数理解析研究所講究録 1409 巻 2005 年 67-77

ファジィランダム多目的線形計画問題に対する満足水準最適化モデルと M-α-パレート最適性に基づく対話型ファジィ満足化手法

広島大学大学院・工学研究科 片桐 英樹 (Hideki KATAGIRI)
坂和 正敏 (Masatoshi SAKAWA)
Graduate School of Engineering
Hiroshima University

1 はじめに

従来，不確実性やあいまい性が存在する状況下での意思決定に対しては，主に確率計画的アプローチ [1, 2, 3, 4, 5] と多目的ファジィ計画法 [6, 7, 8] や様相性最適化モデル [9] などのファジィ計画的アプローチの 2 つが考えられてきた．これらのモデルにおいては，問題に含まれるパラメータがそれぞれ確率変数やファジィ数として与えられてきたが，専門家が「ある確率でだいたいいくらぐらい」という形で情報をもっている場合もある．例えば，農産物の価格は需要量や生産量に依存し，さらに需要量や生産量も経済状況や気候，降水量など確率的に変動する要因の影響を受ける．一方で，豊作や不作などの予測や需要量がある確率で定められたとしても，それぞれの事象が生起したときの価格をはっきりと定めることは難しい場合も多く，問題の定式化に携わった専門家の人間としての判断をより適切に表現するためには，ファジィ性とランダム性を同時に含む数学的概念が必要になる．このような確率的不確実性とあいまい性を表すのに有用な概念としてファジィランダム変数 [10, 11] が考えられ，近年，線形計画問題や多目的問題など数理計画問題への応用がなされている [12, 13, 14, 15, 16, 17]．例えば，作付面積を決定する作付計画問題 [18] において，農産物の単位作付面積あたりの利益や労働時間がファジィランダム変数で表される場合，利益最大化と同時に労働時間を最小化する 2 目的計画問題はファジィランダム多目的計画問題として定式化できる．

ファジィランダム変数はあいまい性と確率的不確実性を同時に含む概念であるため，従来考えられてきたファジィ計画法や確率計画法における解概念をそのまま適用することはできない．したがって，本論文では，ファジィ計画モデルと確率計画モデルを融合した新たなモデルを提案し，多目的ファジィ計画法において坂和ら [7, 8] が提案した M-α-パレート最適解を拡張した解概念を提案する．また，意思決定者が定義された解集合の中から満足解を対話を通して導出するという対話型アルゴリズムの適用を試みる．

次節ではファジィランダム変数係数を含む多目的線形計画問題を定式化する．3 節では，全ての係数が α-レベル集合に含まれているという制約の下で，目的関数を最適化すると

いう問題を考え，確率計画法における満足水準最適化に基づく新たなモデルを提案する．また，多目的ファジィ計画法における M-α-パレート最適性を拡張した解概念を定義する．4 節では，定式化された問題を等価な多目的問題へと変形する過程を示す．5 節では，提案されたパレート最適解集合の中から意思決定者が自己の満足解を対話を通して導出する対話型アルゴリズムを構築する．6 節では簡単な数値例を示し，最後の 7 節でまとめと今後の課題について述べる．

2 ファジィランダム多目的線形計画問題

次の多目的線形計画問題を考える。

$$\left.\begin{array}{rl} \text{minimize} & \bar{\tilde{\boldsymbol{C}}}_i \boldsymbol{x}, \quad i=1,\ldots,k \\ \text{subject to} & \bar{\tilde{\boldsymbol{A}}}_l \boldsymbol{x} \leq \bar{\tilde{B}}_l, \quad l=1,\ldots,m \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}\right\} \tag{1}$$

ここで，$\boldsymbol{x}$ は n 次元決定変数列ベクトル，$\bar{\tilde{\boldsymbol{C}}}_i = (\bar{\tilde{C}}_{i1},\ldots,\bar{\tilde{C}}_{in})$, $i=1,\ldots,k$ は次のメンバシップ関数により特性づけられるファジィランダム変数を要素にもつ係数ベクトルである．

$$\mu_{\bar{\tilde{C}}_{ij}}(\tau) = \begin{cases} L\left(\dfrac{\bar{d}^c_{ij} - \tau}{\beta^c_{ij}}\right) & (\tau \leq \bar{d}^c_{ij}) \\[2ex] R\left(\dfrac{\tau - \bar{d}^c_{ij}}{\delta^c_{ij}}\right) & (\tau \geq \bar{d}^c_{ij}) \end{cases}$$

