

一般化多段搜索割当ゲーム

防衛大学校・情報工学科 宝崎隆祐 (Ryusuke Hohzaki)

Department of Computer Science,
National Defense Academy

1 はじめに

探索者及び逃避者の参加する探索ゲームには、両プレイヤーともに移動戦略を採る探索・逃避ゲームと呼ばれる問題 [11] と、逃避者は移動戦略を採るものの探索者は手持ちの探索資源の配分戦略を採る探索割当ゲームと呼ばれる問題がある。後者の問題に関する研究は少ないが [6, 7], 特に多段ゲームによりモデル化したものはほとんど無い。ゲームの多段化は、単純にまたは確率的に繰り返されるような形態のゲームの解析だけではなく、多数回の繰り返しの中でゲーム的狀況がどのような定常的狀態に落ち着くのかといった定常解への洞察を与えてくれる。

報告 [3, 4] においては、搜索問題の基本的評価尺度である探知確率を用いた多段搜索割当ゲームについて議論したが、そこでは搜索資源と探知確率を結びつける探知関数を具体的に特定してゲームの解の導出を行った。今回はこの探知関数を一般的に取り扱うことにより、ゲームの解が持つ一般的性質を明らかにする。また搜索空間については、離散的空間を基本モデルとした上で、現実問題で重要となる連続搜索空間における解についても考察を行った。

2 離散空間モデルの記述と定式化

探索者と目標が参加する次のような多段確率ゲームを考える。

- A1. 離散搜索時間上での多段階ゲームを考える。便宜上、搜索終了時刻を $n = 0$ とし、残り時点数によりステージ数を表す。
- A2. 搜索空間は離散的なセル空間 $K = \{1, \dots, K\}$ から成る。
- A3. 探索者と目標という 2 人のプレイヤーがこのゲームに参加する。探索者は、総予算制約下で搜索資源を各セルに投入し目標を探知することに努める。一方、目標は、ある移動制約の下でセル間を移動することにより探索者の探知を逃れようとする。プレイヤーの戦略、情報集合及び利得とゲームの進行は以下のとおりである。
 - (1) 各ステージ n の当初において、探索者は、目標の現に存在するセル k と残存エネルギー量を知ることができる。一方、目標は、探索者の過去の搜索資源配分及びそれまでに使用した予算を知る。
 - (2) その後、目標はセル k からの移動を確率的に決定することができ、その際の移動制約は次のとおりである。セル k から次に移動できるセル群は $N(k) \subseteq K$ に制約されている。さらに、セル i, j 間の移動にはエネルギー $\mu(i, j)$ の消費が伴うため、移動可能なセル群は現在の残存エネルギーにも依存する。ただし、 $i \neq j$ に対し $\mu(i, j) > 0$ であり、また $\mu(k, k) = 0$, $k \in N(k)$ とし、エネルギーを消耗しても現に存在するセルに滞在し続けることだけは可能である。目標の保有する初期エネルギーを e_0 とする。
 - (3) 一方探索者は、目標の移動セルを推理しつつ手持ちの残存予算内で各セルへの配分資源量を決定する。単位資源量をセル i へ投入するにはコスト $c_i > 0$ が必要とされる。探索者の初期搜索予算は Φ_0 である。
 - (4) 目標がセル i に移動した場合、そのセルに投入された搜索資源 x により、探索者は目標を確率 $1 - q_i(x)$ で探知できる。すなわち、 $q_i(x)$ は投入資源量 x に対するセル i での非探知確率を表すがこれをセル i の非探知関数と呼び、次の性質を仮定する。

(仮定 Q1) $q_i(x)$ は x に対し 1 回微分可能で単調減少する正值関数, さらに $q_i(0) = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} q_i(x) = q_i^\infty \geq 0$ である.

(仮定 Q2) $q_i(x)$ は x の狭義凸関数である.

目標が探知された場合, 探索者は利得 1 を得, 目標は同量を失い探索は終了する.

(5) ステージ n で目標探知がなければ, 次のステージ $n-1$ へ進む.

A4. 目標が探知された時点, または最終ステージ $n=0$ に到達した場合に探索は終了する. 探索者はこの多段ゲームのマキシマイザーとして, 目標はミニマイザーとして行動する.

問題は, 一般的な非探知関数をもつ探知確率尺度の多段確率ゲームである. セル k に存在し残存エネルギー e を保有する目標が次に移動可能なセル群 $N(k, e)$ は, 次式で与えられる.

$$N(k, e) \equiv \{i \in N(k) \mid \mu(k, i) \leq e\}. \quad (1)$$

目標の採る移動戦略を $\{p(k, i), i \in K\}$ で表す. ただし, $p(k, i) \geq 0$ は次にセル i に移動する確率であるが, 上式から $p(k, i) = 0, i \in K - N(k, e)$ であり, $\sum_{i \in N(k, e)} p(k, i) = 1$ を満足する. したがって, 移動戦略の実行可能領域は次式で与えられる.

$$P_k(e) = \left\{ \{p(k, i)\} \mid p(k, i) \geq 0, i \in N(k, e), p(k, i) = 0, i \in K - N(k, e), \sum_{i \in N(k, e)} p(k, i) = 1 \right\}. \quad (2)$$

一方, ステージ n における探索者の資源配分計画を $\{\varphi(i, n), i \in K\}$ で表そう. $\varphi(i, n) \geq 0$ はセル i へ投入する探索資源量であるが, 残存予算を Φ とすれば探索資源の総コストはそれ以内になければならない. すなわち, $\sum_i c_i \varphi(i, n) \leq \Phi$ であるが, 目標の移動可能セル群 $N(k, e)$ 以外のセルへの資源投入は無駄であることは明らかだから, 探索者の資源配分の実行可能領域 $\Psi(\Phi)$ は, 次式で与えられる.

$$\Psi(\Phi) = \left\{ \{\varphi(i, n)\} \mid \varphi(i, n) \geq 0, i \in N(k, e), \varphi(i, n) = 0, i \in K - N(k, e), \sum_{i \in N(k, e)} c_i \varphi(i, n) \leq \Phi \right\}. \quad (3)$$

ステージ n の当初において残存エネルギー e を持つセル k に存在する目標と探索予算 Φ を持つ探索者によるこの時点以降のゲームの値が存在すると仮定して, これを $v_n(k, e, \Phi)$ とおく. 目標が確率 $p(k, i)$ でセル i に移動した場合, 探索者の資源投入 $\varphi(i, n)$ により確率 $1 - q_i(\varphi(i, n))$ で目標は探知され, 探知されなければ次のステージへ移行するが, その場合, (セル, 残存エネルギー) 状態として $(i, e - \mu(k, i))$ をもつ目標と残存探索予算 $\Phi' = \Phi - \sum_{i \in N(k, e)} c_i \varphi(i, n)$ をもつ探索者とのステージ $n-1$ 以降のゲームへと遷移する. すなわち, 状態 (n, k, e, Φ) のゲームは, $p(k, i)q_i(\varphi(i, n)) \geq 0$ の確率で状態 $(n-1, i, e - \mu(k, i), \Phi')$, $i \in N(k, e)$ のゲームに移行し, 確率 $\sum_{i \in N(k, e)} p(k, i)(1 - q_i(\varphi(i, n))) < 1$ でゲームが終了する確率ゲームである. ただし, 一般的な確率ゲームではゲームの終了する確率が常に正であることによりいつかはゲームは終了し, ゲームの値も一意に決まる性質を持つが [8, 9], ここでのゲームはステージ数が $n=0$ となった場合にもプレイが終了する多段ゲームでもある. このような多段確率ゲームにおけるゲームの値は, ゲームの遷移の法則に従って出現するゲームをゲームの値で置き換えることにより, 逐次的に決定される. 以上から, その存在を仮定したゲームの値 $v_n(k, e, \Phi)$ は次の漸化式を満足する.

$$\begin{aligned} v_n(k, e, \Phi) &= \\ & \max_{\varphi \in \Psi(\Phi)} \min_{p \in P_k(e)} \sum_{i \in N(k, e)} p(k, i) \left\{ (1 - q_i(\varphi(i, n))) + q_i(\varphi(i, n))v_{n-1}(i, e - \mu(k, i), \Phi - \sum_{j \in N(k, e)} c_j \varphi(j, n)) \right\} \\ & = 1 - \min_{\varphi \in \Psi(\Phi)} \max_{p \in P_k(e)} \sum_{i \in N(k, e)} p(k, i) \left\{ 1 - v_{n-1}(i, e - \mu(k, i), \Phi - \sum_j c_j \varphi(j, n)) \right\} q_i(\varphi(i, n)). \end{aligned} \quad (4)$$

