数理解析研究所講究録 1409 巻 2005 年 21-35

不動点近似法による最適化アルゴリズム

高橋 渉
(Wataru TAKAHASHI)
東京工業大学大学院情報理工学研究科数理・計算科学専攻

1 はじめに

H を Hilbert 空間とし, C を H の閉凸集合とする. T を C から C への非拡大写像, すなわち

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in C$$

とする. この非拡大写像に対して, 次の 2 つの不動点近似定理がある.

定理 1.1(Wittmann[36]). C を H の閉凸集合とする. T を C から C への非拡大写像とする. $F(T)$ を T の不動点の集合とし, $F(T) \neq \phi$ とする. $x_1 = x \in C$ に対して, 点列 $\{x_n\}$ を

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) T x_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{1}$$

で定義する. ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$$

を満たすとする. このとき, $\{x_n\}$ は $Px \in F(T)$ に強収束する. ここで P は H から $F(T)$ の上への距離射影である.

定理 1.2(Mann[15]). C を H の閉凸集合とし, T を C から C への $F(T) \neq \phi$ となる非拡大写像とする. $x_1 = x \in C$ に対して, 点列 $\{x_n\}$ を

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T x_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{2}$$

で定義する. ただし, $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (1 - \alpha_n) = \infty$$

を満たすとする. このとき, $\{x_n\}$ は $F(T)$ の点 z に弱収束する. ここで

$$z = \lim_{n\to\infty} P x_n$$

である．

(1) の近似法は最初 Halpern[6] により導入され，定理 1.1 の形で Wittmann[36] により証明された．そのわかりやすい証明法は [34] をみるとよい．(2) の近似法は最初 Mann[15] によって導入され，定理 1.2 の形で Reich[20] によって証明された．そのわかりやすい証明法はやはり [34] をみるとよい．ここでは，この 2 つの不動点近似法を最適化問題の解を求めるアルゴリズムと深い関係をもつ非線形作用素（逆強単調作用素及び極大単調作用素）に応用し，その非線形作用素に関する収束定理を得る．特に，極大単調作用素の零点を求める収束定理は凸関数の minimizers や 2 変数関数の鞍点を求める収束定理の証明に用いられる．

2 準備

H を Hilbert 空間とし，C を H の閉凸集合とする．このとき，任意の $x \in H$ に対して

$$\|x - z\| = \min\{\|x - y\| : \ y \in C\}$$

となるような C の元 z が一意に存在する．任意の $x \in H$ に対して，このような $z \in C$ を対応させる写像を P_C で表し，この写像を H から C 上への距離射影という．距離射影 P_C は次の性質をもつ：任意の $x \in H$，$y \in C$ に対して

$$\langle x - P_C x, P_C x - y \rangle \geq 0,$$
$$\|x - y\|^2 \geq \|x - P_C x\|^2 + \|y - P_C x\|^2$$

が成り立つ．詳しくは [34] を参照せよ．

E を Banach 空間とし，E^* をその共役空間とする．$x \in E$ における $x^* \in E^*$ の値を $x^*(x)$ または $\langle x, x^* \rangle$ で表す．E における点列 $\{x_n\}$ が x に弱収束することを $x_n \rightharpoonup x$ で表す．

E の凸性の modulus δ は，$0 \leqq \epsilon \leqq 2$ となる ϵ に対して

$$\delta(\epsilon) = \inf\left\{1 - \frac{\|x + y\|}{2} : \ \|x\| \leq 1, \ \|y\| \leq 1, \ \|x - y\| \geq \epsilon\right\}$$

で定義される．Banach 空間 E が一様凸であるとは，$\epsilon > 0$ に対して，$\delta(\epsilon) > 0$ が常に成り立つときをいう．E の元 x に対して，E から E^* への集合値写像 J が

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \ \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

で定義されるが，この J を E 上の duality 写像という．$U = \{x \in E : \ \|x\| = 1\}$ としよう．このとき，$x, y \in U$ に対して，極限

