合わせれば次がわかる．

命題 7.6. *Gradients* の数 N **が偶数なら，定数倍を除いてアインシュタインテンソルに依存しない最適ボホナーワイゼンベック公式が唯一つ存在**する．それは，例外的な場合には (7.4) であり，それ以外の場合には (7.8) である．一方 N **が奇数の場合には，そのようなボホナーワイゼンベック公式は存在しない．**

以上で，リーマン多様体上のボホナーワイゼンベック公式の話を終えるが，応用（消滅定理や固有値評価など）については，[4], [5], [13] を参照．

8 幾何構造とボホナーワイゼンベック公式

この章ではリーマン多様体に幾何構造を課した場合のボホナーワイゼンベック公式について述べる．手法はどれも同様であり，主表象とホロノミー環の展開環を関連付け，普遍ボホナーワイゼンベック公式を計算すればよい．しかし，それぞれの幾何構造に応じて様々な工夫が必要であるし，表現論も異なってくる．一般的に成立することは，既約同伴束上に gradients が N 個存在するなら，独立なボホナーワイゼンベックは少なくとも $[N/2]$ 個は存在することである．**これは** $[N/2]$ **に一致すると予想されるが**，証明されているのは $\mathrm{SO}(n)$ の場合のみ．$\mathrm{SO}(n)$ の場合である [1] と同様に，他の場合も証明すればよいのだが，難しい問題であると思われる．以下で，それぞれの幾何構造に付随したボホナーワイゼンベック公式に対する注意点を述べる．

（1）．ケーラーの場合

M をケーラー多様体とする．このとき接束は $T(M)\otimes\mathbb{C}=T^{1,0}(M)\oplus T^{0,1}(M)$ と分解する．同伴束 $\mathbf{S}_\rho$ 上の共変微分 ∇ も $\nabla^{1,0}+\nabla^{0,1}$ と分解するので，$(1,0)$-Kählerian gradients $\{D^\rho_\lambda\}_\lambda$ と $(0,1)$-Kählerian gradients $\{D^\rho_{\lambda'}\}_{\lambda'}$ が存在する．これらに対するボホナーワイゼンベック公式は

$$\sum_\lambda a_\lambda (D^\rho_\lambda)^* D^\rho_\lambda = \sum_{\lambda'} b_{\lambda'} (D^\rho_{\lambda'})^* D^\rho_{\lambda'} + (\text{curvature action})$$

という形になる．そして各 $(D^\rho_\lambda)^* D^\rho_\lambda$ は $\{(D^\rho_{\lambda'})^* D^\rho_{\lambda'}\}_{\lambda'}$ と曲率変換の線形結合として表すことができる．例えば，コンパクトケーラー多様体上で $\mathbf{S}_\rho$ の正則な切断 ϕ を考える．正則とは $\phi\in\ker\nabla^{0,1}=\cap_{\lambda'}\ker D^\rho_{\lambda'}$ となることである．よって正則切断に対する $(D^\rho_\lambda)^* D^\rho_\lambda$ の作用は曲率変換の作用で定まってしまう．この事実から，いくつかの消滅定理を得ることができる．またスピンケーラー多様体上のディラック作用素は $\oplus_p\Lambda^{0,p}(M)$ 上の gradients を標準束 K のルート $\sqrt{K}$ で twist したものである．そこで twisted ボホナーワイゼンベック公式を使ってディラック作用素の固有値評価を得ることができる．詳しいことは [12] を参照．

（2）．四元数ケーラーの場合

M を実 $4k$ 次元四元数ケーラー多様体とする．構造群が $\mathrm{Sp}(k)\mathrm{Sp}(1)$ であるので，ボホナーワイゼンベック公式は $\mathrm{Sp}(1)$ 型と $\mathrm{Sp}(k)$ 型の二種類の公式が存在する．四元数ケーラー多様体はアインシュタイン多様体であり，スカラー曲率は定数となることから，$\mathrm{Sp}(1)$ 型ボホナーワイゼンベック公式における曲率変換は定数となる．特に，この $\mathrm{Sp}(1)$ 型だけを使って正四元数ケーラー多様体の奇数次ベッチ数が零であることが証明できる（正とはスカラー曲率が正のこと）．また [15](Kramer, Semmelmann and Weingart, 1999) における四元数ケーラー多様体上のディラック作用素の固有値評価も得ることができる．四元数ケーラー多様体上の様々な消滅定理は [18](Semmelmann and Weingart, 2002) において述べられている．我々の手法を使えば，その結果をカバーすることができ，より精密かつ一般的な結果を得

