数理解析研究所講究録 1410 巻 2005 年 9-29

Gelfand対の分類について
(On a classification of Gelfand pairs)

京都大学大学院理学研究科　菊地 克彦 (Katsuhiko Kikuchi)
Department of Mathematics, Faculty of Science, Kyoto University

§1. 序.

G を局所 compact unimodular 群, K を G の compact 部分群とする. このとき, 対 (G, K) が **Gelfand 対**であるとは, G 上の K-不変な可積分函数全体のなす Banach$*$-代数 $L^1(K\backslash G/K)$ が可換代数となることである. 今回は, G を連結 Lie 群, K を G の連結 compact 部分群となる場合について, Gelfand 対の分類の現在までの成果を報告する. 特に, G が compact Lie 群 K と連結, 単連結冪零 Lie 群 N の半直積 $G = K \ltimes N$ となる場合について, indecomposable という仮定の下で分類する.

まず, 対 (G, K) が Gelfand 対であるかの判定を, 構造が分かりやすい Gelfand 対の判定に帰着させる. これについて, Yakimova が有用な判定条件を与えた.

命題 1 ([Y1]). 対 (G, K) を, G/K が単連結で, K が G/K に効果的に作用するものとする. このとき, (G, K) が Gelfand 対であるためには, G が半直積群の構造 $G = L \ltimes N$ をもち, 以下の性質を満たすことが必要十分である;
(1) L は K を含む簡約 Lie 群,
(2) N は高々2-step の連結かつ単連結な冪零 Lie 群,
(3) $\mathfrak{n} = \mathrm{Lie}(N)$ を N の Lie 代数とするとき, 任意の $x \in \mathfrak{n}$ について $L \cdot x = K \cdot x$,
(4) 任意の $x \in \mathfrak{n}$ について, x における L, K の固定部分群をそれぞれ L_x, K_x とおくとき, (L_x, K_x) は Gelfand 対,
(5) $\mathfrak{l} = \mathrm{Lie}(L)$, $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K)$ をそれぞれ L, K の Lie 代数とし, $\mathfrak{m}$ を $\mathfrak{k}$ の $\mathfrak{l}$ における適当な K-不変実内積に関する直交補空間とするとき, 任意の $y \in \mathfrak{m}$ について $(K_y \ltimes N, K_y)$ は Gelfand 対.

定義 1. Gelfand 対 (G, K) が**簡約型**であるとは, G が簡約 Lie 群であることとし, **Heisenberg 型**であるとは, G が compact Lie 群 K と冪零 Lie 群 N の半直積で表されることとする.

簡約型 Gelfand 対の典型例は (非)compact Riemann 対称対であり, Heisenberg 型 Gelfand 対の典型例は compact Lie 群 K と vector 群 V の半直積 $K \ltimes V$ と K の対 $(K \ltimes V, K)$ である. 命題 1 は Gelfand 対の分類が簡約型および Heisenberg 型の Gelfand 対の分類に帰着されることを示している. Heisenberg 型 Gelfand 対の構造に関しては [BJLR][BJR1][BJR2] [C][HR][Kik1][Ko][KR][La1][La2] [Lep][N][V1] [V2][Y4][Y5] 等で調べられ, さまざまな例や反例が与えられている. 簡約型 Gelfand 対の分類は既に [Br][Kr][M][Y2] で完成している. 一般の Gelfand 対については [V1][Y1][Y3][Y5] で考察されている. また, G が compact 群と可解 Lie 群の半直積になる場合に [BJR1][Kik2] で必要十分条件と例が与えられている. 今回は, まず

Heisenberg 型および簡約型の Gelfand 対の分類を行い, さらに, それらを用いて一般の場合について Gelfand 対の構造を調べる. 以下では, Gelfand 対 (G, K) について, 次のことを仮定する.

(1) G/K は単連結,

(2) $Z(G)$ を G の中心とし, $F = K \cap Z(G)$ とするとき, F は有限であり, K/F は G/K に効果的に作用する.

このとき, 対 $(G/F, K/F)$ が命題 1 の仮定を満たす Gelfand 対になるが, K および L の N への作用を見易くするために必要に応じて適当な F を選んで Gelfand 対 (G, K) を実現することにする.

§2. Heisenberg 型 Gelfand 対.

この節では常に G は連結 compact 群 K と高々2-step の連結かつ単連結な冪零 Lie 群 N との半直積群 $G = K \ltimes N$ であるとする. Banach$*$-代数 $L^1(K\backslash K \ltimes N/K)$ は N 上の K-不変な可積分函数全体のなす Banach$*$-代数 $L^1_K(N)$ と自然に等長同型となる. 特に, N が可換のときは明らかに $L^1_K(N)$ は可換代数になり, $(K \ltimes N, K)$ は Gelfand 対になる. よって, N が 2-step のとき Gelfand 対を分類することが問題になる. 以下では N を 2-step と仮定する. なお, K が連結でないときは, K の単位元の連結成分を K_0 とするとき, $(K \ltimes N, K)$ が Gelfand 対であることと $(K_0 \ltimes N, K_0)$ が Gelfand 対であることが同値であることに注意する ([BJLR][BJR2]).