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{3}$$

を考えよう．E のノルムが Gâteaux 微分可能であるとは，任意の $x, y \in U$ に対して，(3) が常に存在するときをいう．このとき，Banach 空間 E は滑らかであるともいう．E のノルムが一様に Gâteaux 微分可能であるとは，任意の $y \in U$ に対して，(3) が $x \in U$ に関して一様に収束するときをいう．E のノルムが Fréchet 微分可能であるとは，任意の $x \in U$ に対して，(3) が $y \in U$ に関して一様に収束するときをいう．(3) が $x, y \in U$ に対して一様に収束するとき，E のノルムは一様に Fréchet 微分可能であるという．このとき，E は一様に滑らかであるともいう．E が Gâteaux 微分可能なノルムをもてば，E 上の duality 写像は一価写像になる．Banach 空間 E が Opial's condition[19] を満たすとは，$x_n \rightharpoonup x$ かつ $x \neq y$ であるならば

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|$$

となるときをいう．

E を Banach 空間とし，$A \subset E \times E$ としよう．A が増大作用素 (accretive operator) であるとは，$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ に対して，常に $\langle y_1 - y_2, j\rangle \geq 0$ となる $j \in J(x_1 - x_2)$ が存在するときをいう．ただし，J は E の duality 写像である．$A \subset E \times E$ を増大作用素とする．このとき，すべての $\lambda > 0$ に対して A の resolvent と呼ばれる J_λ と吉田近似と呼ばれる A_λ が次のように定義される．すなわち

$$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}, \quad A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda).$$

$A \subset E \times E^*$ とする．A が単調 (monotone) であるとは，$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ に対して

$$\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2\rangle \geq 0$$

が常に成り立つときをいう．単調作用素 $A \subset E \times E^*$ が極大 (maximal) であるとは，A を真に含む単調作用素 $B \subset E \times E^*$ が存在しないときをいう．すなわち，$B \subset E \times E^*$ が単調で，かつ $A \subset B$ であるならば $A = B$ となるときをいう．次の定理はよく知られている [34].

定理 2.1. E を回帰的な Banach 空間とし，$J\colon E \to E^*$ を duality 写像とする．A を単調作用素とする．このとき，A が極大となるための必要十分条件は，すべての $r > 0$ に対して

$$R(J + rA) = E^*$$

となることである．ただし，$R(J + rA)$ は $J + rA$ の値域を表す．

定理 2.1 を用いると，Hilbert 空間での $m-$ 増大作用素と極大単調作用素は同値であることがわかる．もちろん Banach 空間では 2 つの作用素は違ったものとなる．

3 変分不等式の解を求める収束定理

H を Hilbert 空間とし，C を H の閉凸集合とする．このとき，$A\colon C \to H$ が単調であるとは，任意の $x, y \in C$ に対して

$$\langle x-y, Ax-Ay\rangle \geq 0$$

が成り立つときをいう．$A\colon C \to H$ が逆強単調であるとは，ある $\alpha > 0$ が存在して，任意の $x, y \in C$ に対して

$$\langle x-y, Ax-Ay\rangle \geq \alpha\|Ax-Ay\|^2$$

が成り立つときをいう．特にこのような A を $\alpha-$ 逆強単調であるという．A が $\alpha-$ 逆強単調であるならば，A は単調であり，$\frac{1}{\alpha}-$Lipschitz 連続である．$T\colon C \to C$ が非拡大写像であるとき，$A = I - T$ は $\frac{1}{2}-$ 逆強単調に成る [35]．$A\colon C \to H$ が単調であるとき

$$\langle y-z, Az\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C$$

となる $z \in C$ を求めることがある．このような $z \in C$ は A に関する変分不等式の解といわれる．A に関する変分不等式の解の全体を我々は $VI(C, A)$ で表す．