$n=0$ の場合は明らかに $v(\cdot)$ の値はゼロである.

$$v_0(k, e, \Phi) = 0. \quad (5)$$

また、 $\Phi = 0$ の場合には、仮定 Q1 から、目標はどんな移動戦略を採ろうと探知されることなく最終ステージに到達し、 $n = 1$ における上式の評価からやはり $v_n(\cdot) = 0$ となる。

$$v_n(k, e, 0) = 0. \quad (6)$$

$e = 0$ の場合は、仮定 A3(2) より $N(k, e) = \{k\}$ となり、目標は搜索終了までセル k に存在することになるから、搜索者はこのセルにのみ搜索資源を投入し続けることになる。このとき再帰式 (4) は次のようになる。

$$v_n(k, 0, \Phi) = 1 - \min_{0 \leq \varphi(k, n) \leq \Phi/c_k} \{1 - v_{n-1}(k, 0, \Phi - c_k \varphi(k, n))\} q_k(\varphi(k, n)) \quad (7)$$

$$\text{初期値: } v_1(k, 0, \Phi) = 1 - q_k(\Phi/c_k). \quad (8)$$

$q_k(\cdot)$ が凸であったとしてもこの再帰方程式を解くことは容易ではないが、特に次の仮定の下では明示的な解が得られる。

(仮定 Q2') $\log q_i(x)$ は x に対し凸である。

この仮定により (仮定 Q2) も成立し、帰納法を使うことにより最適解 $\varphi(k, n) = \varphi(k, n-1) = \dots = \varphi(k, 1) = \Phi/c_k/n$ と次の最適値を得る。

$$v_n(k, 0, \Phi) = 1 - \left\{ q_k \left(\frac{\Phi}{nc_k} \right) \right\}^n. \quad (9)$$

ここで記号 $h_n(k, e, \Phi) \equiv 1 - v_n(k, e, \Phi)$ を用いて漸化式 (4) を取り扱いやすくすれば次式となる。

$$h_n(k, e, \Phi) = \min_{\varphi \in \Psi(\Phi)} \max_{p \in P_k(e)} \sum_{i \in N(k, e)} p(k, i) h_{n-1}(i, e - \mu(k, i), \Phi - \sum_j c_j \varphi(j, n)) q_i(\varphi(i, n)). \quad (10)$$

この場合のステージ $n = 0$ における初期条件、あるいは $\Phi = 0$ の場合の値は次式となる。

$$h_0(k, e, \Phi) = 1, \quad h_n(k, e, 0) = 1. \quad (11)$$

ゲームの値 $v_n(\cdot)$ が探知確率尺度で問題を取り扱っていたのに対し、(10) 式による定式化は問題を非探知確率尺度により問題を捉え、目標が探知されずに全搜索期間を逃げおおせれば目標は利得 1 を得るとするゼロ和ゲームを考えていることに等しい。さて、 $e = 0$ の場合の境界条件としては、(仮定 Q2') の下では次式を得る。

$$h_n(k, 0, \Phi) = \left\{ q_k \left(\frac{\Phi}{nc_k} \right) \right\}^n. \quad (12)$$

さて、ゲームの値の存在を仮定して定式化を進めてきたが、(仮定 Q2') の下ではこのことが真であることは後ほど証明するとして、当面は漸化式 (10) にあるようにミニマックス最適化問題として議論してゆくことにする。まず、予算に関する最小化を、ステージ n で使用する予算 Φ' が与えられているとした場合の各セルへの予算配分を最適化した上で、この Φ' をさらに最適化するという二重の最小化問題として定式化しておく。

$$h_n(k, e, \Phi) = \min_{0 \leq \Phi' \leq \Phi} \min_{\varphi \in \Psi_n(\Phi')} \max_{p \in P_k(e)} \sum_{i \in N(k, e)} p(k, i) h_{n-1}(i, e - \mu(k, i), \Phi - \Phi') q_i(\varphi(i, n)). \quad (13)$$

ただし、 $\Psi_n(\Phi')$ は次式で定義される。

$$\Psi_n(\Phi') = \left\{ \left\{ \varphi(i, n), i \in K \right\} \left| \varphi(i, n) \geq 0, i \in N(k, e), \varphi(i, n) = 0, i \in K - N(k, e), \sum_{i \in N(k, e)} c_i \varphi(i, n) = \Phi' \right. \right\}.$$

3 1 段階ゲームの均衡解

ここでは、 Φ, Φ' は与えられているとして、(13) 式の二番目以降の最適化、すなわち $\min_{\varphi \in \Psi_n(\Phi')}$ 以降の最適化問題を議論する。簡単化のため、 $h_{n-1}(i, e - \mu(k, i), \Phi - \Phi')$ は与えられているとしてこれを β_i と表し、 $p(k, i)$ を p_i に、 $\varphi(i, n)$ を φ_i に、またセル群 $N(k, e)$ を A として、ステージ n での最適解 φ_i, p_i を求める次のミニマックス最適化問題を考える。

$$\min_{\{\varphi_i\}} \max_{\{p_i\}} \sum_{i \in A} p_i \beta_i q_i(\varphi_i). \quad (14)$$

凸ゲームに関する知見 [5] から、問題の最適値はマックスミニ値にも一致し、ゲームの値を与える。1 段階ゲームであるこの問題は、最初に 1 つのセル i を確率 p_i で選んで隠れた後は他のセルへ移動しない静止目標と、総量 Φ' の手持ち探索資源を各セルに投入して目標を探知しようとする探索者の間の潜伏・探索ゲームと呼ばれる問題となり、非探知関数 $q_k(\cdot)$ に具体的な形を仮定して解いているいくつかの研究がある [1, 2]。ここでは $q_k(\cdot)$ を特定化せず一般的に問題を解いていこう。

φ_i の実行可能条件は $\varphi_i \geq 0, i \in A, \sum_{i \in A} c_i \varphi_i = \Phi'$ であり、 p_i のそれは $p_i \geq 0, i \in A, \sum_{i \in A} p_i = 1$ である。さて、

$$\max_{\{p_i\}} \sum_{i \in A} p_i \beta_i q_i(\varphi_i) = \max_i \beta_i q_i(\varphi_i) \quad (15)$$

と変形できることから、上の問題 (14) は次のような凸計画問題になる。

$$\begin{aligned} (P_0) \quad & \min \rho \\ & s.t. \quad \beta_i q_i(\varphi_i) \leq \rho, \quad i \in A \\ & \quad \sum_{i \in A} c_i \varphi_i = \Phi' \\ & \quad \varphi_i \geq 0, \quad i \in A. \end{aligned}$$

条件式の第 1 式、2 式及び 3 式に対して双対変数 $\nu_i \geq 0, \lambda, \eta_i \geq 0$ を割り当てることにより、ラグランジュ関数を

$$L(\rho, \varphi; \nu, \lambda, \eta) = \rho + \sum_i \nu_i (\beta_i q_i(\varphi_i) - \rho) + \lambda \left(\sum_{i \in A} c_i \varphi_i - \Phi' \right) - \sum_i \eta_i \varphi_i$$