2.1. Heisenberg Lie 群の場合.

最も構造が分りやすい 2-step 冪零 Lie 群は Heisenberg Lie 群である. ここで, $(2n+1)$-次元 Heisenberg Lie 群 H_n を以下のように実現する. 集合としては $H_n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ とし, 積を次のように定義する.

$$(z, t) \cdot (z', t') := (z + z', t + t' - \frac{1}{2}\mathrm{Im}({}^t z \overline{z}')),$$

ただし, $z, z' \in \mathbb{C}^n$, $t, t' \in \mathbb{R}$. K は H_n に自己同型として作用する連結 compact Lie 群であるので, H_n の自己同型群 $\mathrm{Aut}(H_n)$ において適当な共役群をとることにより $\mathbb{C}^n$ 上の自然な内積に関する unitary 群 $\mathrm{U}(n)$ の部分群とみなすことができる. すると, K の H_n への作用は次のように表される.

$$k \cdot (z, t) := (kz, t),$$

ただし, $k \in K$, $z \in \mathbb{C}^n$, $t \in \mathbb{R}$. K について, その複素化 $K_{\mathbb{C}}$ を $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ の中に実現することができる. V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元 vector 空間とするとき, $P(V)$ を V 上のすべての正則多項式全体のなす環とする.

定義 2. 複素簡約代数群 G が $\mathbb{C}$ 上の有限次元 vector 空間 V に **multiplicity-free** に作用するとは, $P(V)$ を G-加群として既約分解したとき, 各既約成分が高々重複度 1 で現れることとする.

このとき, 以下のことが知られている.

命題 2 ([BJR1]). $(K \ltimes H_n)$ が Gelfand 対であるためには, K の複素化 $K_{\mathbb{C}}$ が $P(\mathbb{C}^n)$ に multiplicity-free に作用することが必要十分である.

multiplicity-free な作用の分類は, $K_{\mathbb{C}}$ の $\mathbb{C}^n$ への作用が既約のとき Kac により与えられ, 可約のときは Benson-Ratcliff および Leahy により独立に与えられた. なお, $K_{\mathbb{C}}$ が V に multiplicity-free に作用するとき, $K_{\mathbb{C}}$ は V の双対空間 V^* にも multiplicity-free に作用することに注意しておく.

V が既約のときは, 以下のように分類される ([Ka]).

(I) K の中心が 1 次元のとき. $\mathbb{T}$ は V に scalar 倍で作用するとする.

(1) $K = \mathbb{T} \times \mathrm{SU}(n)$, $V = \mathbb{C}^n$,

(2) $K = \mathbb{T} \times \mathrm{SU}(n)$, $V = S^2\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$,

(3) $K = \mathbb{T} \times \mathrm{SU}(n)$, $V = \Lambda^2\mathbb{C}^n$, $n \geq 3$,

(4) $K = \mathbb{T} \times \mathrm{SO}(n)$, $V = \mathbb{C}^n$, $n \geq 3$,

(5) $K = \mathbb{T} \times \mathrm{Sp}(n)$, $V = \mathbb{H}^n \simeq \mathbb{C}^{2n}$, $n \geq 2$,

(6) $K = \mathbb{T} \times \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(m)$, $V = \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$, $n \geq m \geq 2$,

(7) $K = \mathbb{T} \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{Sp}(n)$, $V = \mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}^n$, $n \geq 2$,

(8) $K = \mathbb{T} \times \mathrm{SU}(3) \times \mathrm{Sp}(n)$, $V = \mathbb{C}^3 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}^n$, $n \geq 2$,

(9) $K = \mathbb{T} \times \mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{SU}(n)$, $V = \mathbb{H}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n$, $n \geq 4$,

(10) $K = \mathbb{T} \times \mathrm{Spin}(7)$, $V = \mathbb{C}^8$,

(11) $K = \mathbb{T} \times \mathrm{Spin}(9)$, $V = \mathbb{C}^{16}$,

(12) $K = \mathbb{T} \times \mathrm{Spin}(10)$, $V = \mathbb{C}^{16}$,

(13) $K = \mathbb{T} \times E_6$, $V = \mathbb{C}^{27}$,

(14) $K = \mathbb{T} \times G_2$, $V = \mathbb{C}^7$,

ここで, E_6, G_2 は compact 例外単純 Lie 群を表す. また, $S^2\mathbb{C}^n$, $\Lambda^2\mathbb{C}^n$ はそれぞれ 2 次対称 tensor, 2 次交代 tensor 全体のなす $\mathbb{C}$ 上の vector 空間を表す. さらに, ここでは $\mathbb{H}^n$ を $\mathbb{C}$ 上の vector 空間とみなし, $\mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}^n$, $\mathbb{C}^3 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n$, $\mathbb{H}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n$ は $\mathbb{C}$ 上の vector 空間の tensor 積を表す.

