数理解析研究所講究録 1408 巻 2004 年 97-109

Explicit form of the evolution operator for the Tavis-Cummings model and quantum diagonalization method

早稲田大学理工学部 鈴木 達夫 (Tatsuo Suzuki) *
School of Science and Engineering, Waseda Univ.

概 要

量子コンピュータのモデル（Tavis-Cummings model）に由来する，非可換成分を持った行列の指数関数の具体的な計算を通じ，非可換計算の問題点を考察する．この研究は，藤井一幸・東田杏子・加藤良輔・和田由佳子氏（横浜市大・理）との共同研究に基づくものである．

1 準備

a, $a^{\dagger}$ を生成・消滅演算子とする．$[a, a^{\dagger}] = 1$

$$\sigma_{+} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad 1_{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

さらに $s = +, -, 3$ に対し，

$$\sigma_{i}^{(s)} = 1_{2} \otimes \cdots \otimes 1_{2} \otimes \sigma_{s} \otimes 1_{2} \otimes \cdots \otimes 1_{2} \ (i - \text{position}) \ \in \ M(2^{n}, \mathbf{C}),$$

$$S_{+} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{i}^{(+)}, \quad S_{-} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{i}^{(-)}, \quad S_{3} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sigma_{i}^{(3)}$$

とする．

非可換成分を持った行列を

$$A = A_{n} = S_{+} \otimes a + S_{-} \otimes a^{\dagger} \tag{1.1}$$

*E-mail address: suzukita@gm.math.waseda.ac.jp

とおく．例えば

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a & a & 0 \\ a^\dagger & 0 & 0 & a \\ a^\dagger & 0 & 0 & a \\ 0 & a^\dagger & a^\dagger & 0 \end{pmatrix}.$$

（n 原子の）Tavis-Cummings model という量子コンピュータのモデルを解析するために

$$\mathrm{e}^{-itgA} = \mathrm{e}^{-itg\left(S_+\otimes a + S_-\otimes a^\dagger\right)} \qquad (g : \text{constant}) \tag{1.2}$$

の計算が必要になる．

注意 1.1. $su(2)$ の表現 $\rho(\sigma_+) = S_+$，$\rho(\sigma_-) = S_-$，$\rho(\sigma_3/2) = S_3$ は一般には可約となるが，よく知られた $su(2)$ のテンソル表現の既約分解を用いると，結局，各 $spin\ j$ での表現行列に対応した指数関数を計算すればよい．

例えば，

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a & a & 0 \\ a^\dagger & 0 & 0 & a \\ a^\dagger & 0 & 0 & a \\ 0 & a^\dagger & a^\dagger & 0 \end{pmatrix}$$

に対し，

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

とすると，

$$T^\dagger A_2 T = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & \sqrt{2}a & 0 \\ & \sqrt{2}a^\dagger & 0 & \sqrt{2}a \\ & 0 & \sqrt{2}a^\dagger & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \\ & B_1 \end{pmatrix}$$

と書き直せる．これは，よく知られた $su(2)$ のテンソル表現の既約分解 $\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2} = 0\oplus 1$ に対応する．

以後，spin j に対し，$J = 2j+1$ とおく． E_{ij} $(i,j = 1,\cdots,J)$ を (i,j)-行列単位とする．次の

行列の指数関数を計算すればよい.

$$
\begin{aligned}
B &= B_j = \sum_{m=1}^{J-1} \sqrt{(J-m)m}\ \ aE_{m,m+1} + \sum_{m=1}^{J-1} \sqrt{(J-m)m}\ \ a^\dagger E_{m+1,m} \\
&= \begin{pmatrix}
0 & \sqrt{(J-1)1}a & & & & \\
\sqrt{(J-1)1}a^\dagger & 0 & \sqrt{(J-2)2}a & & & \\
& \sqrt{(J-2)2}a^\dagger & 0 & \sqrt{(J-3)3}a & & \\
& & \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & & \sqrt{2(J-2)}a^\dagger & 0 & \sqrt{1(J-1)}a \\
& & & 0 & \sqrt{1(J-1)}a^\dagger & 0
\end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

注意 1.2. $(a^\dagger)^n a^n$ ***(normal order)***, $a^n(a^\dagger)^n$ ***(antinormal order)*** **の, *number operator* $N \equiv a^\dagger a$ を用いた表示**

number operator $N \equiv a^\dagger a$ に対し,

$$
aN = aa^\dagger a = (N+1)a, \qquad Na^\dagger = a^\dagger a a^\dagger = a^\dagger(N+1), \tag{1.4}
$$

さらに N の関数 $f(N)$ に対し,

$$
af(N) = f(N+1)a, \qquad f(N)a^\dagger = a^\dagger f(N+1) \tag{1.5}
$$

が成り立つことに注意する.