次の補助定理は Rockafellar の定理 [22] を用いると証明できる．

補助定理 3.1. C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とし，$A\colon C \to H$ を逆強単調作用素とする．また $N_C v$ を $v \in C$ における C に対する normal cone とする．すなわち

$$N_C v = \{w \in H\colon \langle v-u, w\rangle \geq 0,\ \forall u \in C\}$$

とする．このとき

$$Tv = \begin{cases} Av + N_C v, & v \in C, \\ \phi, & v \notin C \end{cases}$$

とするならば，T は極大単調作用素となる．また，$0 \in Tv$ である必要十分条件は $v \in VI(C, A)$ である．

補助定理 3.2([35]). C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とし，$\{x_n\}$ を H の点列で

$$\|x_{n+1} - u\| \leq \|x_n - u\|, \quad \forall u \in C,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

を満たすとする．このとき，$\{P_C x_n\}$ は C のある元 z に強収束する．

高橋–豊田 [35] は補助定理 3.1 と 3.2 を用いて，次の弱収束定理を証明した．

定理 3.3([35]). C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とし，$\alpha > 0$ とする．$A: C \to H$ を $\alpha-$ 逆強単調作用素とし，$S: C \to C$ を非拡大作用素とする．点列 $\{x_n\}$ を $x_1 \in C$,

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) SP_C(x_n - \lambda_n Ax_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

で定義する．ただし，$0 < a \leq \lambda_n \leq b < 2\alpha$, $0 < c \leq \alpha_n \leq d < 1$ とする．このとき，$F(S) \cap VI(C, A) \neq \phi$ ならば，$\{x_n\}$ は $z \in F(S) \cap VI(C, A)$ に弱収束する．ここで

$$z = \lim_{n\to\infty} P_{F(S)\cap VI(C,A)} x_n$$

である．

飯塚–高橋 [7] は Halpern の不動点近似法を用いて，次の強収束定理を得た．

定理 3.4([7]). C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とし，$\alpha > 0$ とする．$A: C \to H$ を $\alpha-$ 逆強単調作用素とし，$S: C \to C$ を非拡大写像とする．点列 $\{x_n\}$ を $x_1 \in C$,

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n) SP_C(x_n - \lambda_n Ax_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

で定義する．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ と $\{\lambda_n\} \subset [a, b] \subset (0, 2\alpha)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| < \infty$$

を満たす．このとき，$F(S) \cap VI(C, A) \neq \phi$ ならば，$\{x_n\}$ は $P_{F(S)\cap VI(C,A)} x$ に強収束する．

4 リゾルベントによる収束定理

1976 年に，Rockafellar[23] は，次の収束定理を証明した．

定理 4.1([23]). H を Hilbert 空間とし，$A \subset H \times H$ を極大単調作用素とする．$x_1 = x \in H$ とし

$$x_{n+1} = J_{r_n} x_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

とする．ただし，$\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ を満たすものとする．このとき，$A^{-1}0 \neq \phi$ であるならば，点列 $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 u に弱収束する．

Rockafellar は上の定理において，$\{x_n\}$ が強収束するのではないかと考えた．しかしながら Güler[5] によってこのままの条件では強収束しない例があることが示

された．上村–高橋 [10] は，Hilbert 空間における非拡大写像の Halpern[6] による不動点近似法のアイディアを用いて次の定理を得た．

定理 4.2([10]). H を Hilbert 空間とし，$A \subset H \times H$ を極大単調作用素とする．$x \in H$ に対して，点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x$ かつ

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n) J_{r_n} x_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

で定義する．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

を満たすとする．このとき $A^{-1}0 \neq \phi$ ならば，$\{x_n\}$ は $Px \in A^{-1}0$ に強収束する．ただし，P は H から $A^{-1}0$ の上への距離射影である．

次の定理は Mann タイプ [15] の proximal point algorithm である．

定理 4.3([10]). H を Hilbert 空間とし，$A \subset H \times H$ を極大単調作用素とする．$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ を

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1, \quad \liminf_{n\to\infty} r_n > 0$$

を満たすとする．このとき，$x_1 = x \in H$ に対して，点列 $\{x_n\}$ を

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) J_{r_n} x_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