簡便性のために，このようなファジィランダム変数を $\bar{\tilde{C}}_{ij} = (\bar{d}^c_{ij},\ \beta^c_{ij},\ \delta^c_{ij})_{LR}$ と表すものとする．また，$\bar{\tilde{\boldsymbol{A}}}_l = (\bar{\tilde{A}}_{l1},\ldots,\bar{\tilde{A}}_{ln})$, $\bar{\tilde{B}}_l$, $l=1,\ldots,m$ は $\bar{\tilde{A}}_{lj} = (\bar{d}^a_{lj},\ \beta^a_{lj},\ \delta^a_{lj})_{LR}$, $\bar{\tilde{B}}_l = (\bar{d}^b_l,\ \beta^b_l,\ \delta^b_l)_{LR}$ とする．ここで，$L(t)$ は $L(t):[0,\infty)\to[0,1]$ を満たす単調非増加関数，R についても同様の条件を満たすものとする．$\bar{\boldsymbol{d}}^c_i$, $\bar{\boldsymbol{d}}^a_l$, $i=1,\ldots k$, $l=1,\ldots m$ はそれぞれ平均値 $\boldsymbol{m}^c_i$, $\boldsymbol{m}^a_l$, 分散共分散行列 V^c_i, V^a_l である多次元正規分布に従う n 次元確率変数ベクトル，$\bar{d}^b_l$ は平均値 m^b_l, 分散 v^b_l である正規分布に従う確率変数とし，$\boldsymbol{\beta}^c_i$, $\boldsymbol{\delta}^c_i$, $\boldsymbol{\beta}^a_l$, $\boldsymbol{\delta}^a_l$, β^b_l, δ^b_l, $i=1,\ldots,k$, $l=1,\ldots,m$ はそれぞれ左右の広がりを表すパラメータであり正数とする．

このとき，係数 $\bar{\tilde{C}}_{ij}$, $i=1,\ldots k$ はメンバシップ関数の中心が確率変数となっている L-R ファジィ数とみなすことができるため，拡張原理に基づく L-R ファジィ数の演算を用いると，$\bar{\tilde{\boldsymbol{C}}}_i \boldsymbol{x} = (\bar{\boldsymbol{d}}^c_i \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\beta}^c_i \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\delta}^c_i \boldsymbol{x})_{LR}$ となり，目的関数もファジィランダム変数となる．

3 ファジィランダム計画モデルとパレート最適解

問題 (1) に対して，目的関数や制約式の係数ベクトルおよび制約式の右辺の値に対応するファジィランダム変数のメンバシップ関数値が許容レベル α 以上であるという条件の下

で，各目的関数を最適化するという次の問題を考える．

$$
\left.\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \bar{\boldsymbol{c}}_i \boldsymbol{x},\ i=1,\ldots,k \\
\text{subject to} & \bar{\boldsymbol{a}}_l \boldsymbol{x} \leq \bar{b}_l,\ l=1,\ldots,m \\
& \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \\
& \bar{\boldsymbol{a}}_l \in \bar{\tilde{\boldsymbol{A}}}_{l\alpha},\ l=1,\ldots,m \\
& \bar{b}_l \in \bar{\tilde{B}}_{l\alpha},\ l=1,\ldots,m \\
& \bar{\boldsymbol{c}}_i \in \bar{\tilde{\boldsymbol{C}}}_{i\alpha},\ i=1,\ldots,k
\end{array}\right\} \tag{2}
$$

ここで，$\bar{\tilde{\boldsymbol{A}}}_{l\alpha}$，$\bar{\tilde{B}}_{l\alpha}$，$\bar{\tilde{\boldsymbol{C}}}_{i\alpha}$ はそれぞれ $\bar{\tilde{\boldsymbol{A}}}_l, \bar{\tilde{B}}_l, \bar{\tilde{\boldsymbol{C}}}_i$ の α-レベル集合を表す．問題 (2) においては，$\bar{\boldsymbol{a}}_l, \bar{b}_l, \bar{\boldsymbol{c}}_i$ はそれぞれ $\bar{\tilde{\boldsymbol{A}}}_{l\alpha}, \bar{\tilde{B}}_{l\alpha}, \bar{\tilde{\boldsymbol{C}}}_{i\alpha}$ から任意に選ぶことができるため，$\boldsymbol{x}$ だけでなく $\bar{\boldsymbol{c}}_i$，$\bar{\boldsymbol{a}}_l$，$\bar{b}_l$ も決定変数になっていることに注意すべきである．

ここで，l 番目の制約式が満たされる確率が η_l 以上であればよいとする機会制約条件を導入すれば，次のように定式化される．

$$
\left.\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \bar{\boldsymbol{c}}_i \boldsymbol{x},\ i=1,\ldots,k \\
\text{subject to} & \Pr[\bar{\boldsymbol{a}}_l \boldsymbol{x} \leq \bar{b}_l] \geq \eta_l,\ l=1,\ldots,m \\
& \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \\
& \bar{\boldsymbol{a}}_l \in \bar{\tilde{\boldsymbol{A}}}_{l\alpha},\ l=1,\ldots,m \\
& \bar{b}_l \in \bar{\tilde{B}}_{l\alpha},\ l=1,\ldots,m \\
& \bar{\boldsymbol{c}}_i \in \bar{\tilde{\boldsymbol{C}}}_{i\alpha},\ i=1,\ldots,k
\end{array}\right\} \tag{3}
$$

問題 (3) の各目的関数に対する人間としての意思決定者の判断の曖昧性を考慮して，「だいたい y_i^1 以下」というファジィ目標を設定し，次の線形メンバシップ関数 $\mu_i(y)$ で表すものとする．

$$
\mu_i(y) = \begin{cases} 1 & (y_i^1 \geq y) \\ \dfrac{y_i^0 - y}{y_i^0 - y_i^1} & (y_i^1 < y < y_i^0) \\ 0 & (y_i^0 \leq y) \end{cases}
$$