で定義すれば、均衡解の必要十分条件として次のような Karush-Kuhn-Tucker 条件 (K-K-T 条件) を得る。

$$\partial L / \partial \rho = 1 - \sum_i \nu_i = 0 \quad (16)$$

$$\partial L / \partial \varphi_i = \beta_i \nu_i q'_i(\varphi_i) + \lambda c_i - \eta_i = 0, \quad i \in A \quad (17)$$

$$\nu_i (\beta_i q_i(\varphi_i) - \rho) = 0, \quad i \in A \quad (18)$$

$$\eta_i \varphi_i = 0, \quad i \in A \quad (19)$$

$$\sum_i c_i \varphi_i = \Phi' \quad (20)$$

$$\beta_i q_i(\varphi_i) \leq \rho \quad (21)$$

$$\varphi_i \geq 0, \quad i \in A \quad (22)$$

$$\nu_i \geq 0, \quad \eta_i \geq 0, \quad i \in A. \quad (23)$$

もし $\varphi_i > 0$ ならば、(19) 式より $\eta_i = 0$ であるから、(17) 式を使って

$$\beta_i \nu_i q'_i(\varphi_i) = -\lambda c_i \quad (24)$$

となる。導関数 $q'_i(\cdot)$ の単調増加性から逆関数 $q_i^{-1}(\cdot)$ が存在し、上式は $\varphi = q_i^{-1}(-\lambda c_i / \nu_i \beta_i)$ と変形できる。もし $\varphi_i = 0$ ならば、 $\eta_i \geq 0$ から $\beta_i \nu_i q'_i(0) \geq -\lambda c_i$ である。また、この不等式が成り立っていれば任意の $x > 0$ に対し $\beta_i \nu_i q'_i(x) > \beta_i \nu_i q'_i(0) \geq -\lambda c_i$ となり (24) 式は決して成立しないから $\varphi_i = 0$ である。そこで、 $q'_i(0) \geq y$ なる y に対し $[q_i^{-1}(y)]^+ = 0$ とし、 $q'_i(0) < y < q_i^{\infty} \equiv \lim_{x \rightarrow \infty} q'_i(x) \leq 0$ なる y には $[q_i^{-1}(y)]^+ = q_i^{-1}(y)$ 、 $q_i^{\infty} < y$ には $[q_i^{-1}(y)]^+ = \infty$ と定義した関数 $[q_i^{-1}(\cdot)]^+$ を使えば、 φ_i は次のように表現できる。

$$\varphi_i = [q_i^{-1}(-\lambda c_i / \nu_i \beta_i)]^+ . \quad (25)$$

したがって、(20) 式から

$$G(\lambda) \equiv \sum_{i \in A} c_i [q_i^{-1}(-\lambda c_i / \nu_i \beta_i)]^+ = \Phi'$$

であるが、左辺 $G(\lambda)$ は λ に対する単調減少関数であり、 $\lambda_{max} \equiv \max_i (-\nu_i \beta_i q'_i(0) / c_i) > 0$ とすれば $G(\lambda_{max}) = 0$ であり、 $\lambda_{min} \equiv -\min_i \nu_i \beta_i q_i^{\infty} / c_i \geq 0$ とおけば $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{min}^+} G(\lambda) = \infty$ となる。したがって、ある $\lambda \in (\lambda_{min}, \lambda_{max}]$ に対し $G(\lambda) = \Phi'$ となる根が唯一存在し、それは $\lambda > 0$ でもある。また、条件式 (21) から $\rho > 0$ は明らかである。上述したとおり、 $\varphi_i > 0$ ならば $\beta_i \nu_i q'_i(\varphi_i) = -\lambda c_i$ であるが、 $\nu_i = 0$ はこの等式を成立させないから $\nu_i > 0$ である。故に、(18) 式より

$$\beta_i q_i(\varphi_i) = \rho \quad (26)$$

となる。すなわち、

$$\varphi_i = q_i^{-1}(\rho / \beta_i) = q_i^{-1}(-\lambda c_i / \nu_i \beta_i) \quad (27)$$

である。したがって、 $q'_i(q_i^{-1}(\rho / \beta_i)) = -\lambda c_i / \nu_i \beta_i$ から、

$$\nu_i = -\lambda c_i / \beta_i / q'_i(q_i^{-1}(\rho / \beta_i)) . \quad (28)$$

(21) 式から $\beta_i q_i(\varphi_i) \leq \rho$ であるが、 $\beta_i q_i(0) = \beta_i \leq \rho$ ならば $\varphi_i > 0$ に対し $\beta_i q_i(\varphi_i) < \rho$ となるから、(18) 式より $\nu_i = 0$ である。故に、上述した理由により $\varphi_i = 0$ である。つまり、 $\varphi_i > 0$ となるのは $\beta_i > \rho$ のときであり、このとき $\nu_i > 0$ でもある。以上から、最適解 φ_i を与えるもう一つの式が得られる。

$$\varphi_i = \{ q_i^{-1}(\rho / \beta_i) \text{ if } \beta_i \geq \rho, \quad 0 \text{ if } \beta_i < \rho \} . \quad (29)$$

さて、これまでの議論を踏まえ (28) 式を用いて条件式 (16) を表すと、

$$\sum_{\{i | \beta_i \geq \rho\}} \left(-\frac{\lambda c_i / \beta_i}{q'_i(q_i^{-1}(\rho / \beta_i))} \right) = 1$$

であるが、集合 $U_\rho \equiv \{i | \beta_i \geq \rho\}$ は $\rho < \rho'$ に対し $U_\rho \supseteq U_{\rho'}$ となり、また左辺の括弧 () 内は ρ の増加に対し減少するから、左辺の ρ に対する単調減少性を考えれば、最適なラグランジュ乗数 λ と ρ とは、 ρ が大きくなれば λ も大きくなる次式のような単調な関係式をもつ。

$$\lambda = -1 / \sum_{\{i | \beta_i \geq \rho\}} \frac{c_i / \beta_i}{q'_i(q_i^{-1}(\rho / \beta_i))} . \quad (30)$$

以上を整理すると次式にまとめられる。

$$\nu_i = \begin{cases} -\lambda c_i / \beta_i / q'_i(q_i^{-1}(\rho / \beta_i)), & i \in \{j \in A \mid \beta_j \geq \rho\} \\ 0, & i \in \{j \in A \mid \beta_j < \rho\} . \end{cases} \quad (31)$$

$$\sum_{\{i | \beta_i \geq \rho\}} c_i q_i^{-1}(\rho / \beta_i) = \Phi' . \quad (32)$$

上式の左辺は、 ρ が $(\max_i \beta_i q_i^\infty, \max_i \beta_i]$ の範囲で増加する間に、 $(\infty, 0]$ の間を単調に減少してゆくから、方程式は唯一の解をもつ。最適解の導出は、以下のようにすればよい。まず方程式 (32) の解 ρ を求めると、この値が 1 段階ゲーム (14) 式の最適値となる。それを (29) 式と (30) 式に代入することで、それぞれ最適な搜索資源配分 $\{\varphi_i\}$ と最適なラグランジュ乗数 λ が導出できる。さらに、(31) 式が $\{\nu_i\}$ を導く。

問題 (P_0) には目標の移動戦略 $\{p_i\}$ は決定変数としては含まれていないが、(15) 式の変形から、 $\beta_i < \rho$ なる i に対しては $p_i = 0$ は明らかである。ここで最適な p_i が与えられているとした場合の $\{\varphi_i\}$ に関する最適化問題 $\min_{\varphi} \sum_i p_i \beta_i q_i(\varphi_i)$ の K-K-T 条件は、

$$p_i^* \beta_i q_i'(\varphi_i) + \lambda c_i - \eta_i = 0, \quad \eta_i \varphi_i = 0, \quad \sum_i c_i \varphi_i = \Phi', \quad \varphi_i \geq 0, \quad \nu_i \geq 0, \quad \eta_i \geq 0$$

となるが、 $\varphi_i > 0$ ならば $\eta_i = 0$ だから $p_i^* \beta_i q_i'(\varphi_i) = -\lambda c_i$ 、故に $p_i^* = -\lambda c_i / \beta_i q_i'(\varphi_i)$ であるが、これに (27) 式を代入すると、(28) 式と同じものが得られる。また、上述した $p_i = 0$ となる条件を考えると、最適な p_i は問題 (P_0) に対して設定したラグランジュ乗数 ν_i と全く同じであることが分かる。(31) 式の λ を (30) 式で入れ替え (29) 式を使うと、最適な移動戦略は次式により表すことができる。

$$p_i = \begin{cases} c_i / \beta_i q_i'(\varphi_i) / \sum_{\{j, \beta_j \geq \rho\}} c_j / \beta_j q_j'(\varphi_j) & , i \in \{j \in A \mid \beta_j \geq \rho\} \\ 0 & , i \notin \{j \in A \mid \beta_j \geq \rho\} \end{cases} \quad (33)$$