で定義する．もし $A^{-1}0 \neq \phi$ ならば $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元に弱収束する．

E を滑らかで回帰的かつ狭義凸な Banach 空間とし，E^* をその dual 空間とする．また $A \subset E \times E^*$ を極大単調作用素とする．このとき，定理 2.1 より任意の $x \in E$ と $r > 0$ に対して

$$Jx_r + rAx_r \ni Jx \tag{4}$$

は少なくとも一つの解 $x_r \in D(A)$ をもつ．また，E が狭義凸なので，(4) の解は一意である．そこで $x \in E$ と $r > 0$ に対して，A の resolvent Q_r と吉田近似 A_r を

$$x_r = Q_r x, \quad A_r x = \frac{1}{r} J(x - x_r)$$

で定義する．

E を滑らかで，狭義凸な回帰的 Banach 空間とする．また，$\phi\colon E \times E \to (-\infty, \infty)$ を

$$\phi(x,y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy \rangle + \|y\|^2, \quad \forall x, y \in E$$

によって定義する．ここで J は E の duality mapping である．C を E の空でない閉凸集合とし，$x \in E$ とする．このとき，一意の $x_0 \in C$ が存在して

$$\phi(x_0, x) = \inf\{\phi(z, x) : z \in C\}$$

となる．このとき，E から C 上への写像 Q_C を $Q_C x = x_0$ によって定義する．このような Q_C を generalized projection と呼ぶ．Hilbert 空間では，この Q_C と距離射影 P_C は一致する．

E を滑らかな Banach 空間とし，C を E の空でない閉凸集合とする．また，$x \in E$, $x_0 \in C$ とする．このとき，次の (1) と (2) は同値である．

(1) $\phi(x_0, x) = \min_{y \in C} \phi(y, x)$;

(2) $\langle x_0 - y, Jx - Jx_0 \rangle \geq 0$ for all $y \in C$.

最近，高阪と高橋 [13] は Banach 空間上の極大単調作用素に対して，次の Halpern 型の強収束定理を得た．

定理 4.4[(13)]. E を滑らかで一様凸な Banach 空間とし，$A \subset E \times E^*$ を極大単調作用素とする．また，$r > 0$ に対して $Q_r = (J + rA)^{-1}J$ とし，点列 $\{x_n\}$ を次のように定義する．$x_1 = x \in E$,

$$x_{n+1} = J^{-1}(\alpha_n J(x) + (1 - \alpha_n)J(Q_{r_n} x_n)), \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

ここで $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

を満たすものとする．このとき $A^{-1}0 \neq \phi$ ならば $\{x_n\}$ は $Q_{A^{-1}0}x$ に強収束する．ここで $Q_{A^{-1}0}$ は E から $A^{-1}0$ の上への generalized projection である．

Banach 空間上の極大単調作用素に対して Mann 型の弱収束定理を得るために，次の強収束定理が必要となる．

定理 4.5[(9)]. E を滑らかで一様凸な Banach 空間とし，$A \subset E \times E^*$ を $A^{-1}0 \neq \phi$ となる極大単調作用素とする．また，$r > 0$ に対して $Q_r = (J + rA)^{-1}J$ とし，$Q_{A^{-1}0}$ を E から $A^{-1}0$ 上への generalized projection とする．また，E の点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x \in E$ とし

$$x_{n+1} = J^{-1}(\alpha_n J(x_n) + (1 - \alpha_n)J(Q_{r_n} x_n)), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

で定義する．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$, $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ である．このとき，$\{Q_{A^{-1}0}(x_n)\}$ は $A^{-1}0$ の点 v に強収束する．さらにこの元 $v \in A^{-1}0$ は

$$\lim_{n\to\infty} \phi(v, x_n) = \min_{y \in A^{-1}0} \lim_{n\to\infty} \phi(y, x_n)$$

を満たす.