補題 1.3. 上記のことを用いると, 次が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
(a^\dagger)^n a^n &= N(N-1)\cdots(N-n+1) \equiv N^{\underline{n}} \\
& \qquad\qquad \text{(下降階乗べき関数)} \\
a^n(a^\dagger)^n &= (N+1)(N+2)\cdots(N+n) \equiv (N+1)^{\overline{n}} \\
& \qquad\qquad \text{(上昇階乗べき関数)}
\end{aligned}
.
$$

注意 1.4. 生成・消滅演算子の非可換性の, 差分を用いた解釈

normal order と *antinormal order* の母関数による関係は,

$$
e^{\beta a} e^{\alpha a^\dagger} = e^{\partial_{a^\dagger}\partial_a} e^{\alpha a^\dagger} e^{\beta a} = e^{\alpha\beta} e^{\alpha a^\dagger} e^{\beta a}.
$$

これを展開すると次の式を得る.

$$
(N+1)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} k! \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^2 N^{\underline{n-k}}. \tag{1.6}
$$

この式は次のように解釈できる;

$$p_n(N) = (N+1)^{\overline{n}} = (N+n)^{\underline{n}} \quad とおく.$$

一般に，$p_n(N)$ を N を変数とする n 次多項式，Δ_+ を前進差分作用素（差分間隔 $=1$）とするとき，*Newton* 展開（または「テイラー展開の差分化」）

$$p_n(N) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{N^{\underline{k}}}{k!}\Delta_+^k p_n(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{N^{\underline{n-k}}}{(n-k)!}\Delta_+^{n-k} p_n(0)$$

が成り立つ．公式 $\Delta_+ N^{\underline{n}} = nN^{\underline{n-1}}$ に注意して，

$$\begin{aligned}
\Delta_+^{n-k} p_n(0) &= \Delta_+^{n-k}(N+n)^{\underline{n}}|_{N=0} \\
&= n(n-1)\cdots(k+1)\cdot n^{\underline{k}} \\
&= \frac{n!}{k!}\frac{n!}{(n-k)!}
\end{aligned}$$

より *(1.6)* を得る．よって，生成・消滅演算子の非可換性から導かれる等式は，*Newton* 展開（または「テイラー展開の差分化」）に他ならない．

2　量子対角化法

(1.3) の B に対し，

$$B = UD_BU^\dagger$$

$$U: ユニタリ行列, \quad D_B: 対角行列$$

なる分解を用いて，B の指数関数を求める．

注意 2.1. B, U, D_B は非可換成分をもつ行列であるので，通常の対角化をそのまま実行することはできない．

量子対角化法

Step1：古典化

B の中の $a, a^\dagger$ を可換成分 $z, \bar{z}$ に置き換えた行列

$$C \equiv \begin{pmatrix}
0 & \sqrt{(J-1)1}z & & & & \\
\sqrt{(J-1)1}\bar{z} & 0 & \sqrt{(J-2)2}z & & & \\
 & \sqrt{(J-2)2}\bar{z} & 0 & \sqrt{(J-3)3}z & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & \sqrt{2(J-2)}\bar{z} & 0 & \sqrt{1(J-1)}z \\
 & & & 0 & \sqrt{1(J-1)}\bar{z} & 0
\end{pmatrix}$$

に対して通常の対角化を行う．
固有値

$$\{(J-1)|z|,(J-3)|z|,\cdots,(J-2i+1)|z|,\cdots,-(J-3)|z|,-(J-1)|z|\}$$

（正規化した）固有ベクトル

$$|(J-2i+1)|z|>=\left(x_{ki}\frac{\bar{z}^{k-1}}{|z|^{k-1}}\right)\quad i=1,\cdots,J$$