ここで、 $n = 1$ の場合のゲームの値 $h_1(k, e, \Phi)$ を求めてみよう。 $h_0(k, e, \Phi) = 1$ であることから、原問題 (10) は (14) 式の 1 段階ゲームにおいて $\beta_i = 1$ としたものに他ならない。もし最適値が $\rho > 1$ であれば、 $A_1(k, e, \Phi, \Phi') = \emptyset$ となり、すべてのセル i に対して $p^*(k, i) = 0$ となるから矛盾する。したがって $\rho \leq 1$ であるが、そのとき $A_1(k, e, \Phi, \Phi') = N(k, e)$ となることを考慮すると、1 段階ゲームの値 $h_1(k, e, \Phi)$ は方程式

$$\sum_{i \in N(k, e)} c_i q_i^{-1}(\rho) = \Phi \quad (34)$$

の根 $\rho^* \in (\max_i q_i^\infty, 1]$ により与えられ、またゲームの解は次式となる。

$$\varphi^*(i, 1) = q_i^{-1}(\rho^*), \quad i \in N(k, e) \quad (35)$$

$$p^*(k, i) = c_i / q_i'(\varphi^*(i, 1)) / \sum_{j \in N(k, e)} c_j / q_j'(\varphi^*(j, 1)), \quad i \in N(k, e) \quad (36)$$

最後に、1 段階ゲームに関するこれまでの結果は問題 (13) 式中の $\min_{\varphi \in \Psi_n(\Phi')} \max_{p \in P_k(e)}$ で始まる最適化に容易に適用でき、以下の漸化式を得る。

$A_n(k, e, \Phi, \Phi'; \rho) \equiv \{i \in N(k, e) \mid \rho \leq h_{n-1}(i, e - \mu(k, i), \Phi - \Phi')\}$ とすると、方程式

$$\sum_{i \in A_n(k, e, \Phi, \Phi'; \rho)} c_i q_i^{-1}(\rho / h_{n-1}(i, e - \mu(k, i), \Phi - \Phi')) = \Phi' \quad (37)$$

の解である $\rho = \rho_n(k, e, \Phi, \Phi')$ により、次式を評価して最適値を得る。

$$h_n(k, e, \Phi) = \rho_n(k, e, \Phi, \Phi^*) = \min_{\{\Phi', 0 \leq \Phi' \leq \Phi\}} \rho_n(k, e, \Phi, \Phi') \quad (38)$$

このとき、 $\rho^* = h_n(k, e, \Phi)$ とおけば、 n ステージの最適解 φ^* 、 p^* は次式で与えられる。

$$\varphi^*(i, n) = \begin{cases} q_i^{-1}(\rho^* / h_{n-1}(i, e - \mu(k, i), \Phi - \Phi^*)) & , i \in A_n(k, e, \Phi, \Phi^*; \rho^*) \\ 0 & , i \notin A_n(k, e, \Phi, \Phi^*; \rho^*) \end{cases} \quad (39)$$

$$p^*(k, i) = \begin{cases} c_i / h_{n-1}(i, e - \mu(k, i), \Phi - \Phi^*) / q_i'(\varphi^*(i, n)) \\ / \sum_{j \in A_n(k, e, \Phi, \Phi^*; \rho^*)} c_j / h_{n-1}(j, e - \mu(k, j), \Phi - \Phi^*) / q_j'(\varphi^*(j, n)) & , i \in A_n(k, e, \Phi, \Phi^*; \rho^*) \\ 0 & , i \notin A_n(k, e, \Phi, \Phi^*; \rho^*) \end{cases} \quad (40)$$

ここで、最適戦略に込められたプレイヤーの思惑を考察しよう。当該ステージにおける非探知によりそれ以降に発生する目標の期待利得がセルにより異なる場合、目標はその大きな値のセルを目指すことになるため、探索者は、この期待利得をセルに関わらず一様にさせようとする効果を等式 (26) により実現させる。また、 $-q'_i(\varphi^*(i, n))h_{n-1}(i, e - \mu(k, i), \Phi - \Phi^*)$ の値は、探索資源の単位量増加による探知確率増加がそれ以降に失わせる目標の限界期待利得、すなわち探索者の得る限界期待利得を表すから、(40) 式は単位限界利得を得るためのコスト、いわば限界コストに比例した移動確率を目標がとることを示している。これは、探索者としては限界コストの高いセルの探索は避けようとするであろうとする目標の合理的判断による。

実際にあるステージにおけるゲームの値を計算するためには、初期条件 $h_0(k, e, \Phi) = 1$ から出発し、 $n = 1, 2, \dots$ と再帰的に式 (37)–(40) の評価を繰り返すことにより求めたいステージに到達することになる。最後に、次のことを再確認しよう。(34) 式で与えられる $h_1(k, e, \Phi)$ はこのステージ $n = 1$ におけるゲームの値であるが、一般のステージ n に対して (38) 式が与える値 $h_n(k, e, \Phi)$ はミニマックス値であり、これがマックスミニ値と一致するゲームの値となるかについては、まだ結論は出ていない。

4 連続空間多段ゲームの解

最適搜索問題に関する名著 Stone [10] でも述べられているように、最適搜索の議論では、離散搜索空間モデルと同様、連続空間モデルでの定式化も重要である。なぜなら、実務的な搜索活動が 2 次元連続空間とみなされる海面上や地上で行われることが多いからである。ここでは、2 節の搜索空間の仮定 A2 を一般の n 次元空間 \mathbf{R}^n に置き換えたモデルにおいて同様な多段ゲームを議論し、前節とほぼ同じ結果が得られることを確認しよう。

2 節のモデルに対する主な変更点は次のとおりである。

A2'. 搜索空間は n 次元連続空間 \mathbf{R}^n とする。

A3'. 探索者の搜索資源投入及び目標の移動は連続空間上で行われる。

(4') 空間が連続であるため、探索者の地点 $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$ への搜索資源の投入は投入密度により表され、その地点に目標がいた場合投入密度 x に対する非探知確率は $q_z(x)$ とする。この非探知関数の性質は (仮定 Q1), (仮定 Q2) のとおりである。

その他の細かな変更を類推することは容易であり、離散モデルと同様な次の記号を用いる。

- c_z : 探索者が点 $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$ に単位搜索資源を投入するためのコスト
- $N(\mathbf{z})$: 目標が点 \mathbf{z} から次に移動可能な領域
- $\mu(\mathbf{z}, \mathbf{x})$: 目標が点 \mathbf{z} から \mathbf{x} に移動するのに必要なエネルギー
- $N(\mathbf{z}, e) \equiv \{\mathbf{x} \in N(\mathbf{z}) \mid \mu(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \leq e\}$. 目標が点 \mathbf{z} からエネルギー e 内で移動可能な領域
- $A_n(\mathbf{z}, e, \Phi, \Phi'; \rho) \equiv \{\mathbf{x} \in N(\mathbf{z}, e) \mid \rho \leq h_{n-1}(\mathbf{x}, e - \mu(\mathbf{z}, \mathbf{x}), \Phi - \Phi')\}$

ステージ n において、探索者の残存予算 Φ 、目標の存在地点 \mathbf{z} 、残存エネルギー e の状況下で、連続搜索空間上での探索者の戦略を地点 \mathbf{x} での搜索資源投入密度 $\{\varphi(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n\}$ で、目標の戦略を現に存在する地点 \mathbf{z} からの移動地点 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ の選択確率密度 $\{p(\mathbf{x})\}$ で表すとすると、それらの実行可能領域は次のようになる。

$$\Psi(\Phi) = \left\{ \{\varphi(\mathbf{x})\} \mid \varphi(\mathbf{x}) \geq 0, \mathbf{x} \in N(\mathbf{z}, e), \varphi(\mathbf{x}, n) = 0, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n - N(\mathbf{z}, e), \int_{N(\mathbf{z}, e)} c_{\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \Phi \right\} \quad (41)$$

$$P_{\mathbf{z}}(e) = \left\{ \{p(\mathbf{x})\} \mid p(\mathbf{x}) \geq 0, \mathbf{x} \in N(\mathbf{z}, e), p(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n - N(\mathbf{z}, e), \int_{N(\mathbf{z}, e)} p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1 \right\}. \quad (42)$$