定理 4.6([9]). E を滑らかで一様凸な Banach 空間とし，その duality mapping J を weakly sequentially continuous とする．$A \subset E \times E^*$ を $A^{-1}0 \neq \phi$ となる極大単調作用素とする．$r > 0$ に対して $Q_r = (J + rA)^{-1}J$ とし，$Q_{A^{-1}0}$ を E から $A^{-1}0$ の上への generalized projection とする．また，$\{x_n\}$ を次のように定義する．$x_1 = x \in E$ とし，

$$x_{n+1} = J^{-1}(\alpha_n J(x_n) + (1 - \alpha_n)J(Q_{r_n} x_n)), \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

ここで $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1, \quad \liminf_{n\to\infty} r_n > 0$$

を満たす．このとき $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 v に弱収束する．ここで $v = \lim_{n\to\infty} Q_{A^{-1}0}(x_n)$ である．

定理 4.6 の直接的な結果として，次の定理を得る．

定理 4.7([9]). E を滑らかで一様凸な Banach 空間とし，その duality mapping J を weakly sequentially continuous とする．$A \subset E \times E^*$ を $A^{-1}0 \neq \phi$ となる極大単調作用素とし，$r > 0$ に対して，$Q_r = (J + rA)^{-1}J$ とする．$Q_{A^{-1}0}$ を E から $A^{-1}0$ 上への generalized projection とする．点 $\{x_n\}$ を次のように定義する．$x_1 = x \in E$,

$$x_{n+1} = Q_{r_n} x_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

ここで，$\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ を満たす．このとき $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 v に弱収束する．ここで $v = \lim_{n\to\infty} Q_{A^{-1}0}(x_n)$ である．

5 Minimizers を求める収束定理

定理 4.2 を用いると，次の定理を得ることができる．

定理 5.1([10]). H を Hilbert 空間とし，$f:\ H \to (-\infty, \infty]$ を proper で下半連続な凸関数とする．$x \in H$ に対して，点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x$ および

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$
$$J_{r_n} x_n = \operatorname{argmin} \left\{ f(z) + \frac{1}{2r_n}\|z - x_n\|^2 :\ z \in H \right\}$$

で定義する．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

を満たすとする．もし $(\partial f)^{-1}0 \neq \phi$ ならばこの点列 $\{x_n\}$ は x に一番近い f の minimizer に強収束する．さらに

$$f(x_{n+1}) - f(v) \leq \alpha_n(f(x) - f(v)) + \frac{1-\alpha_n}{r_n}\|J_{r_n}x_n - v\|\|J_{r_n}x_n - x_n\|$$

が成り立つ．

定理 4.3 を用いると，次の定理を得ることができる．

定理 5.2([10]). H を Hilbert 空間とし，$f:\ H \to (-\infty, \infty]$ を proper で下半連続な凸関数とする．$x \in H$ に対して，点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x$ および

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)J_{r_n}x_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$
$$J_{r_n}x_n = \mathrm{argmin}\left\{f(z) + \frac{1}{2r_n}\|z - x_n\|^2 :\ z \in H\right\}$$

で定義する．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は

$$\alpha_n \in [0, k],\ 0 < k < 1, \quad \lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

を満たすとする．もし $(\partial f)^{-1}0 \neq \phi$ ならば $\{x_n\}$ は f の minimizer に弱収束する．さらに

$$f(x_{n+1}) - f(v) \leq \alpha_n(f(x_n) - f(v)) + \frac{1-\alpha_n}{r_n}\|J_{r_n}x_n - v\|\|J_{r_n}x_n - x_n\|$$

が成り立つ．

定理 4.4 を用いると，次の強収束定理を得ることができる．

定理 5.3([13]). E を滑らかで一様凸な Banach 空間とし，$f:\ E \to (-\infty, \infty]$ を $(\partial f)^{-1}0 \neq \phi$ となるような proper で凸な下半連続関数とする．このとき，点列 $\{x_n\}$ を次のように定義する．$x_1 = x \in E$ とし

$$y_n = \arg\min_{y\in E}\{f(y) + \frac{1}{2r_n}\|y\|^2 - \frac{1}{r_n}\langle y, Jx_n\rangle\},$$
$$x_{n+1} = J^{-1}(\alpha_n Jx + (1-\alpha_n)Jy_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