ただし，y_i^0 および y_i^1 は $y_i^0 > y_i^1$ を満たす定数であり，意思決定者は i 番目の個別の最大化問題と最小化問題の最適値を参考にして，y_i^0 および y_i^1 の値を決定するものとする．

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & \boldsymbol{m}_i^c \boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & \boldsymbol{m}_l^a \boldsymbol{x} \leq m_l^b,\ l=1,\ldots,m \\
& \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \boldsymbol{m}_i^c \boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & \boldsymbol{m}_l^a \boldsymbol{x} \leq m_l^b,\ l=1,\ldots,m \\
& \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}
\end{array}
$$

このとき，問題 (3) は次の多目的計画問題に書き表される．

$$\left.\begin{array}{ll} \text{maximize} & \mu_i(\bar{\boldsymbol{c}}_i\boldsymbol{x}),\ i=1,\ldots,k \\ \text{subject to} & \Pr[\bar{\boldsymbol{a}}_l\boldsymbol{x} \leq \bar{b}_l] \geq \eta_l,\ l=1,\ldots,m \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \\ & \bar{\boldsymbol{a}}_l \in \tilde{\bar{\boldsymbol{A}}}_{l\alpha},\ l=1,\ldots,m \\ & \bar{b}_l \in \tilde{\bar{B}}_{l\alpha},\ l=1,\ldots,m \\ & \bar{\boldsymbol{c}}_i \in \tilde{\bar{\boldsymbol{C}}}_{i\alpha},\ i=1,\ldots,k \end{array}\right\} \tag{4}$$

問題 (4) の目的関数は $\bar{\boldsymbol{c}}_i$ に依存して確率的に変動するため，確率計画法に基づいたアプローチを試みる．代表的な確率計画モデルとしては，期待値最適化モデル，分散最小化モデル，確率最大化モデル，満足水準最適化モデルなどが挙げられるが，本研究では，満足水準最適化モデルに基づいて次の問題を考える．

$$\left.\begin{array}{ll} \text{maximize} & h_i,\ i=1,\ldots,k \\ \text{subject to} & \Pr[\mu_i(\bar{\boldsymbol{c}}_i\boldsymbol{x}) \geq h_i] \geq \theta_i,\ i=1,\ldots,k \\ & \Pr[\bar{\boldsymbol{a}}_l\boldsymbol{x} \leq \bar{b}_l] \geq \eta_l,\ l=1,\ldots,m \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \\ & \bar{\boldsymbol{a}}_l \in \tilde{\bar{\boldsymbol{A}}}_{l\alpha},\ l=1,\ldots,m \\ & \bar{b}_l \in \tilde{\bar{B}}_{l\alpha},\ l=1,\ldots,m \\ & \bar{\boldsymbol{c}}_i \in \tilde{\bar{\boldsymbol{C}}}_{i\alpha},\ i=1,\ldots,k \end{array}\right\} \tag{5}$$

この問題は，各目的関数の満足度が水準値 h_i 以上である確率が充足水準 θ_i 以上，制約を満たす確率が η_l 以上であるという機会制約の下で，水準値 h_i を最大化する多目的計画問題となっている．

問題 (5) には複数個の目的関数が存在するため，通常の単一目的の場合の最適解と同様に議論することはできない．ファジィパラメータを含む数理計画問題に対しては，坂和ら [7, 8] が M-α-パレート最適解を定義している，本研究では，M-α-パレート最適解を拡張して新たな解概念を定義する．

定義 1 (α-レベル集合を用いた満足水準最適化モデルにおけるパレート最適解)

問題 (5) に対して，$h_i \geq h_i^*$，$i=1,\ldots,k$ でしかも，ある j について，$h_j > h_j^*$ となるような $(\boldsymbol{x}, h_i) \in X(\bar{\boldsymbol{a}}_l, \bar{b}_l, \bar{\boldsymbol{c}}_i) \triangleq \{(\boldsymbol{x}, h_i) \in R^{n+1} \mid \Pr[\mu_i(\bar{\boldsymbol{c}}_i\boldsymbol{x}) \geq h_i] \geq \theta_i,\ \Pr[\bar{\boldsymbol{a}}_l\boldsymbol{x} \leq \bar{b}_l] \geq \eta_l\ ;\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},\ \bar{\boldsymbol{a}}_l \in \tilde{\bar{\boldsymbol{A}}}_{l\alpha},\ \bar{b}_l \in \tilde{\bar{B}}_{l\alpha},\ \bar{\boldsymbol{c}}_i \in \tilde{\bar{\boldsymbol{C}}}_{i\alpha},\ i=1,\ldots,k,\ l=1,\ldots,m\}$ が存在しないとき，$(\boldsymbol{x}^*, h_i^*) \in X(\bar{\boldsymbol{a}}_l^*, \bar{b}_l^*, \bar{\boldsymbol{c}}_i^*)$ を α-レベル集合を用いた満足水準最適化モデルにおけるパレート最適解，$\bar{\boldsymbol{a}}_l^* \in \tilde{\bar{\boldsymbol{A}}}_{l\alpha}$，$\bar{b}_l^* \in \tilde{\bar{B}}_{l\alpha}$，$\bar{\boldsymbol{c}}_i^* \in \tilde{\bar{\boldsymbol{C}}}_{i\alpha}$ を対応する α-レベル最適係数とよぶ．