（x_{ki} も具体的に求まるが，ここでは略）
これを用いてユニタリ行列 W を

$$W=\left(x_{ki}\frac{\bar{z}^{k-1}}{|z|^{k-1}}\right)$$

とおくと C は対角化される：

$$C=WD_CW^\dagger$$

Step2：量子化
今得られた W に対し，非可換成分を持つユニタリ行列を

$$U_1=\left(\frac{x_{ki}}{\sqrt{N(N-1)\cdots(N-k+2)}}(a^\dagger)^{k-1}\right)=\left((a^\dagger)^{k-1}\frac{x_{ki}}{\sqrt{(N+1)(N+2)\cdots(N+k-1)}}\right)\tag{2.1}$$

とおく．(分母に ordering 問題が生じる．) (2.1) の演算子の部分は

$$\frac{1}{\sqrt{(a^\dagger)^{k-1}a^{k-1}}}(a^\dagger)^{k-1}=(a^\dagger)^{k-1}\frac{1}{\sqrt{a^{k-1}(a^\dagger)^{k-1}}}\tag{2.2}$$

であることに注意．
このようにおくと，$U_1^\dagger U_1=U_1U_1^\dagger=1$ が確かめられる．
Step3：古典化

$$U_1^\dagger BU_1=R$$

を計算すると，可換成分のみをもつエルミート行列になる．この R に対し，通常の対角化を行えば，B の対角化が完了する．
例として，$J=3$ $(j=1)$ の場合，

$$B=B_1=\begin{pmatrix}0&\sqrt{2}a&0\\ \sqrt{2}a^\dagger&0&\sqrt{2}a\\ 0&\sqrt{2}a^\dagger&0\end{pmatrix}$$

に対しては,

$$W=\left(x_{ki}\frac{\bar{z}^{k-1}}{|z|^{k-1}}\right),\quad (x_{ki})=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

であるので,“W の量子化” U_1 を

$$U_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{N}}a^\dagger & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{N}}a^\dagger\\ \frac{1}{2\sqrt{N(N-1)}}(a^\dagger)^2 & -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{N(N-1)}}(a^\dagger)^2 & \frac{1}{2\sqrt{N(N-1)}}(a^\dagger)^2\end{pmatrix}$$

とおくと,

$$U_1^\dagger BU_1=R=\begin{pmatrix}\sqrt{N+1}+\sqrt{N+2} & -\frac{\sqrt{N+2}-\sqrt{N+1}}{\sqrt{2}} & 0\\ -\frac{\sqrt{N+2}-\sqrt{N+1}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sqrt{N+2}-\sqrt{N+1}}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{\sqrt{N+2}-\sqrt{N+1}}{\sqrt{2}} & -(\sqrt{N+1}+\sqrt{N+2})\end{pmatrix}$$

となる.

$a, a^\dagger$ の非可換性により,R には零でない非対角成分が登場してしまうので,この R に対してもう一度(通常の)対角化を行うと,

$$R=U_2DU_2^\dagger,$$

$$U_2=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2(2N+3)}+\sqrt{N+2}+\sqrt{N+1}}{2\sqrt{2(2N+3)}} & \frac{\sqrt{N+2}-\sqrt{N+1}}{\sqrt{2}\sqrt{2(2N+3)}} & -\frac{\sqrt{2(2N+3)}-\sqrt{N+2}-\sqrt{N+1}}{2\sqrt{2(2N+3)}}\\ \frac{\sqrt{N+2}-\sqrt{N+1}}{\sqrt{2}\sqrt{2(2N+3)}} & \frac{\sqrt{N+2}+\sqrt{N+1}}{\sqrt{2(2N+3)}} & -\frac{\sqrt{N+2}-\sqrt{N+1}}{\sqrt{2}\sqrt{2(2N+3)}}\\ \frac{\sqrt{2(2N+3)}-\sqrt{N+2}-\sqrt{N+1}}{2\sqrt{2(2N+3)}} & \frac{\sqrt{N+2}-\sqrt{N+1}}{\sqrt{2}\sqrt{2(2N+3)}} & \frac{\sqrt{2(2N+3)}+\sqrt{N+2}+\sqrt{N+1}}{2\sqrt{2(2N+3)}}\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}\sqrt{2(2N+3)} & & \\ & 0 & \\ & & -\sqrt{2(2N+3)}\end{pmatrix} \tag{2.3}$$