ここで，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

を満たす．このとき $\{x_n\}$ は $Q_{(\partial f)^{-1}0}x$ に強収束する．

定理 4.6 を用いると，次の弱収束定理を得ることができる．

定理 5.4([9]). E を滑らかで一様凸な Banach 空間とし，その duality mapping J を weakly sequentially continuous とする．$f:\ E \to (-\infty, \infty]$ を $(\partial f)^{-1}0 \neq \phi$ となるような proper で凸な下半連続関数とし，点列 $\{x_n\}$ を次のように定義する．$x_1 = x \in E$ とし

$$
\begin{aligned}
y_n &= \arg\min_{y \in E}\{f(y) + \frac{1}{2r_n}\|y\|^2 - \frac{1}{r_n}\langle y, Jx_n\rangle\}, \\
x_{n+1} &= J^{-1}(\alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)Jy_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots .
\end{aligned}
$$

ここで，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は

$$
\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1, \quad \liminf_{n\to\infty} r_n > 0
$$

を満たす．このとき $\{x_n\}$ は $v \in (\partial f)^{-1}0$ に弱収束する．さらに $v = \lim Q_{(\partial f)^{-1}0}(x_n)$ である．ここで $Q_{(\partial f)^{-1}0}$ は E から $(\partial f)^{-1}0$ 上への generalized projection である．

6 鞍点を求める収束定理

E 及び F を Banach 空間とし，$X \subset E$, $Y \subset F$ を閉凸集合とする．また，$L:\ X \times Y \to \mathbb{R}$ を，次の条件 (1),(2) を満たす 2 変数関数とする．

(1) 任意の $y \in Y$ に対し，$x \mapsto L(x,y)$ は上半連続な凹関数である;

(2) 任意の $x \in X$ に対し，$y \mapsto L(x,y)$ は下半連続な凸関数である．

このとき，$(x_0, y_0) \in X \times Y$ が 2 変数関数 L の鞍点であるとは

$$
L(x, y_0) \leq L(x_0, y_0) \leq L(x_0, y), \quad \forall (x,y) \in X \times Y
$$

が満たされるときをいう．2 変数関数 L に対して

$$
K(x,y) = \begin{cases} L(x,y), & x \in X,\ y \in Y, \\ \infty, & x \in X,\ Y \notin Y, \\ -\infty, & \text{otherwise} \end{cases}
$$

とし，集合値写像 $T:\ E \times F \to 2^{E^* \times F^*}$ を

$$
T(x,y) = \begin{cases} \partial_x(-K)(x,y) \times \partial_y K(x,y), & (x,y) \in X \times Y, \\ \phi, & (x,y) \notin X \times Y \end{cases}
$$

とする．ただし

$$
\partial_x(-K)(x,y) \times \partial_y K(x,y) = \partial(-K(\cdot,y))(x) \times \partial(K(x,\cdot))(y), \ (x,y) \in X \times Y
$$

である．このとき，Rockafellar[22] によれば，T は極大単調写像であり，$(0,0) \in T(x_0, y_0)$ となる必要十分条件は，(x_0, y_0) が L の鞍点となることである．定理 4.4 を用いて，高阪–高橋 [14] は次の定理を証明した．

定理 6.1([14]). E と F を一様凸で，かつ滑らかな Banach 空間とし，J_E と J_F をそれぞれ，E と F 上の duality 写像とする．また，$X \subset E$，$Y \subset F$ を閉凸集合とし，$L\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ を次の条件を満たす 2 変数関数とする．

(1) 任意の $y \in Y$ に対し，$x \mapsto L(x, y)$ は上半連続な凹関数である;