ることができる．詳しいことは [14] を参照．著者が思うには，我々の手法は不変式論的手法であるので [14] 以上の消滅定理や固有値評価はでないはずである．

(3)．その他

Berger の分類に従えば，他に考える幾何構造は，(a) カラビ-ヤウ構造（SU($n/2$) 構造），(b) 超ケーラー構造（Sp($n/4$) 構造），(c) G_2 構造, (d) Spin(7) 構造である．

(a)（SU($n/2$) 構造）これまで見てきたように，ボホナーワイゼンベック公式は局所的な話である（応用上は消滅定理などの大域的な話）．よって，カラビ-ヤウの場合は，上で述べたケーラー多様体でリッチ平坦とすればよいであろう．また，表現論的な視点からみても U($n/2$) と SU($n/2$) には，それほど違いはない．
(b)（Sp($n/4$) 構造）超ケーラー構造の場合は [11](Homma, 2004) を参照．
(c)-(d)（$G_2(n)$，Spin(7) 構造）これら幾何構造に対するボホナーワイゼンベック公式は [17](Semmelmann, 2004) に紹介されている．[17] におけるボホナーワイゼンベック公式は [8] の手法を G_2 と Spin(7) の場合に適用したものである．

さて，消滅定理はリッチ曲率やスカラー曲率の評価に依存したものが多い．(a)-(d) の幾何構造をもつ多様体はリッチ平坦な多様体であり，ボホナーワイゼンベック公式を作ったとしても，消滅定理などへの応用は難しいと思われる（それ以前に，これらの幾何構造をもつコンパクト多様体の構成が難解であるのだが）．そうは言っても，[11] における Sp(n) カシミール元に対する関係式は不変式としては新しい公式であるし，[17] における G_2, Spin(7) 多様体上のキリング微分形式が平行であるという幾何学的な応用もある．

参考文献

[1] T. Branson, *Stein-Weiss operators and ellipticity,* J. Funct. Anal. **151** (1997), 334-383.

[2] T. Branson, *Second order conformal covariants,* Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 1031-1042.

[3] T. Branson, *Kato constants in Riemannian geometry,* Math. Res. Lett. **7** (2000), 245-261.

[4] T. Branson and O. Hijazi, *Vanishing theorems and eigenvalue estimates in Riemannian spin geometry,* Internat. J. Math. **8** (1997), 921-934.

[5] T. Branson and O. Hijazi, *Improved forms of some vanishing theorems in Riemannian spin geometry,* Internat. J. Math. **11** (2000), 291-304.

[6] D. Calderbank, P. Gauduchon and M. Herzlich, *Refined Kato inequalities and conformal weights in Riemannian geometry,* J. Funct. Anal. **173** (2000), 214-255

[7] H. D. Fegan, *Conformally invariant first order differential operators,* Quart. J. Math. Oxford, **27** (1976), 371-378.

[8] P. Gauduchon, *Structures de Weyl et théorèmes d'annulation sur une variété conforme autoduale,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **18** (1991), 563-629.

[9] N. J. Hitchin, *Linear field equations on self-dual spaces,* Proc. Roy. Soc. London, A **370** (1980), 173-191.

[10] Y. Homma, *Casimir elements and Bochner identities on Riemannian manifolds,* Prog. in Math. Phys. **34**. (2003), 185-200,

[11] Y. Homma, *Universal Bochner-Weitzenböck formulas for hyper-Kählerian gradients,* in "Advances in Analysis and Geometry", Trend in Math. Birkhäuser (2004), 189-208.

[12] Y. Homma, *Bochner identities for Kählerian gradients*, preprint.

[13] Y. Homma, *Bochner-Weitzenböck formula and curvature actions on Riemannian manifolds*, preprint.

[14] Y. Homma, *Estimating the eigenvalues on Quaternionic Kähler Manifolds*, preprint.

[15] W. Kramer, U. Semmelmann and G. Weingart, *Eigenvalue estimates for the Dirac operator on quaternionic Kähler manifolds,* Math. Z. **230** (1999), 727-751.

[16] S. Okubo, *Casimir invariants and vector operators in simple and classical Lie algebras,* J. Math. Phys. **18**, (1977), 2382-2394.

[17] U. Semmelmann, *Killing forms on* G_2 *and* Spin(7) *manifolds,* math.DG/0410065.

[18] U. Semmelmann and G. Weingart, *Vanishing Theorems for Quaternionic Kähler Manifolds,* J. Reine Angew. Math. **544** (2002), 111-132.

[19] E. M. Stein and G. Weiss, *Generalization of the Cauchy-Riemann equations and representation of the rotation group,* Amer. J. Math. **90** (1968), 163-196.

[20] D. P. Želobenko, *Compact Lie Groups and Their Representations,* Trans. Math. Monographs **40**, American Mathematical Society, Providence, 1973.