となるので,

$$U = U_1U_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{N+1}}{\sqrt{2(2N+3)}} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{N+2}}{\sqrt{2(2N+3)}} & \frac{\sqrt{N+1}}{\sqrt{2(2N+3)}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{N}}a^\dagger & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{N}}a^\dagger \\ -\frac{1}{\sqrt{N-1}\sqrt{2(2N-1)}}(a^\dagger)^2 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}\sqrt{2(2N-1)}}(a^\dagger)^2 & \frac{1}{\sqrt{N-1}\sqrt{2(2N-1)}}(a^\dagger)^2 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

とすると

$$B_1 = UDU^\dagger$$

となり，非可換成分を持つ行列の対角化が完了する.

注意 2.2. 実際の計算で最も困難なのは，U_2 を具体的に求める段階である．大きな j に対しては，ほとんど不可能である．($J = 4$ ($j = 3/2$) までは求めてある.)

この対角化を用いれば，B の指数関数を求めることができる.

$$\mathrm{e}^{-itgB_1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

where

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \frac{N+2+(N+1)\cos\left(tg\sqrt{2(2N+3)}\right)}{2N+3}, \quad b_{12} = -i\frac{\sin\left(tg\sqrt{2(2N+3)}\right)}{\sqrt{2N+3}}a, \\
b_{13} &= \frac{-1+\cos\left(tg\sqrt{2(2N+3)}\right)}{2N+3}a^2, \quad b_{21} = -i\frac{\sin\left(tg\sqrt{2(2N+1)}\right)}{\sqrt{2N+1}}a^\dagger, \\
b_{22} &= \cos\left(tg\sqrt{2(2N+1)}\right), \quad b_{23} = -i\frac{\sin\left(tg\sqrt{2(2N+1)}\right)}{\sqrt{2N+1}}a, \\
b_{31} &= \frac{-1+\cos\left(tg\sqrt{2(2N-1)}\right)}{2N-1}(a^\dagger)^2, \quad b_{32} = -i\frac{\sin\left(tg\sqrt{2(2N-1)}\right)}{\sqrt{2N-1}}a^\dagger, \\
b_{33} &= \frac{N-1+N\cos\left(tg\sqrt{2(2N-1)}\right)}{2N-1}.
\end{aligned}$$

重要な注意 2.3. 量子対角化法におけるユニタリ行列 U は二つのユニタリ行列の積に分解できる；

$$U = U_aU_c \tag{2.6}$$

ただし，U_a は対角行列，U_c は可換成分（N の関数）のみをもつとする．大切なのは U_a で，具体的には，

$$
\begin{aligned}
U_a &\equiv \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{N^{\underline{1}}}}a^\dagger & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{N^{\underline{2}}}}(a^\dagger)^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{\sqrt{N^{\underline{J-1}}}}(a^\dagger)^{J-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & a^\dagger\frac{1}{\sqrt{(N+1)^{\overline{1}}}} & & & \\ & & (a^\dagger)^2\frac{1}{\sqrt{(N+1)^{\overline{2}}}} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & (a^\dagger)^{J-1}\frac{1}{\sqrt{(N+1)^{\overline{J-1}}}} \end{pmatrix}, \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
N^{\underline{n}} &\equiv N(N-1)\cdots(N-n+1) = (a^\dagger)^n a^n \\
&\qquad (\text{下降階乗べき関数}=\textit{normal order}) \\
(N+1)^{\overline{n}} &\equiv (N+1)(N+2)\cdots(N+n) = a^n(a^\dagger)^n \\
&\qquad (\text{上昇階乗べき関数}=\textit{anti-normal order})
\end{aligned}
$$

である．このとき，

$$
B = U_a U_c D_B U_c^\dagger U_a^\dagger \qquad \Longleftrightarrow \qquad U_a^\dagger B U_a = U_c D_B U_c^\dagger \qquad (\text{可換-非可換分離}) \qquad (2.8)
$$

右辺は可換成分行列なので，左辺もそうである．よって非可換計算を可換計算に持ち込むには $U_a^\dagger B U_a$ を求めればよく，これは $U^\dagger B U$ よりも計算が楽になる．つまり今回の量子対角化法は次のように改良することができる．