このとき、非探知確率尺度でのゲームの値 $h_n(z, e, \Phi)$ は (10), (13), (11) 式と同じ以下の式により評価できる。

$$\begin{aligned} h_n(z, e, \Phi) &= \min_{\varphi \in \Psi(\Phi)} \max_{p \in P_{\mathbf{Z}}(e)} \int_{N(z, e)} p(\mathbf{x}) \cdot q_{\mathbf{x}}(\varphi(\mathbf{x})) \cdot h_{n-1}(\mathbf{x}, e - \mu(z, \mathbf{x}), \Phi - \int_{N(z, e)} c_{\mathbf{y}} \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y}) d\mathbf{x} \\ &= \min_{0 \leq \Phi' \leq \Phi} \min_{\varphi \in \Psi_n(\Phi')} \max_{p \in P_{\mathbf{Z}}(e)} \int_{N(z, e)} p(\mathbf{x}) \cdot q_{\mathbf{x}}(\varphi(\mathbf{x})) \cdot h_{n-1}(\mathbf{x}, e - \mu(z, \mathbf{x}), \Phi - \Phi') d\mathbf{x} \quad (43) \end{aligned}$$

$$\text{初期条件: } h_0(z, e, \Phi) = 1. \quad (44)$$

ただし、積分はすべて n 次元空間 R^n における多重積分である。

ここで、3 節のように、 $N(z, e)$, $h_{n-1}(\mathbf{x}, \cdot)$ をそれぞれ A , $\beta(\mathbf{x})$ と略記し、(43) 式の $\min_{\varphi \in \Psi_n(\Phi')}$ 以降の最適化問題に相当する次の 1 段階ゲームを解くことにする。

$$(P'_0) \quad \min_{\varphi} \max_p \int_A p(\mathbf{x}) q_{\mathbf{x}}(\varphi(\mathbf{x})) \beta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (45)$$

$$\text{s.t.} \quad \int_A c_{\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \Phi' \quad (46)$$

$$\int_A p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1 \quad (47)$$

$$\varphi(\mathbf{x}) \geq 0, \quad p(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \mathbf{x} \in A. \quad (48)$$

問題は最適な関数 $\varphi(\mathbf{x})$, $p(\mathbf{x})$ を導出する変分問題であるが、問題に導関数が含まれていないから容易に解ける。非負条件 (48) を考慮して $\varphi(\mathbf{x}) = \phi^2(\mathbf{x})$, $p(\mathbf{x}) = \gamma^2(\mathbf{x})$ と置き換え、乗数 ν , ρ を導入したラグランジュ関数

$$L(\mathbf{x}) \equiv \gamma^2(\mathbf{x}) q_{\mathbf{x}}(\phi^2(\mathbf{x})) \beta(\mathbf{x}) + \nu c_{\mathbf{x}} \phi^2(\mathbf{x}) - \rho \gamma^2(\mathbf{x})$$

の積分汎関数 $I[\phi, \gamma] = \int_A L(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ の変分 $\delta I[\phi, \gamma]$ をゼロとすべく $L(\mathbf{x})$ に対するオイラー方程式 $\partial L / \partial \phi = 0$, $\partial L / \partial \gamma = 0$ を解けばよい。

オイラー方程式は

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 2\phi \left(\gamma^2 \beta(\mathbf{x}) \frac{\partial q_{\mathbf{x}}(\varphi)}{\partial \varphi} + \nu c_{\mathbf{x}} \right) = 0 \quad (49)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = 2\gamma (q_{\mathbf{x}}(\phi^2) \beta(\mathbf{x}) - \rho) = 0 \quad (50)$$

となる。式 (49) より、 $\phi(\mathbf{x}) \neq 0$ なら $\partial q_{\mathbf{x}} / \partial \varphi = -\nu c_{\mathbf{x}} / \gamma^2 / \beta(\mathbf{x})$ であり、 $q'_{\mathbf{x}}(\varphi) \equiv \partial q_{\mathbf{x}}(\varphi) / \partial \varphi$ とおくと、

$$p(\mathbf{x}) = \gamma^2(\mathbf{x}) = -\frac{\nu c_{\mathbf{x}}}{\beta(\mathbf{x}) q'_{\mathbf{x}}(\phi^2)}. \quad (51)$$

また、(50) 式より、 $\gamma(\mathbf{x}) \neq 0$ なら

$$q_{\mathbf{x}}(\phi^2) \beta(\mathbf{x}) = \rho \quad (52)$$

である。問題の性質から $p(\mathbf{x}) = 0$ ($\gamma(\mathbf{x}) = 0$) の点 \mathbf{x} に対しては $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ は明らかであるから、(52) 式から決定される $\phi^2(\mathbf{x})$ だけを考えればよいが、 $\beta(\mathbf{x}) = q_{\mathbf{x}}(0) \beta(\mathbf{x}) \geq q_{\mathbf{x}}(\phi^2) \beta(\mathbf{x}) = \rho$ である。 $q_{\mathbf{x}}(\varphi)$ の φ に対する単調減少性と (50) 式から、 $\beta(\mathbf{x}) < \rho$ なる点 \mathbf{x} においては $\gamma(\mathbf{x}) = 0$ であり、また $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ を導く。また、 $\beta(\mathbf{x}) q_{\mathbf{x}}^{\infty} < \rho \leq \beta(\mathbf{x})$ なる点 \mathbf{x} では (52) 式を満たす ϕ^2 は唯一存在し、 $\varphi(\mathbf{x}) = \phi^2(\mathbf{x}) = q_{\mathbf{x}}^{-1}(\rho / \beta(\mathbf{x}))$ と書ける。この式と (46) 式から、 $A_{\rho} \equiv \{\mathbf{x} \in A \mid \rho \leq \beta(\mathbf{x})\}$ とすれば、方程式

$$\int_{A_{\rho}} c_{\mathbf{x}} q_{\mathbf{x}}^{-1}(\rho / \beta(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = \Phi' \quad (53)$$

によって ρ が定まる。左辺は、 $\rho = \rho_U \equiv \sup_{\mathbf{x} \in A} \beta(\mathbf{x})$ においてゼロとなり、 $\rho = \rho_L \equiv \sup_{\mathbf{x} \in A} \beta(\mathbf{x}) q_{\mathbf{x}}^{\infty}$ において無限大となり、かつ $\rho \in (\rho_L, \rho_U]$ の間で単調非増加であるから、(53) 式を満たす ρ は必ず存在する。ま

た, (47) 式, (51) 式から $\int_{A_\rho} -vc_x/\beta(x)/q'_x(\varphi)dx = 1$ であるから, $\nu = -1/\int_{A_\rho} c_y/\beta(y)/q'_y(\varphi)dy$ により ν が決まる. これを (51) 式に代入すれば最適な $p(x)$ が得られることになる. 以上をまとめると, 最適解は

$$\varphi(x) = \begin{cases} q_x^{-1}(\rho/\beta(x)) & , x \in A_\rho \equiv \{x \in A | \rho \leq \beta(x)\} \\ 0 & , x \notin A_\rho \end{cases} \quad (54)$$

$$p(x) = \begin{cases} c_x/\beta(x)/q'_x(\varphi(x)) / \int_{A_\rho} c_y/\beta(y)/q'_y(\varphi(y))dy & , x \in A_\rho \\ 0 & , x \notin A_\rho \end{cases} \quad (55)$$

であり, 最適値は (53) 式を解いて求まる ρ により与えられる.

略記号 A , $\beta(x)$ を再び元に戻せば, 連続空間モデルに対するゲームの値 $h_n(z, e, \Phi)$ とステージ n における最適解 $\varphi^*(x)$, $p^*(x)$ を与える次式が得られる.

$$h_n(z, e, \Phi) = \min_{\{\Phi', 0 \leq \Phi' \leq \Phi\}} \rho_n(z, e, \Phi, \Phi'). \quad (56)$$

ただし, $\rho_n(z, e, \Phi, \Phi')$ は次の方程式の解 $\rho > 0$ である.

$$\int_{A_n(z, e, \Phi, \Phi'; \rho)} c_x q_x^{-1}(\rho/h_{n-1}(x, e - \mu(z, x), \Phi - \Phi')) dx = \Phi'. \quad (57)$$

また, n ステージの最適解 φ^* , p^* は次式で与えられる.

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} q_x^{-1}(\rho/h_{n-1}(x, e - \mu(z, x), \Phi - \Phi')) & , x \in A_n(z, e, \Phi, \Phi'; \rho) \\ 0 & , x \notin A_n(z, e, \Phi, \Phi'; \rho) \end{cases} \quad (58)$$

$$p^*(x) = \begin{cases} c_x/h_{n-1}(x, e - \mu(z, x), \Phi - \Phi')/q'_x(\varphi^*(x)) \\ / \int_{A_n(z, e, \Phi, \Phi'; \rho)} c_y/h_{n-1}(y, e - \mu(z, y), \Phi - \Phi')/q'_y(\varphi^*(y))dy & , x \in A_n(z, e, \Phi, \Phi'; \rho) \\ 0 & , x \notin A_n(z, e, \Phi, \Phi'; \rho). \end{cases} \quad (59)$$

また, 特殊例として最終ステージ $n = 1$ におけるゲームの値 $h_1(z, e, \Phi)$ は

$$\int_{N(z, e)} c_x q_x^{-1}(\rho) dx = \Phi \quad (60)$$

の根 $\rho^* \in (\sup_{x \in N(z, e)} q_x^\infty, 1)$ により与えられ,

$$\varphi^*(x) = q_x^{-1}(\rho^*), x \in N(z, e) \quad (61)$$

$$p^*(x) = c_x/q'_x(\varphi^*(x)) / \int_{N(z, e)} c_y/q'_y(\varphi^*(y))dy, x \in N(z, e) \quad (62)$$

がステージ $n = 1$ におけるプレイヤーの最適戦略を与える.