以下では，上で定義したパレート最適解集合の中から，意思決定者の満足解を導出するための対話型アルゴリズムを考える．

4 等価確定問題への変換

本節では，対話型アルゴリズムを与えるための前段階として，問題 (5) を等価な確定問題へと変形する過程を示す．任意の ω に対して，$\tilde{\bar{\boldsymbol{A}}}_{l\alpha}(\omega)$，$\tilde{\bar{B}}_{l\alpha}(\omega)$，$\tilde{\bar{\boldsymbol{C}}}_{i\alpha}(\omega)$ の実行可

能領域は，α-レベル集合の左右の端点を用いて，閉区間 $[\bar{a}^L_{l\alpha}(\omega), \bar{\boldsymbol{a}}^R_{l\alpha}(\omega)]$，$[\bar{b}^L_{l\alpha}(\omega), \bar{b}^R_{l\alpha}(\omega)]$，$[\bar{\boldsymbol{c}}^L_{i\alpha}(\omega), \bar{\boldsymbol{c}}^R_{i\alpha}(\omega)]$ と表せるため，問題 (5) は

$$\left.\begin{array}{ll} \text{maximize} & h_i,\ i=1,\dots,k \\ \text{subject to} & \Pr[\bar{\boldsymbol{c}}^L_{i\alpha}\boldsymbol{x} \le \mu^*_i(h_i)] \ge \theta_i,\ i=1,\dots,k \\ & \Pr(\bar{\boldsymbol{a}}^L_{l\alpha}\boldsymbol{x} \le \bar{b}^R_{l\alpha}) \ge \eta_l,\ l=1,\dots,m \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{array}\right\} \tag{6}$$

となる．ただし，L^*, R^*, $\mu^*_i(\cdot)$ はそれぞれ L, R, μ_i の擬逆関数である．ここで，

$$\bar{\boldsymbol{a}}^L_{l\alpha} = (\bar{\boldsymbol{d}}^a_l - L^*(\alpha)\boldsymbol{\beta}^a_l),\ l=1,\dots,m$$

$$\bar{\boldsymbol{a}}^R_{l\alpha} = (\bar{\boldsymbol{d}}^a_l + R^*(\alpha)\boldsymbol{\delta}^a_l),\ l=1,\dots,m$$

$$\bar{b}^L_{l\alpha} = (\bar{d}^b_l - L^*(\alpha)\beta^b_l),\ l=1,\dots,m$$

$$\bar{b}^R_{l\alpha} = (\bar{d}^b_l + R^*(\alpha)\delta^b_l),\ l=1,\dots,m$$

$$\bar{\boldsymbol{c}}^L_{i\alpha} = (\bar{\boldsymbol{d}}^c_i - L^*(\alpha)\boldsymbol{\beta}^c_i),\ i=1,\dots,k$$

$$\bar{\boldsymbol{c}}^R_{i\alpha} = (\bar{\boldsymbol{d}}^c_i + R^*(\alpha)\boldsymbol{\delta}^c_i),\ i=1,\dots,k$$

となることに注意すると，$\Pr[\bar{\boldsymbol{c}}^L_{i\alpha}\boldsymbol{x} \le \mu^*_i(h_i)] \ge \theta_i,\ i=1,\dots,k$ は

$$\Pr[\{\bar{\boldsymbol{d}}^c_i - L^*(\alpha)\boldsymbol{\beta}^c_i\}\boldsymbol{x} \le \mu^*_i(h_i)] \ge \theta_i,\ i=1,\dots,k$$

となるため，

$$\Pr\left(\frac{\bar{\boldsymbol{d}}^c_i\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}^c_i\boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^T V^c_i \boldsymbol{x}}} \le \frac{\mu^*_i(h_i) - \{\boldsymbol{m}^c_i - L^*(\alpha)\boldsymbol{\beta}^c_i\}\boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^T V^c_i \boldsymbol{x}}}\right) \ge \theta_i,\ i=1,\dots,k$$

と等価に変形できる．ここで，左辺は標準正規分布に従う確率変数となっていることに注意する．また，同様にして，$\Pr(\bar{\boldsymbol{a}}^L_{l\alpha}\boldsymbol{x} \le \bar{b}^R_{l\alpha}) \ge \eta_l,\ l=1,\dots,m$ は

$$\Pr(\{\bar{\boldsymbol{d}}^a_l - L^*(\alpha)\boldsymbol{\beta}^a_l\}\boldsymbol{x} \le \bar{d}^b_l + R^*(\alpha)\delta^b_l) \ge \eta_l,\ l=1,\dots,m$$

となり

$$\Pr\left(\frac{(\bar{\boldsymbol{d}}^a_l\boldsymbol{x} - \bar{d}^b_l) - (\boldsymbol{m}^a_l\boldsymbol{x} - m^b_l)}{\sqrt{\boldsymbol{x}^T V^a_l \boldsymbol{x} + v^b_l}} \le \frac{-\{\boldsymbol{m}^a_l - L^*(\alpha)\boldsymbol{\beta}^a_l\}\boldsymbol{x} + m^b_l + R^*(\alpha)\delta^b_l}{\sqrt{\boldsymbol{x}^T V^a_l \boldsymbol{x} + v^b_l}}\right) \ge \eta_l,\ l=1,\dots,m$$