(2) 任意の $x \in X$ に対し，$y \mapsto L(x, y)$ は下半連続な凸関数である．

L の鞍点集合の全体を S とし，$S \neq \phi$ とする．このとき，$E \times F$ の点列 $\{(x_n, y_n)\}$ を次のように定義する：$(x, y) \in E \times F$ に対して，$(x_1, y_1) = (x, y)$ とし

$$\begin{aligned} L_n(u, v_n) \le L_n(u_n, v_n) &\le L_n(u_n, v), \quad \forall (u, v) \in X \times Y, \\ x_{n+1} &= {J_E}^{-1}(\alpha_n J_E x + (1 - \alpha_n) J_E u_n), \\ y_{n+1} &= {J_F}^{-1}(\alpha_n J_F x + (1 - \alpha_n) J_F v_n), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

とする．ただし

$$L_n(u, v) = L(u, v) - \frac{1}{2r_n}\|u\|^2 + \frac{1}{r_n}\langle u, J_E x_n\rangle + \frac{1}{2r_n}\|v\|^2 - \frac{1}{r_n}\langle v, J_F y_n\rangle$$

であり，$\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$，$\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

を満たすとする．このとき，$\{(x_n, y_n)\}$ は $P_S(x, y)$ に強収束する．ただし，P_S は $E \times F$ から S の上への generalized projection である．

高阪–高橋 [14] は定理 4.6 を用いて，次の弱収束定理も得ている．

定理 6.2([14]). E, F を一様凸で，かつ一様に滑らかな Banach 空間とし，J_E, J_F をそれぞれ，E と F 上の duality 写像で weakly seqentially continuous なものとする．$X \subset E$ と $Y \subset F$ を閉凸集合とし，$L\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ を次の条件を満たす 2 変数関数とする．

(1) 任意の $y \in Y$ に対して，$x \mapsto L(x, y)$ は上半連続な凹関数とする;

(2) 任意の $x \in X$ に対して，$y \mapsto L(x, y)$ は下半連続な凸関数とする．

L の鞍点集合を S とし，$S \neq \phi$ とする．このとき，$E \times F$ の点列 $\{(x_n, y_n)\}$ を次のように定義する：$(x, y) \in E \times F$ に対して，$(x_1, y_1) = (x, y)$ とし

$$\begin{aligned} L_n(u, v_n) \leq L_n(u_n, v_n) \leq L_n(u_n, v), \quad \forall (u, v) \in X \times Y, \\ x_{n+1} = J_E{}^{-1}(\alpha_n J_E x_n + (1 - \alpha_n) J_E u_n), \\ y_{n+1} = J_F{}^{-1}(\alpha_n J_F y_n + (1 - \alpha_n) J_F v_n),\ n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

とする．ただし

$$\begin{aligned} L_n(u, v) =& L(u, v) - \frac{1}{2r_n}\|u\|^2 + \frac{1}{r_n}\langle u, J_E x_n\rangle \\ &+ \frac{1}{2r_n}\|v\|^2 - \frac{1}{r_n}\langle v, J_F y_n\rangle \end{aligned}$$

であり，$\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$，$\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1, \quad \liminf_{n\to\infty} r_n > 0$$

を満たすとする．このとき，$\{(x_n, y_n)\}$ は $(x_0, y_0) \in S$ に弱収束する．ここで

$$(x_0, y_0) = \lim_{n\to\infty} P_S(x_n, y_n)$$

である．ただし，P_S は $E \times F$ から S の上への generalized projection である．

参考文献

[1] Y. I. Alber, *Metric and generalized projections in Banach spaces: Properties and applications*, in Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type (A. G. Kartsatos Ed.), Marcel Dekker, New York, 1996, pp. 15–20.

[2] H. Brèzis, Opérateurs maximaux monotones, Mathematics Studies No.5, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[3] F. E. Browder, *Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **54** (1965), 1041–1044.

[4] J. Diestel, *Geometry of Banach spaces, Selected Topics*, Lecture Notes in Mathematics **485**, Springer, Berlin, 1975.

[5] O. Güler,*On the convergence of the proximal point algorithm for convex minimization*, SIAM J.Control Optim. **29** (1991), 403–419.