以上得られた連続空間上でのゲームの値及び最適戦略を評価する式 (56)-(59) や, 初期ステージ $n = 1$ のゲームの解を与える式 (60)-(62) は, 結果的に離散モデルに関するそれらの評価式 (38)-(36) からの類推に正確に合致するものとなる.

5 離散空間ゲームの解の性質

これまで搜索空間に関しては離散と連続の2つのモデルについて, ほぼ同じ定式化と解の導出法を得ることができた. 従ってそれらの式に基づいた議論はほぼ同じ結果を生むことを考え, ここでは離散空間モデルに限ってゲームの値や解の性質について議論する. ゲームの値 $h_n(k, e, \Phi)$ に関しては, 次のような単調性を示すことができる.

定理 1 (i) $h_n(k, e, \Phi)$ は正の値をとり, ステージ数 n に対し単調非増加である. すなわち,

$$h_n(k, e, \Phi) \geq h_{n+1}(k, e, \Phi) > 0. \quad (63)$$

- (ii) $h_n(k, e, \Phi)$ はエネルギー量 e に対し単調非減少である。
 (iii) $h_n(k, e, \Phi)$ は予算量 Φ に対し単調非増加である。

(証明) (i) 正值をとることは明らかである。単調非増加性について帰納法により証明する。 $n=1$ の場合は (34) 式で得られる値から、 $h_0(k, e, \Phi) = 1 \geq \rho = h_1(k, e, \Phi)$ が成り立つ。今、 $h_1(k, e, \Phi) \geq h_2(k, e, \Phi) \geq \dots \geq h_{n-1}(k, e, \Phi) \geq h_n(k, e, \Phi)$ を仮定すると、定義からセル集合 $A_n(\cdot)$ に関しては $A_n(k, e, \Phi, \Phi'; \rho) \supseteq A_{n+1}(k, e, \Phi, \Phi'; \rho)$ であり、逆関数 $q_i^{-1}(\cdot)$ の単調減少性により、

$$q_i^{-1}\left(\frac{\rho}{h_{n-1}(k, e - \mu(k, i), \Phi - \Phi')}\right) \geq q_i^{-1}\left(\frac{\rho}{h_n(k, e - \mu(k, i), \Phi - \Phi')}\right)$$

でもあるから、方程式 (37) 式で決定される ρ に関しては $\rho_n(k, e, \Phi, \Phi') \geq \rho_{n+1}(k, e, \Phi, \Phi')$ が言える。したがって、 $h_n(k, e, \Phi) = \min_{0 \leq \Phi' \leq \Phi} \rho_n(k, e, \Phi, \Phi') \geq \min_{0 \leq \Phi' \leq \Phi} \rho_{n+1}(k, e, \Phi, \Phi') = h_{n+1}(k, e, \Phi)$ となる。

(ii) まず、 $h_0(\cdot) = 1$ であるから、 $n=0$ における単調非減少性は自明である。また、 $e \leq e'$ に対し $N(k, e) \subseteq N(k, e')$ 、 $P_k(e) \subseteq P_k(e')$ であるから、最適化問題 (10) 式における $h_{n-1}(i, e - \mu(k, i), \Phi - \sum_j c_j \varphi(j, n)) \leq h_{n-1}(i, e' - \mu(k, i), \Phi - \sum_j c_j \varphi(j, n))$ の仮定は容易に $h_n(k, e, \Phi) \leq h_n(k, e', \Phi)$ を導く。

(iii) $\Phi \leq \Phi'$ に対する (10) 式での $\Psi(\Phi) \subseteq \Psi(\Phi')$ の成立に注意すれば、上と同様に証明できる。 **Q.E.D.**

定理 1(ii),(iii) が主張するエネルギー保有量 e 、予算量 Φ に対するゲームの値の単調性は問題の性質からほぼ自明のものである。(i) の性質は 2 つの意味で重要である。その第 1 は、ステージ数の増加が搜索者側に有利に、目標側に不利に働くという事実である。各ステージの当初において搜索者の残り予算に関する情報を目標側は知ることができる。逆に、搜索者側は目標の残りエネルギー量を知ることができるが、さらに目標の存在セルそのものの情報も得ることが可能なため、比較的狭い領域への搜索資源の集中的投入が可能となる。このことは、目標地点情報が取得できず、時間経過とともに速やかに拡大する目標存在領域を考慮せざるを得ない場合に比較すればその有利さは明白である。定理 1(i) が与える第 2 の視点は、ステージ数が増大し $n \rightarrow \infty$ となった場合にはゲームの値が収束し、ゲームが定常性をもつようになるという点である。

また、定理 1 から次の系が言える。

系 1 目標が現に存在するセルは、そのステージにおける目標の移動対象となる。

(証明) $k \in N(k, e)$ であり、目標の最適移動戦略 (40) 式より移動対象となるセル群は $A_n(k, e, \Phi, \Phi^*; \rho^*)$ であるから、

$$\rho^* = h_n(k, e, \Phi) \leq h_{n-1}(k, e - \mu(k, k), \Phi - \Phi^*) = h_{n-1}(k, e, \Phi - \Phi^*)$$

を示せばよいが、定理 1(i),(iii) の性質より次式が成り立つから明らかである。

$$h_n(k, e, \Phi) \leq h_{n-1}(k, e, \Phi) \leq h_{n-1}(k, e, \Phi - \Phi^*).$$

Q.E.D.

以下では、(仮定 Q2') が本質的な重要性をもついくつかの定理を述べよう。

補題 1 ステージ $n=1$ におけるゲームの値 $h_1(k, e, \Phi)$ は Φ に対し凸となる。もし、 $\log q_k(x)$ が凸関数ならば $\log h_1(k, e, \Phi)$ も凸となる。

(証明) $h_1(\cdot)$ は (34) 式の解 ρ として得られ変数 Φ の関数となるため、これを $\rho(\Phi)$ と明示しよう。(34) 式の両辺を Φ で微分すると、

$$\sum_{i \in N(k, e)} c_i \frac{dq_i^{-1}(\rho)}{d\rho} \frac{d\rho}{d\Phi} = 1$$

となり, 更に微分すれば次式を得る.

$$\sum_{i \in N(k, e)} c_i \left\{ \frac{d^2 q_i^{-1}(\rho)}{d\rho^2} \left(\frac{d\rho}{d\Phi} \right)^2 + \frac{dq_i^{-1}(\rho)}{d\rho} \frac{d^2 \rho}{d\Phi^2} \right\} = 0. \quad (64)$$

いま, $y_i \equiv q_i^{-1}(\rho)$ とおくと,

$$\begin{aligned} \frac{dy_i}{d\rho} &= \frac{1}{d\rho/dy_i} = \frac{1}{q_i'(y_i)} = \frac{1}{q_i'(q_i^{-1}(\rho))}, \\ \frac{d^2 y_i}{d\rho^2} &= \frac{d}{d\rho} \left(\frac{dy_i}{d\rho} \right) = \frac{d}{dy_i} \left(\frac{1}{q_i'(y_i)} \right) \cdot \frac{dy_i}{d\rho} = -\frac{q_i''(y_i)}{\{q_i'(y_i)\}^2} \cdot \frac{1}{q_i'(y_i)} = -\frac{q_i''(q_i^{-1}(\rho))}{\{q_i'(q_i^{-1}(\rho))\}^3} \end{aligned}$$

となるが, 上の2式を(64)式に代入すると

$$\sum_{i \in N(k, e)} c_i \left\{ -\frac{q_i''(q_i^{-1}(\rho))}{\{q_i'(q_i^{-1}(\rho))\}^3} \left(\frac{d\rho}{d\Phi} \right)^2 + \frac{1}{q_i'(q_i^{-1}(\rho))} \frac{d^2 \rho}{d\Phi^2} \right\} = 0 \quad (65)$$

となるが, 整理して次式を得る.

$$\frac{d^2 \rho}{d\Phi^2} \sum_{i \in N(k, e)} \frac{c_i}{q_i'(q_i^{-1}(\rho))} = \left(\frac{d\rho}{d\Phi} \right)^2 \sum_{i \in N(k, e)} \frac{c_i q_i''(q_i^{-1}(\rho))}{\{q_i'(q_i^{-1}(\rho))\}^3}.$$

関数 $q_i(x)$ の単調減少性と狭義凸性より $q_i'(x) < 0$, $q_i''(x) > 0$ であることから, 上式が成り立つためには $d^2 \rho / d\Phi^2 \geq 0$ でなければならない. したがって, 前半の記述が証明された.