となる．よって $\Phi(\cdot)$ を標準正規分布の分布関数とすると，問題 (6) は次の等価確定問題に帰着される．

$$
\begin{aligned}
&\text{maximize} \quad h_i,\ i=1,\dots,k\\
&\text{subject to} \quad \Phi\left(\frac{\mu_i^*(h_i)-\{\boldsymbol{m}_i^c-L^*(\alpha)\boldsymbol{\beta}_i^c\}\boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^T V_i^c \boldsymbol{x}}}\right) \ge \theta_i,\ i=1,\dots,k\\
&\qquad\qquad\quad \Phi\left(\frac{-\{\boldsymbol{m}_l^a-L^*(\alpha)\boldsymbol{\beta}_l^a\}\boldsymbol{x}+m_l^b+R^*(\alpha)\delta_l^b}{\sqrt{\boldsymbol{x}^T V_l^a \boldsymbol{x}+v_l^b}}\right) \ge \eta_l,\ l=1,\dots,m\\
&\qquad\qquad\quad \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

さらに，$\Phi(\cdot)$ は強意単調増加連続関数であるため，その逆関数を $\Phi^{-1}(\cdot)$ とすると

$$
\begin{aligned}
&\text{maximize} \quad h_i,\ i=1,\dots,k\\
&\text{subject to} \quad \frac{\mu_i^*(h_i)-\{\boldsymbol{m}_i^c-L^*(\alpha)\boldsymbol{\beta}_i^c\}\boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^T V_i^c \boldsymbol{x}}} \ge \Phi^{-1}(\theta_i),\ i=1,\dots,k\\
&\qquad\qquad\quad \frac{-\{\boldsymbol{m}_l^a-L^*(\alpha)\boldsymbol{\beta}_l^a\}\boldsymbol{x}+m_l^b+R^*(\alpha)\delta_l^b}{\sqrt{\boldsymbol{x}^T V_l^a \boldsymbol{x}+v_l^b}} \ge \Phi^{-1}(\eta_l),\ l=1,\dots,m\\
&\qquad\qquad\quad \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

となり

$$
\begin{aligned}
&\text{maximize} \quad h_i,\ i=1,\dots,k\\
&\text{subject to} \quad h_i \le \mu_i\left(\{\boldsymbol{m}_i^c-L^*(\alpha)\boldsymbol{\beta}_i^c\}\boldsymbol{x}+\Phi^{-1}(\theta_i)\sqrt{\boldsymbol{x}^T V_i^c \boldsymbol{x}}\right),\ i=1,\dots,k\\
&\qquad\qquad\quad \{\boldsymbol{m}_l^a-L^*(\alpha)\boldsymbol{\beta}_l^a\}\boldsymbol{x}-m_l^b-R^*(\alpha)\delta_l^b+\Phi^{-1}(\eta_l)\sqrt{\boldsymbol{x}^T V_l^a \boldsymbol{x}+v_l^b} \le 0,\ l=1,\dots,m\\
&\qquad\qquad\quad \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

となる．よって次の問題と等価となる．

$$
\left.
\begin{aligned}
&\text{maximize} \quad \mu_i\left(\{\boldsymbol{m}_i^c-L^*(\alpha)\boldsymbol{\beta}_i^c\}\boldsymbol{x}+\Phi^{-1}(\theta_i)\sqrt{\boldsymbol{x}^T V_i^c \boldsymbol{x}}\right),\ i=1,\dots,k\\
&\text{subject to} \quad \{\boldsymbol{m}_l^a-L^*(\alpha)\boldsymbol{\beta}_l^a\}\boldsymbol{x}-m_l^b-R^*(\alpha)\delta_l^b+\Phi^{-1}(\eta_l)\sqrt{\boldsymbol{x}^T V_l^a \boldsymbol{x}+v_l^b} \le 0,\ l=1,\dots,m\\
&\qquad\qquad\quad \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}
\end{aligned}
\right\}
\tag{7}
$$

5 対話型アルゴリズム

問題 (7) に対して，意思決定者の満足解を対話を通じて導出するために対話型ファジィ満足化手法 [7, 8] の適用を試みる．まず，各目的関数であるメンバシップ関数に対する意

思決定者の志望水準を反映する基準メンバシップ値 $\bar{\mu}_i(0 \le \bar{\mu}_i \le 1)$, $i = 1, \ldots, k$ を導入した次の問題を考える.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{minimize} & \max\limits_{i=1,\ldots,k}[\bar{\mu}_i - \mu_i(\{\boldsymbol{m}_i^c - L^*(\alpha)\boldsymbol{\beta}_i^c\}\boldsymbol{x} + \Phi^{-1}(\theta_i)\sqrt{\boldsymbol{x}^T V_i^c \boldsymbol{x}})] \\ \text{subject to} & \{\boldsymbol{m}_l^a - L^*(\alpha)\boldsymbol{\beta}_l^a\}\boldsymbol{x} - m_l^b - R^*(\alpha)\delta_l^b + \Phi^{-1}(\eta_l)\sqrt{\boldsymbol{x}^T V_l^a \boldsymbol{x} + v_l^b} \le 0,\ l = 1, \ldots, m \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}\end{array}\right\} \tag{8}$$