Step 1'-2' (1.3) で与えられる B に対し，U_a を (2.7) で与える．

Step 3' このとき，次が成り立つ．

$$U_a^\dagger B U_a = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & & & & \\ b_1 & 0 & b_2 & & & \\ & b_2 & 0 & b_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & b_{J-2} & 0 & b_{J-1} \\ & & & & b_{J-1} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{(J-1)1}\sqrt{N+1} & & & \\ \sqrt{(J-1)1}\sqrt{N+1} & 0 & \sqrt{(J-2)2}\sqrt{N+2} & & \\ & \sqrt{(J-2)2}\sqrt{N+2} & 0 & \sqrt{(J-3)3}\sqrt{N+3} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

ここで，$b_m \equiv \sqrt{(J-m)m}\sqrt{N+m}$ $(m=1,2,\cdots,J-1)$.

よって，この (2.9) に対し，通常の対角化を行えばよい．

上記の例である $J=3$ $(j=1)$ の場合，(2.9) を対角化するユニタリ行列は

$$U_c = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{N+1}}{\sqrt{2}\sqrt{2N+3}} & \frac{\sqrt{N+2}}{\sqrt{2N+3}} & \frac{\sqrt{N+1}}{\sqrt{2}\sqrt{2N+3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{N+2}}{\sqrt{2}\sqrt{2N+3}} & -\frac{\sqrt{N+1}}{\sqrt{2N+3}} & \frac{\sqrt{N+2}}{\sqrt{2}\sqrt{2N+3}} \end{pmatrix}$$

となり，$U = U_a U_c$ は (2.4) に一致する．

注意 2.4. この U_c は先ほどの U_2 ほどは複雑ではないが，やはり大きな j に対しては，具体的に求めるのはほとんど不可能である．

⇒ 非可換成分行列 B の関数を求めるために **"量子スペクトル分解"** を考える！

3 （量子）ユニタリ行列，固有値の不定性の原因 $\cdots$ $U(1)$-不定性

先ほどの $J=3$ $(j=1)$ の場合，

$$U = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{N+1}}{\sqrt{2(2N+3)}} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{N+2}}{\sqrt{2(2N+3)}} & \frac{\sqrt{N+1}}{\sqrt{2(2N+3)}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{N}}a^\dagger & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{N}}a^\dagger \\ -\frac{1}{\sqrt{N-1}\sqrt{2(2N-1)}}(a^\dagger)^2 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}\sqrt{2(2N-1)}}(a^\dagger)^2 & \frac{1}{\sqrt{N-1}\sqrt{2(2N-1)}}(a^\dagger)^2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{2(2N+3)} & & \\ & 0 & \\ & & -\sqrt{2(2N+3)} \end{pmatrix}$$

とすると

$$B = B_1 = UDU^\dagger$$

であった．

つまり，B の固有値は $\sqrt{2(2N+3)}, 0, -\sqrt{2(2N+3)}$ と思える．

しかし，この分解は一意ではない．例えば，次の式が成り立つ．

$$B_1 = \tilde{U}\tilde{D}\tilde{U}^\dagger$$

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2(2N+3)}}a & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{N+2}}{\sqrt{N+1}\sqrt{2(2N+3)}}a & -\frac{1}{\sqrt{2(2N+3)}}a \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2(2N-1)}}a^\dagger & \frac{\sqrt{2}\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}\sqrt{2(2N-1)}}a^\dagger & -\frac{1}{\sqrt{2(2N-1)}}a^\dagger \end{pmatrix},$$

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{2(2N+1)} & & \\ & 0 & \\ & & -\sqrt{2(2N+1)} \end{pmatrix}.$$

このとき，B の固有値は $\sqrt{2(2N+1)}, 0, -\sqrt{2(2N+1)}$ と見えてしまう．

$\Rightarrow$ **固有値の不定性**

このような現象の原因は「ユニタリ群 $U(J)$ への $U(1)$ 作用」である．

つまり古典レベルで、ユニタリ行列 W に $\pm\frac{z^k}{|z|^k}, \pm\frac{\bar{z}^k}{|z|^k}$ をかけても同じ固有値を実現するが，量子化したときは異なる意味を持つ．それが不定性の原因となる．

先ほどの $\tilde{U}$ と元の U の関係は $\tilde{U} = U \cdot (-\frac{1}{\sqrt{N}}a)$ であり，U に右からかけた因子により，固有値が変化する．