後半を証明するために, $r_i(x) \equiv \log q_i(x)$, $\sigma(\Phi) \equiv \log \rho(\Phi)$ とおく. $q_i' = r_i' \cdot \exp r_i$, $q_i'' = (r_i')^2 \cdot \exp r_i + r_i'' \cdot \exp r_i$ 及び $d\rho/d\Phi = \exp \sigma \cdot d\sigma/d\Phi$, $d^2 \rho / d\Phi^2 = \exp \sigma \cdot d^2 \sigma / d\Phi^2 + \exp \sigma \cdot (d\sigma/d\Phi)^2$ を(65)式に入れ, $\exp r_i(y_i(\Phi)) = q_i(y_i(\Phi)) = \rho(\Phi) = \exp \sigma(\Phi)$ に注意して整理すると,

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in N(k, e)} c_i \left\{ -\frac{(r_i')^2 \exp r_i + r_i'' \exp r_i}{(r_i' \exp r_i)^3} \left(e^\sigma \cdot \frac{d\sigma}{d\Phi} \right)^2 + \frac{1}{r_i' \exp r_i} \left(e^\sigma \cdot \frac{d^2 \sigma}{d\Phi^2} + e^\sigma \cdot \left(\frac{d\sigma}{d\Phi} \right)^2 \right) \right\} \\ &= \sum_{i \in N(k, e)} c_i \left\{ \frac{(r_i' \exp r_i)^2 - (r_i')^2 \exp r_i \exp \sigma - r_i'' \exp r_i \exp \sigma}{(r_i' \exp r_i)^3} e^\sigma \left(\frac{d\sigma}{d\Phi} \right)^2 + \frac{1}{r_i' \exp r_i} e^\sigma \cdot \frac{d^2 \sigma}{d\Phi^2} \right\} \\ &= \sum_{i \in N(k, e)} c_i \left\{ -\frac{r_i''}{r_i'^3 \exp r_i} e^\sigma \left(\frac{d\sigma}{d\Phi} \right)^2 + \frac{1}{r_i' \exp r_i} e^\sigma \cdot \frac{d^2 \sigma}{d\Phi^2} \right\} = 0 \end{aligned}$$

となるが, $r_i' < 0$, $r_i'' \geq 0$ から $d^2 \sigma / d\Phi^2 \geq 0$ である. **Q.E.D.**

問題(7), (8)式により, $e = 0$ となり目標があるセル k に居続けることを余儀なくされる結果, 総量 Φ の探索資源をこのセルに各ステージ毎どのように配分するかという探索者側の一方的な最適化問題になる場合を記述した. このような簡単な場合ですら明確な最適解の形は得られず, (9)式の明示的な解を得るためには付加的な仮定(Q2')を必要とした. 以下の定理では, この仮定(Q2')の影響を示している.

定理 2 $\log q_k(x)$ が x に対して凸関数であれば, $\log h_n(k, e, \Phi)$ は Φ に対し凸となる.

(証明) 補題1より $n = 1$ に対しては定理が成立している. いま, ステージ $n - 1$ に対して成り立っているとて, ステージ n での成立を証明しよう. まず, 表記の簡便化のために $h_n(k, e, \Phi)$ を $h_n(k, \Phi)$ で, $h_{n-1}(i, e - \mu(k, i), \Phi)$ を $h_{n-1}(i, \Phi)$ で略記する. 式(38)により $h_n(k, \Phi)$ が決定されるが, $\rho_n(k, e, \Phi, \Phi')$ は $\min_{\varphi} \max_p \sum_{i \in N(k, e)} p(k, i) h_{n-1}(i, \Phi - \Phi') q_i(\varphi(i, n))$ の最適値として得られる. ゆえに, $0 \leq \alpha \leq 1$ に対し

$$\begin{aligned} & \alpha \rho_n(k, e, \Phi_1, \Phi'_1) + (1 - \alpha) \rho_n(k, e, \Phi_2, \Phi'_2) \\ &= \alpha \min_{\varphi_1 \in \Psi_n(\Phi'_1)} \max_{p_1 \in P_k(e)} \sum_{i \in N(k, e)} p_1(k, i) h_{n-1}(i, \Phi_1 - \Phi'_1) q_i(\varphi_1(i, n)) \\ & \quad + (1 - \alpha) \min_{\varphi_2 \in \Psi_n(\Phi'_2)} \max_{p_2 \in P_k(e)} \sum_{i \in N(k, e)} p_2(k, i) h_{n-1}(i, \Phi_2 - \Phi'_2) q_i(\varphi_2(i, n)) \end{aligned}$$

と書けるが, 第1項の p_1 と p_2 を共通の p と置く制約を加えることにより,

$$\begin{aligned} \text{上式} \geq & \min_{\varphi_1 \in \Psi_n(\Phi'_1), \varphi_2 \in \Psi_n(\Phi'_2)} \max_{p \in P_k(e)} \sum_{i \in N(k, e)} p(k, i) \{ \alpha h_{n-1}(i, \Phi_1 - \Phi'_1) q_i(\varphi_1(i, n)) \\ & + (1 - \alpha) h_{n-1}(i, \Phi_2 - \Phi'_2) q_i(\varphi_2(i, n)) \} \end{aligned}$$

となる. $\log h_{n-1}(\cdot)$ と $\log q_i(\cdot)$ の凸性から, $h_{n-1}(i, \Phi') q_i(\varphi(i, n)) = \exp\{\log h_{n-1}(i, \Phi') + \log q_i(\varphi(i, n))\}$ は変数 $\{\Phi', \varphi(i, n)\}$ に対して狭義凸である. したがって上式はさらに以下のように変形できる.

$$\begin{aligned} \geq & \min_{\varphi_1 \in \Psi_n(\Phi'_1), \varphi_2 \in \Psi_n(\Phi'_2)} \max_{p \in P_k(e)} \sum_{i \in N(k, e)} p(k, i) h_{n-1}(i, \alpha(\Phi_1 - \Phi'_1) + (1 - \alpha)(\Phi_2 - \Phi'_2)) q_i(\alpha\varphi_1(i, n) + (1 - \alpha)\varphi_2(i, n)). \end{aligned}$$

$\varphi_1 \in \Psi_n(\Phi'_1)$, $\varphi_2 \in \Psi_n(\Phi'_2)$ ならば $\alpha\varphi_1 + (1 - \alpha)\varphi_2 \in \Psi_n(\alpha\Phi'_1 + (1 - \alpha)\Phi'_2)$ であるから, $\Phi = \alpha\Phi_1 + (1 - \alpha)\Phi_2$, $\Phi' = \alpha\Phi'_1 + (1 - \alpha)\Phi'_2$ とおけば, 上式はさらに次の変形を生成する.

$$\begin{aligned} \geq & \min_{\varphi \in \Psi_n(\Phi')} \max_{p \in P_k(e)} \sum_{i \in N(k, e)} p(k, i) h_{n-1}(i, \Phi - \Phi') q_i(\varphi(i, n)) \\ = & \rho_n(k, e, \Phi, \Phi') = \rho_n(k, e, \alpha\Phi_1 + (1 - \alpha)\Phi_2, \alpha\Phi'_1 + (1 - \alpha)\Phi'_2). \end{aligned}$$

したがって, $\rho_n(k, e, \Phi, \Phi')$ は (Φ, Φ') に対して凸となる.