あるいは等価的に

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & v \\ \text{subject to} & \bar{\mu}_i - \mu_i\left(\{\boldsymbol{m}_i^c - L^*(\alpha)\boldsymbol{\beta}_i^c\}\boldsymbol{x} + \Phi^{-1}(\theta_i)\sqrt{\boldsymbol{x}^T V_i^c \boldsymbol{x}}\right) \le v,\ i = 1, \ldots, k \\ & \{\boldsymbol{m}_l^a - L^*(\alpha)\boldsymbol{\beta}_l^a\}\boldsymbol{x} - m_l^b - R^*(\alpha)\delta_l^b + \Phi^{-1}(\eta_l)\sqrt{\boldsymbol{x}^T V_l^a \boldsymbol{x} + v_l^b} \le 0,\ l = 1, \ldots, m \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}\end{array}$$

さらに, μ_i の単調性によって

$$\left.\begin{array}{ll}\text{minimize} & v \\ \text{subject to} & \{\boldsymbol{m}_i^c - L^*(\alpha)\boldsymbol{\beta}_i^c\}\boldsymbol{x} + \Phi^{-1}(\theta_i)\sqrt{\boldsymbol{x}^T V_i^c \boldsymbol{x}} \le y_i^0 - (y_i^0 - y_i^1)(\bar{\mu}_i - v),\ i = 1, \ldots, k \\ & \{\boldsymbol{m}_l^a - L^*(\alpha)\boldsymbol{\beta}_l^a\}\boldsymbol{x} + \Phi^{-1}(\eta_l)\sqrt{\boldsymbol{x}^T V_l^a \boldsymbol{x} + v_l^b} \le m_l^b + R^*(\alpha)\delta_l^b,\ l = 1, \ldots, m \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}\end{array}\right\} \tag{9}$$

と変形できる. ここで, $\theta_i, \eta_l > 1/2$ とすれば $\Phi^{-1}(\theta_i), \Phi^{-1}(\eta_l) > 0$ が成り立ち, また $\mu_i^*(\cdot)$ が線形関数であることから, 問題 (9) は凸計画問題になるため逐次 2 次計画法などの手法で解くことができる. 設定された α および $\bar{\mu}_i$ に対する解に満足できないときは, 意思決定者は $\bar{\mu}_i$ や α の値を繰り返し更新し, 最終的に自己の満足解を求める. 以上から, 意思決定者の満足解を求めるためのアルゴリズムは次のようになる.

対話型ファジィ満足化手法のアルゴリズム

手順 1 与えられた制約領域における各目的関数の個別の最大値と最小値を求める.

手順 2 手順 1 で得られた個別の最小値と最大値に基づいて, ファジィ目標を特性付けるメンバシップ関数 $\mu_i(\cdot)$ を決定する.

手順 3 $\theta_i(1/2 < \theta_i \le 1)$, $\eta_l(1/2 < \eta_l \le 1)$, および初期の $\alpha(0 \le \alpha \le 1)$ を設定し, 初期基準メンバシップ値を 1 に設定する.

手順 4 設定された基準メンバシップ値 $\bar{\mu}_i$, α に対して, 対応するミニマックス問題 (8) を解く.

手順 5 現在の解に満足なら終了. そうでなければ, 基準メンバシップ値 $\bar{\mu}_i$ あるいは α の値を更新して手順 4 へ戻る.

問題 (8) を解いて得られた最適解と定義 1 のパレート最適解との間には次の関係が示される.

定理 1

$(\boldsymbol{x}^*, \bar{\boldsymbol{a}}_l^*, \bar{b}_l^*, \bar{\boldsymbol{c}}_i^*)$ がある基準メンバシップ値に対する問題 (8) の一意的な最適解であれば, $(\boldsymbol{x}^*, h_i^*)\Big($ただし, $h_i^* \triangleq \mu_i\left(\{\boldsymbol{m}_i^c - L^*(\alpha)\boldsymbol{\beta}_i^c\}\boldsymbol{x}^* + \Phi^{-1}(\theta_i)\sqrt{\boldsymbol{x}^{*T}V_i^c\boldsymbol{x}^*}\right)$ とする$\Big)$は問題 (5) の α-レベル集合を用いた満足水準最適化モデルにおけるパレート最適解で, $\bar{\boldsymbol{a}}_l^*$, $\bar{b}_l^*$, $\bar{\boldsymbol{c}}_i^*$ は α-レベル最適係数である.

定理 2

$(\boldsymbol{x}^*, h_i^*)\Big($ただし, $h_i^* \triangleq \mu_i\left(\{\boldsymbol{m}_i^c - L^*(\alpha)\boldsymbol{\beta}_i^c\}\boldsymbol{x}^* + \Phi^{-1}(\theta_i)\sqrt{\boldsymbol{x}^{*T}V_i^c\boldsymbol{x}^*}\right)$ とする$\Big)$が問題 (5) の α-レベル集合を用いた満足水準最適化モデルにおけるパレート最適解で, $\bar{\boldsymbol{a}}_l^*$, $\bar{b}_l^*$, $\bar{\boldsymbol{c}}_i^*$ が α-レベル最適係数であれば, $(\boldsymbol{x}^*, \bar{\boldsymbol{a}}_l^*, \bar{b}_l^*, \bar{\boldsymbol{c}}_i^*)$ はある基準メンバシップ値に対する問題 (8) の最適解である.