$\Rightarrow$ 量子対角化法では，$U(1)$ 因子を固定して考えるべきである．

4　量子スペクトル分解

一般に，可換成分行列 $Y = U_a^\dagger B U_a$ のスペクトル分解を

$$Y = \sum_{k=1}^{J} \lambda_k(N) P_k = \sum_{k=1}^{J} \begin{pmatrix} \lambda_k(N) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k(N) \end{pmatrix} P_k$$

とする．このとき，**(2.7) で与えられる** U_a **は対角行列である**ことに注意すると，

$$
\begin{aligned}
B &= U_a Y U_a^\dagger \\
&= \sum_k U_a \begin{pmatrix} \lambda_k(N) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k(N) \end{pmatrix} P_k U_a^\dagger \\
&= \sum_k \begin{pmatrix} \lambda_k(N) & & & \\ & \lambda_k(N-1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k(N-J+1) \end{pmatrix} U_a P_k U_a^\dagger \\
&\equiv \sum_{k=1}^{J} \Lambda_k Q_k, \qquad \textbf{(量子スペクトル分解)} \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\Lambda_k \equiv \begin{pmatrix} \lambda_k(N) & & & \\ & \lambda_k(N-1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k(N-J+1) \end{pmatrix}, \qquad Q_k \equiv U_a P_k U_a^\dagger. \qquad (4.2)
$$

このように，量子スペクトル分解において，“固有値”は「**固有行列**」となり，また，Q_k ($k = 1, \cdots, J$) は直交射影行列の条件を満たすこともわかる．よって，求めたい B の指数関数は次のように書ける．

定理 4.1.

$$
\begin{aligned}
\exp(-itgB) &= \sum_{k=1}^{J} \exp(-itg\Lambda_k) Q_k \qquad (4.3) \\
&= \sum_{k=1}^{J} \begin{pmatrix} \exp(-itg\lambda_k(N)) & & & \\ & \exp(-itg\lambda_k(N-1)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \exp(-itg\lambda_k(N-J+1)) \end{pmatrix} Q_k.
\end{aligned}
$$

例として，$J = 3$ ($j = 1$) で計算する．

$$
U_a^\dagger B_1 U_a = Y = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ b_1 & 0 & b_2 \\ 0 & b_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b_1 = \sqrt{2}\sqrt{N+1},\ b_2 = \sqrt{2}\sqrt{N+2},
$$

ここでYの固有値を

$$\lambda_1=\sqrt{b_1^2+b_2^2}=\sqrt{2(2N+3)}\equiv\lambda,\ \lambda_2=0,\ \lambda_3=-\sqrt{b_1^2+b_2^2}=-\sqrt{2}\sqrt{2N+3}=-\lambda$$

とおく．さらにP_1,P_2,P_3を

$$\begin{aligned}P_1 &= \frac{(Y-\lambda_2 I)(Y-\lambda_3 I)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}=\frac{1}{2(b_1^2+b_2^2)}\begin{pmatrix} b_1^2 & b_1\lambda & b_1b_2 \\ b_1\lambda & b_1^2+b_2^2 & b_2\lambda \\ b_1b_2 & b_2\lambda & b_2^2\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2(2N+3)}\begin{pmatrix} N+1 & \sqrt{N+1}\sqrt{2N+3} & \sqrt{(N+1)(N+2)} \\ \sqrt{N+1}\sqrt{2N+3} & 2N+3 & \sqrt{N+2}\sqrt{2N+3} \\ \sqrt{(N+1)(N+2)} & \sqrt{N+2}\sqrt{2N+3} & N+2\end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_2 &= \frac{(Y-\lambda_1 I)(Y-\lambda_3 I)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}=\frac{1}{-(b_1^2+b_2^2)}\begin{pmatrix} -b_2^2 & 0 & b_1b_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ b_1b_2 & 0 & -b_1^2\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2N+3}\begin{pmatrix} N+2 & 0 & -\sqrt{(N+1)(N+2)} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{(N+1)(N+2)} & 0 & N+1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_3 &= \frac{(Y-\lambda_1 I)(Y-\lambda_2 I)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}=\frac{1}{2(b_1^2+b_2^2)}\begin{pmatrix} b_1^2 & -b_1\lambda & b_1b_2 \\ -b_1\lambda & b_1^2+b_2^2 & -b_2\lambda \\ b_1b_2 & -b_2\lambda & b_2^2\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2(2N+3)}\begin{pmatrix} N+1 & -\sqrt{N+1}\sqrt{2N+3} & \sqrt{(N+1)(N+2)} \\ -\sqrt{N+1}\sqrt{2N+3} & 2N+3 & -\sqrt{N+2}\sqrt{2N+3} \\ \sqrt{(N+1)(N+2)} & -\sqrt{N+2}\sqrt{2N+3} & N+2\end{pmatrix},\end{aligned}$$