式(26)の導出に関する議論から, $\rho_n(k, e, \Phi, \Phi')$ はあるセル i の $h_{n-1}(i, \Phi - \Phi') q_i(\varphi(i, n))$ に一致する. すなわち, $\log \rho_n(k, e, \Phi, \Phi')$ はあるセル i の $\log\{h_{n-1}(i, \Phi - \Phi') q_i(\varphi(i, n))\}$ に一致し, しかも任意のセル i においてこの式は φ に関して凸だから, 再び3節の議論から, $\log \rho_n(k, e, \Phi, \Phi')$ は次の最適化問題を解くことにより与えられる.

$$\log \rho_n(k, e, \Phi, \Phi') = \min_{\varphi \in \Psi_n(\Phi')} \max_{p \in P_k(e)} \sum_{i \in N(k, e)} p(k, i) \log\{h_{n-1}(i, \Phi - \Phi') q_i(\varphi(i, n))\}.$$

この最適化問題に関して上と同様の議論を繰り返せば, $\log \rho_n(k, e, \Phi, \Phi')$ の (Φ, Φ') に関する凸性も言える. さて, 問題(38)式は次の問題を解くことと同値である.

$$\log h_n(k, e, \Phi) = \min_{\{\Phi', 0 \leq \Phi' \leq \Phi\}} \log \rho_n(k, e, \Phi, \Phi').$$

$0 \leq \alpha \leq 1$, $\Phi_1 > 0$, $\Phi_2 > 0$ に対し,

$$\begin{aligned} \alpha \log h_n(k, e, \Phi_1) &= \min_{0 \leq \Phi'_1 \leq \Phi_1} \alpha \log \rho_n(k, e, \Phi_1, \Phi'_1) \\ (1 - \alpha) \log h_n(k, e, \Phi_2) &= \min_{0 \leq \Phi'_2 \leq \Phi_2} (1 - \alpha) \log \rho_n(k, e, \Phi_2, \Phi'_2) \end{aligned}$$

であるが, $0 \leq \Phi'_1 \leq \Phi_1$, $0 \leq \Phi'_2 \leq \Phi_2$ ならば $0 \leq \alpha\Phi'_1 + (1 - \alpha)\Phi'_2 \leq \alpha\Phi_1 + (1 - \alpha)\Phi_2$ であり, 上述した $\log \rho_n(k, e, \Phi, \Phi')$ の (Φ, Φ') に関する凸性より次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} & \alpha \log h_n(k, e, \Phi_1) + (1 - \alpha) \log h_n(k, e, \Phi_2) \\ & \geq \min_{\{(\Phi'_1, \Phi'_2) | 0 \leq \alpha\Phi'_1 + (1 - \alpha)\Phi'_2 \leq \alpha\Phi_1 + (1 - \alpha)\Phi_2\}} \{ \alpha \log \rho_n(k, e, \Phi_1, \Phi'_1) + (1 - \alpha) \log \rho_n(k, e, \Phi_2, \Phi'_2) \} \\ & \geq \min_{\{(\Phi'_1, \Phi'_2) | 0 \leq \alpha\Phi'_1 + (1 - \alpha)\Phi'_2 \leq \alpha\Phi_1 + (1 - \alpha)\Phi_2\}} \log \rho_n(k, e, \alpha\Phi_1 + (1 - \alpha)\Phi_2, \alpha\Phi'_1 + (1 - \alpha)\Phi'_2) \\ & = \min_{\{\Phi' | 0 \leq \Phi' \leq \alpha\Phi_1 + (1 - \alpha)\Phi_2\}} \log \rho_n(k, e, \alpha\Phi_1 + (1 - \alpha)\Phi_2, \Phi') = \log h_n(k, e, \alpha\Phi_1 + (1 - \alpha)\Phi_2). \end{aligned}$$

以上により, $\log h_n(k, e, \Phi)$ の Φ に関する凸性が証明された. Q.E.D.

定理2の $\log h_n(k, e, \Phi)$ の Φ に対する凸性は, ゲームの定式化(10)式における次の式

$$\log h_{n-1}(i, e - \mu(k, i), \Phi - \sum_j c_j \varphi(j, n)) + \log q_i(\varphi(i, n))$$

の $\{\varphi(i, n), i \in N(k, e)\}$ に対する凸性を示している。実際、

$$\log h_{n-1}(i, e - \mu(k, i), \Phi - (\alpha \sum_j c_j \varphi(j, n) + (1 - \alpha) \sum_j c_j \varphi'(j, n))) \quad (66)$$

$$= \log h_{n-1}(i, e - \mu(k, i), \alpha(\Phi - \sum_j c_j \varphi(j, n)) + (1 - \alpha)(\Phi - \sum_j c_j \varphi'(j, n))) \quad (67)$$

$$\leq \alpha \log h_{n-1}(i, e - \mu(k, i), \Phi - \sum_j c_j \varphi(j, n)) + (1 - \alpha) \log h_{n-1}(i, e - \mu(k, i), \Phi - \sum_j c_j \varphi'(j, n)) \quad (68)$$

である。したがって、 $h_{n-1}(i, e - \mu(k, i), \Phi - \sum_j c_j \varphi(j, n)) q_i(\varphi(i, n))$ は $\{\varphi(i, n), i \in N(k, e)\}$ に関し狭義凸であるが、(10) 式のように、2種類の戦略 $\{p(k, i)\}$ と $\{\varphi(i, n)\}$ の一方に線形で他方に凸である期待利得に対するミニマックス値はマックスミニ値にも一致することがすでに知られている [5]。したがって、(37) 式及び (38) 式により得られる値はゲームの値であり、(39)、(40) 式が与える戦略が最適戦略と言える。以上より、ゲームの値の存在性についての次の定理を述べることができる。

定理 3 $\log q_k(x)$ が x に対して凸関数であれば、各ステージにおいて、移動セル選択に関する目標の混合戦略と、搜索資源の配分に関する搜索者の純粋戦略の中に最適戦略が存在する。このとき、期待利得のミニマックス値とマックスミニ値は一致してゲームの値が存在する。

6 おわりに

この論文では、搜索者と逃避者が参加するいわゆる搜索割当ゲームを多段確率ゲームとした問題を論じた。その際、搜索者の搜索資源投入量と逃避者の探知確率との関係を表す非探知関数に凸性のみを仮定して議論を進め、定理 1 や定理 3 等においてゲームの値の存在や解の性質について明らかにした。また、ステージ数の増大によりゲームには定常解が存在することについても示したが、実際の均衡解や定常解はここで述べた汎用的な手法を具体的な探知関数に適用することにより導出する必要がある。

この論文におけるモデルでは、ステージ数の増加は逃避者に不利に働くことが明らかになったが、その大きな要因は第 1 に情報集合の構造と第 2 に利得尺度の設定にある。特に、情報構造が搜索者側に有利に設定されていることはモデルの仮定から推測できることであり、現実の搜索活動におけるその妥当性、あるいは他の情報構造についても今後検討する必要がある。今回のモデルでは探知確率尺度という搜索理論では定番で基本的な評価尺度を用いた。これまでの搜索理論研究でもそうであったように、より複雑な評価尺度へと今回のモデルを拡張することも自然の成り行きであろうと思われる。

参考文献

- [1] J.M. Danskin, *The Theory of Max-Min*, Springer-Verlag, N.Y., 1967.
- [2] A.Y. Garnaev, *Search Games and Other Applications of Game Theory*, Springer-Verlag, Tokyo, 2000.
- [3] 宝崎隆祐, 探知確率尺度の多段搜索割当ゲーム, 日本OR学会 2003 年秋季研究発表会アブストラクト集, pp.334-335, 2003.
- [4] 宝崎隆祐, 多段搜索割当ゲームの定常解について, 日本OR学会 2004 年春季研究発表会アブストラクト集, pp.352-353, 2004.
- [5] R. Hohzaki and K. Iida, A Solution for a Two-Person Zero-Sum Game with a Concave Payoff Function, *Nonlinear Analysis and Convex Analysis*, World Science Publishing Co., London, pp.157-166, 1999.

- [6] R. Hohzaki, K. Iida and T. Komiya, Discrete Search Allocation Game with Energy Constraints, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **45**(1), pp.93-108, 2002.
- [7] R. Hohzaki and A.R. Washburn, An Approximation for a Continuous Datum Search Game with Energy Constraint, *JORSJ*, **46**(3), pp.306-318, 2003.
- [8] G. Owen, *Game Theory*, Academic Press, N.Y., 1995.
- [9] L. S. Shapley, Stochastic Games, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A.*, **39**(1953) 1095-1100.
- [10] L.D. Stone, *Theory of Optimal Search*, pp.136-178, Academic Press, N.Y., 1975.
- [11] A.R. Washburn, Search-Evasion Game in a Fixed Region, *Operations Research*, **28**, pp.1290-1298, 1980.