6 数値例

数値例として, 次のようなファジィランダム多目的線形計画問題を考える.

$$\left.\begin{array}{rl}
\text{minimize} & \tilde{\bar{C}}_{11}x_1 + \tilde{\bar{C}}_{12}x_2 + \tilde{\bar{C}}_{13}x_3 \\
\text{minimize} & \tilde{\bar{C}}_{21}x_1 + \tilde{\bar{C}}_{22}x_2 + \tilde{\bar{C}}_{23}x_3 \\
\text{subject to} & \tilde{\bar{A}}_{11}x_1 + \tilde{\bar{A}}_{12}x_2 + \tilde{\bar{A}}_{13}x_3 \le \tilde{\bar{B}}_1 \\
& \tilde{\bar{A}}_{21}x_1 + \tilde{\bar{A}}_{22}x_2 + \tilde{\bar{A}}_{23}x_3 \le \tilde{\bar{B}}_2 \\
& 7x_1 + 6x_2 + 4x_3 \le 100 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0
\end{array}\right\} \tag{10}$$

各パラメータの値は以下のような値とする.

$$\boldsymbol{m}_i^c = \begin{bmatrix} -5.0 & -3.0 & -6.0 \\ 4.0 & 2.0 & 7.0 \end{bmatrix} \boldsymbol{m}_i^a = \begin{bmatrix} 4.0 & 6.0 & 3.0 \\ 5.0 & 3.0 & 2.0 \end{bmatrix} m_l^b = \begin{bmatrix} 140 \\ 135 \end{bmatrix}$$

$$V_1^c = \begin{bmatrix} 1.4 & 0.2 & 0.9 \\ 0.2 & 1.3 & 0.4 \\ 0.9 & 0.4 & 1.6 \end{bmatrix} V_2^c = \begin{bmatrix} 1.3 & 0.2 & -0.9 \\ 0.2 & 1.5 & -0.4 \\ -0.9 & -0.4 & 1.4 \end{bmatrix}$$

$$V_1^a = \begin{bmatrix} 1.4 & 0.2 & -0.9 \\ 0.2 & 1.5 & -0.4 \\ -0.9 & -0.4 & 1.3 \end{bmatrix} V_2^a = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.3 & -0.7 \\ 0.3 & 1.3 & 0.4 \\ -0.7 & 0.4 & 1.2 \end{bmatrix} v_l^b = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}_i^c = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.5 & 1.0 \\ 1.5 & 1.0 & 1.5 \end{bmatrix}$$

$$\delta_i^c = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.5 & 1.0 \\ 1.5 & 1.0 & 1.5 \end{bmatrix}$$

$$\beta_l^a = \begin{bmatrix} 1.5 & 1.0 & 1.5 \\ 1.0 & 1.5 & 1.0 \end{bmatrix} \delta_l^a = \begin{bmatrix} 1.5 & 1.0 & 1.5 \\ 1.0 & 1.5 & 1.0 \end{bmatrix} \beta_l^b = \begin{bmatrix} 12 \\ 15 \end{bmatrix} \delta_l^b = \begin{bmatrix} 12 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\theta_i = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.7 \end{bmatrix} \eta_l = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.7 \end{bmatrix} \alpha = 0.7$$

問題 (10) に対して，基準メンバシップ値を対話的に更新しながら意思決定者の満足解を導出する対話の様子を表 1 に示す．

最初に $z_i(\boldsymbol{x})$ の個別の最小値 $z_{i,\min}$ を求めると，$z_{1,\min} = -150.000$, $z_{2,\min} = 0.000$ となる．これらの値に基づいて，意思決定者はファジィ目標を特性付けるメンバシップ関数を決定し，$h_1^0 = 0.000$, $h_1^1 = -150.000$, $h_2^0 = 175.000$, $h_2^1 = 0.000$ と定めた．

そして，仮想的な意思決定者によって，初期基準メンバシップ値 $(\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2)$ が理想値 $(1.00, 1.00)$ に設定されたとする．この基準メンバシップ値に対して，問題 (8) を解き，目的関数のメンバシップ値と解 $\boldsymbol{x}$ を得た (表 1 の第 2 列)．意思決定者は，μ_2 の値を犠牲にしても μ_1 の値を上げたいとして，基準メンバシップ値を更新した (表 1 の第 3 列)．この基準メンバシップ値に対して問題 (8) を解いて得られた目的関数のメンバシップ値と解が表 1 の第 3 列に示されている．意思決定者はこの解に満足できず，μ_1 の値を犠牲にしてでも μ_2 の値を上げたいと考え，基準メンバシップ値を更新した．表 1 の第 4 列に示されているのがこのときの目的関数のメンバシップ値と解である．意思決定者はこの解に満足できず，現実性の度合いを犠牲にしてでも他の値を上げたいと考え，現実性の度合いを 0.7 から 0.6 へと更新した．この現実性の度合いに対して問題 (8) を解いて得られた目的関数のメンバシップ値と解が表 1 の第 5 列に示されている．意思決定者はこの解に満足し，対話は終了した．