とおくと，Yのスペクトル分解は次で与えられる．

$$\begin{aligned}Y &= \lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\lambda_3P_3\\ &= \lambda P_1+0\cdot P_2-\lambda P_3.\end{aligned}\tag{4.4}$$

今，

$$Q_1=U_aP_1U_a^\dagger=\begin{pmatrix} \frac{N+1}{2(2N+3)} & \frac{1}{2\sqrt{2N+3}}a & \frac{1}{2(2N+3)}a^2 \\ \frac{1}{2\sqrt{2N+1}}a^\dagger & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2N+1}}a \\ \frac{1}{2(2N-1)}(a^\dagger)^2 & \frac{1}{2\sqrt{2N-1}}a^\dagger & \frac{N}{2(2N-1)}\end{pmatrix},\tag{4.5}$$

$$Q_2 = U_a P_2 U_a^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{N+2}{2N+3} & 0 & -\frac{1}{2N+3}a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2N-1}(a^\dagger)^2 & 0 & \frac{N-1}{2N-1} \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

$$Q_3 = U_a P_3 U_a^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{N+1}{2(2N+3)} & -\frac{1}{2\sqrt{2N+3}}a & \frac{1}{2(2N+3)}a^2 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2N+1}}a^\dagger & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2N+1}}a \\ \frac{1}{2(2N-1)}(a^\dagger)^2 & -\frac{1}{2\sqrt{2N-1}}a^\dagger & \frac{N}{2(2N-1)} \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \lambda(N) & & \\ & \lambda(N-1) & \\ & & \lambda(N-2) \end{pmatrix}, \qquad \Lambda_2 = 0, \qquad \Lambda_3 = -\Lambda_1 \tag{4.8}$$

であり，指数関数の計算において，0-固有値の項が $(\exp 0)Q_2 = Q_2 \neq 0$ であることに注意すると，

$$\begin{aligned} & \exp(-itgB) \\ = \ & \exp(-itg\Lambda_1)Q_1 + (\exp 0)Q_2 + \exp(itg\Lambda_1)Q_3 \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{N+2+(N+1)\cos(tg\lambda(N))}{2N+3} & -i\frac{1}{\sqrt{2N+3}}\sin(tg\lambda(N))a & \frac{1}{2N+3}(-1+\cos(tg\lambda(N)))a^2 \\ -i\frac{1}{\sqrt{2N+1}}\sin(tg\lambda(N-1))a^\dagger & \cos(tg\lambda(N-1)) & -i\frac{1}{\sqrt{2N+1}}\sin(tg\lambda(N-1))a \\ \frac{1}{2N-1}(-1+\cos(tg\lambda(N-2)))(a^\dagger)^2 & -i\frac{1}{\sqrt{2N-1}}\sin(tg\lambda(N-2))a^\dagger & \frac{N-1+N\cos(tg\lambda(N-2))}{2N-1} \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

と求まる．これは以前の結果 (2.5) と一致する．

参考文献

[1] K.Fujii K.Higashida, R.Kato, T.Suzuki, Y.Wada, *Quantum Diagonalization Method in the Tavis-Cummings Model,* quant-ph/0410003.

[2] K.Fujii K.Higashida, R.Kato, T.Suzuki, Y.Wada, *Explicit Form of the Evolution Operator of Tavis-Cummings Model: Three and Four Atoms Cases,* To appear in Int. J. of Geom. Methods in Mod. Phys.

[3] K.Fujii and T.Suzuki, *A New Symmetric Expression of Weyl Ordering,* Mod. Phys. Lett. A19 (2004) 827-840.

[4] H.Omori, Y.Maeda, N.Miyazaki, A.Yoshioka: *Strange phenomena related to ordering problems in quantizations,* J. of Lie Theory, Vol.13, No.2(2003), 481-510.