[6] B. Halpern, *Fixed points of nonexpanding maps*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 957–961.

[7] H. Iiduka and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and inverse-strongly-monotone mappings*, Nonlinear Anal., to appear.

[8] H. Iiduka, W. Takahashi and M.Toyoda, *Approximation of solutions of variational inequalities for monotone mappings*, PanAmerican Math.J. **14** (2004), 49–61.

[9] S. Kamimura, F. Kohsaka and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for maximal monotone operators in a Banach space*, Set-Valued Anal., to appear.

[10] S. Kamimura and W. Takahashi, *Approximating solutions of maximal monotone operators in Hilbert spaces*, J. Approx. Theory **106** (2000), 226–240.

[11] S. Kamimura and W. Takahashi, *Weak and strong convergence of solutions to accretive operator inclusions and applications*, Set-Valued Anal. **8** (2000), 361–374.

[12] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach apace*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945.

[13] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Strong convergence of an iterative sequence for maximal monotone operators in a Banach space*, Abstr. Appl. Anal. **2004** (2004), 239–249.

[14] F. Kohsaka and W. Takahashi, Weak and strong convergence theorems for minimax problems in Banach spaces, in Nonlinear Analysis and Convex Analysis (W. Takahashi and T. Tanaka, Eds.),Yokohama Publishers, 2004, pp. 203–216.

[15] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 506–510.

[16] B. Martinet, *Regularisation, d'inèquations variationelles par approximations succesives*, Revue Francaise d'Informatique et de Recherche Operationelle, 1970, pp. 154–159.

[17] J. J. Moreau, *Proximité et dualité dans un espace Hilberien*, Bull. Soc. Math., France **93** (1965), 273–299.

[18] S. Ohsawa and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for resolvents of maximal monotone operator*, Arch. Math. **81** (2003), 439–445.

[19] Z. Opial, *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 591–597.

[20] S. Reich, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **67** (1979), 274–276.

[21] R. T. Rockafellar, *Characterization of the subdifferentials of convex functions*, Pacific J. Math. **17** (1966), 497–510.

[22] R. T. Rockafellar, *On the maximality of sums of nonlinear monotone operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **149** (1970), 75–88.

[23] R. T. Rockafellar, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control Optim. **14** (1976), 877–898.

[24] M. V. Solodov and B. F. Svaiter, *A hybrid projection – proximal point algorithm*, J. Convex Anal. **6** (1999), 59–70.

[25] M. V. Solodov and B. F. Svaiter, *Forcing strong convergence of proximal point iterations in a Hilbert space*, Math. Program. **87** (2000), 189–202.

[26] W. Takahashi, *Fixed point theorem for amenable semigroup of non-expansive mappings*, Kōdai Math. Sem. Rep. **21** (1969), 383-386.

[27] W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), 253–256.

[28] W. Takahashi, *Fixed point theorems for families of nonexpansive mappings on unbounded sets*, J. Math. Soc. Japan **36** (1984), 543–553.

[29] W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for a reversible semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), 55–58.

[30] W. Takahashi, *Fixed point theorem and nonlinear ergodic theorem for nonexpansive semigroups without convexity*, Canad. J. Math. **44** (1992), 880–887.

[31] W. Takahashi, *Fixed point theorems and nonlinear ergodic theorems for nonlinear semigroups and their applications*, Nonlinear Anal. **30** (1997), 1283–1293.

[32] W. Takahashi, *Fan's existence theorem for inequalities concerning convex functions and its applications*, in Minimax Theory and Applications (S. Simons and B. Ricceri, Eds.), Kluwer Academic Publishers, 1998, pp. 241-260.

[33] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[34] W. Takahashi, *Convex Analysis and Approximation of Fixed Points*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000 (Japanese).

[35] W. Takahashi and M. Toyoda, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings and monotone mappings*, J. Optim.Theory Appl. **118** (2003), 417–428.

[36] R. Wittmann, *Approximation of fixed points of nonexpansive mappings*, Arch. Math. **58** (1992), 486–491.