表 1: 対話の様子

	1 回目	2 回目	3 回目	4 回目
$\bar{\mu}_1$	1.00	1.00	0.95	0.95
$\bar{\mu}_2$	1.00	0.90	0.90	0.90
α	0.70	0.70	0.70	0.60
μ_1	0.544	0.628	0.586	0.600
μ_2	0.544	0.428	0.486	0.500
x_1	6.662	6.037	6.324	6.271
x_2	4.895	3.162	4.053	4.094
x_3	5.999	9.692	7.853	7.884

7 おわりに

本論文では，ファジィランダム変数係数にもつ多目的線形計画問題に対して，意思決定者の要求する問題の現実性の度合いを考慮に入れるために，係数のレベル集合に焦点をあて，満足水準最適化モデルに基づく意思決定モデルを提案した．また，M-α-パレート最適解を拡張した新たな解概念を提案し，さらにその解集合の中から意思決定者が対話を通じて自己の満足解導出するための対話型ファジィ満足化手法の提案を行った．本論文で提案したモデルは，各目的関数に対して設定されたファジィ目標に関して，その満足度がある水準以上で達成されている信頼度を重視する意思決定者にとって特に有用になると考えられる．また，対話過程において繰り返し解かれる問題が凸計画問題となるため，大域的最適解を得ることができることも利点の一つである．

他のモデルとしては，期待値最適化モデルや分散最小化モデルに基づくものも考えられるが，対話において繰り返し解くべき問題が非凸になることが予想され，本論文で提案したモデルの場合のように最適解を求めることは一般に困難となる．したがって，遺伝的アルゴリズムなどの近似解法に基づく求解手法を考える必要がある．また，対話アルゴリズムにおける対話の回数を減らすために，各メンバシップ関数値や許容レベルを１単位改悪した場合に，他の値がどれぐらい改善されるかというトレードオフ情報を意思決定者に与える手順を組み込んだアルゴリズムを構築することも今後の課題である．

参考文献

[1] G.B. Dantzig, Linear programming under uncertainty, Management Science, Vol. 1, pp. 197–206, 1955.

[2] E.M.L. Beale, On optimizing a convex function subject to linear inequalities, Journal of the Royal Statistical Society, Vol. 17, pp. 173–184, 1955.

[3] A. Charnes and W.W. Cooper, Deterministic equivalents for optimizing and satisficing under chance constraints, Operations Research, Vol. 11, pp. 18–39, 1963.

[4] S. Kataoka, A stochastic programming model, Econometrica, Vol. 31, pp. 181–196, 1963.

[5] A.M. Geoffrion, Stochastic programming with aspiration or fractile criteria, Management Science, Vol. 13, pp. 672–679, 1967.

[6] M. Sakawa, H. Yano and T. Yumine, An interactive fuzzy satisficing method for multiobjective linear-programming problems and its application, IEEE Transaction on Systems, Man, and Cybernetics, Vol. SMC-17, pp. 654–661.

[7] M. Sakawa, Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization, Plenum Press, New York, 1993.

[8] M. Sakawa and H. Yano, An interactive fuzzy satisficing method for generalized multiobjective linear programming problems with fuzzy parameters, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 35, pp. 125–142, 1990.

[9] M. Inuiguchi, and J. Ramik, Possibilistic linear programming: a brief review of fuzzy mathematical programming and a comparison with stochastic programming in portfolio selection problem, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 111, pp. 3–28, 2000.

[10] H. Kwakernaak, Fuzzy random variable-1, Information Sciences, Vol. 15, pp. 1–29, 1978.

[11] M.L. Puri and D.A. Ralescu, Fuzzy random variables, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 14, pp. 409–422, 1986.

[12] G.-Y. Wang and Z. Qiao, Linear programming with fuzzy random variable coefficients, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 57, pp. 295–311, 1993.

[13] M.K. Luhandjula and M.M. Gupta, On fuzzy stochastic optimization, Fuzzy Sets and Systems, vol. 81, pp. 47–55, 1996.

[14] H. Katagiri and H. Ishii, Chance constrained bottleneck spanning tree problem with fuzzy random edge costs, Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol. 43, pp. 128–137, 2000.

[15] H. Katagiri and H. Ishii, Linear programming problem with fuzzy random constraint, Mathematica Japonica, Vol. 52, pp. 123–129, 2000.

[16] 片桐英樹, 坂和正敏, 石井博昭，ファジーランダム変数係数を含む線形計画問題に対する可能性測度と必然性測度を用いた確率計画モデルに基づく意思決定，電子情報通信学会論文誌, Vol. J86-A, No. 6, pp. 655–662, 2003.

[17] 片桐英樹，坂和正敏，加藤浩介，ファジーランダム多目的線形0-1計画問題に対する可能性測度と必然性測度を用いた期待値最適化モデルに基づく対話型満足化手法，電子情報通信学会論文誌, Vol. J87-A, No. 5, pp. 626–633, 2004.

[18] 南石晃明，確率的計画法，現代数学社，1995.