(II) K の中心が 0 次元のとき,

(1) $K = \mathrm{SU}(n)$, $V = \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$,

(3) $K = \mathrm{SU}(2m+1)$, $V = \Lambda^2\mathbb{C}^{2m+1}$,

(5) $K = \mathrm{Sp}(n)$, $V = \mathbb{H}^n \simeq \mathbb{C}^{2n}$, $n \geq 2$,

(6) $K = \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(m)$, $V = \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$, $n > m \geq 2$,

(9) $K = \mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{SU}(n)$, $V = \mathbb{H}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n$, $n \geq 5$,

(12) $K = \mathrm{Spin}(10)$, $V = \mathbb{C}^{16}$.

(II) における番号は (I) に対応するように付けている. 特に, (1) は $n = 1$, (3) は n が偶数, (6) は $n = m$, (9) は $n = 4$ のとき $\mathbb{T}$ なしでは Gelfand 対にならないことに注意する.

可約なときの multiplicity-free な作用を分類する前に, indecomposable な加群を定義する.

定義 3. K を連結かつ単連結な compact 半単純 Lie 群とし, V を $\mathbb{C}$ (または $\mathbb{R}$) 上の K-加群とする. このとき, V が **decomposable** であるとは, $K = K_1 \times K_2$, $V = V_1 \oplus V_2$ と分解され, かつ $i \neq j$ のとき K_i は V_j に自明に作用する $(K_i, V_i) \neq (\{1\}, \{0\})$ なる 2 つの組 (K_1, V_1), (K_2, V_2) が存在することとし, decomposable でないとき **indecomposable** であるという. K が一般の連結 compact Lie 群のとき, $\mathbb{C}$ (または $\mathbb{R}$) 上の K-加群 V が **decomposable**, あるいは **indecomposable** であるとは, K の適当な被覆群 $\widetilde{K}$ で $\widetilde{K} = T \times K_s$, ただし T は torus, K_s は単連結 compact 半単純 Lie 群となるものをとったとき, V を K_s-加群とみなして decomposable, あるいは indecomposable であることとする.

明らかに既約 K-加群は indecomposable である. indecomposable で既約でない場合は以下で与えられる ([BR][Lea]). これらの例はすべて既約成分が 2 個であることに注意する.

(I) K の中心が 2 次元のとき. $\mathbb{T}^2$ は既約成分に scalar 倍として独立に作用するとする.

(1) $K = \mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(n)$, $V = \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$,

(1)' $K = \mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(n)$, $V = (\mathbb{C}^n)^* \oplus \mathbb{C}^n$, $n \geq 3$,

(2) $K = \mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(n)$, $V = \mathbb{C}^n \oplus \Lambda^2\mathbb{C}^n$, $n \geq 4$,

(2)' $K = \mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(n)$, $V = (\mathbb{C}^n)^* \oplus \Lambda^2\mathbb{C}^n$, $n \geq 5$,

(3) $K = \mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(m)$, $V = \mathbb{C}^n \oplus (\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m)$, $n, m \geq 2$,

(3)' $K = \mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(m)$, $V = (\mathbb{C}^n)^* \oplus (\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m)$, $n \geq 3$, $m \geq 2$,

(4) $K = \mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(m)$,
$V = (\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^2) \oplus (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^m)$, $n \geq m \geq 2$,

(5) $K = \mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{Sp}(m)$,
$V = (\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^2) \oplus (\mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}^m)$, $n, m \geq 2$,

(6) $K = \mathbb{T}^2 \times \mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{Sp}(m)$,
$V = (\mathbb{H}^n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2) \oplus (\mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}^m)$, $n, m \geq 2$,

(7) $K = \mathbb{T}^2 \times \mathrm{Sp}(n)$, $V = \mathbb{H}^n \oplus \mathbb{H}^n$, $n \geq 2$,

(8) $K = \mathbb{T}^2 \times \mathrm{Spin}(8)$, $V = \mathbb{C}^8 \oplus \mathbb{C}^8$,

(II) K の中心が 1 次元のとき. a, b を整数とし, $\mathbb{T}$ が $V = V_1 \oplus V_2$ に $t \mapsto (t^a, t^b)$ として作用するとする.

(1) $K = \mathbb{T} \times \mathrm{SU}(n)$, $V = \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$, $n \geq 3$, $a \neq b$,

(1)' $K = \mathbb{T} \times \mathrm{SU}(n)$, $V = (\mathbb{C}^n)^* \oplus \mathbb{C}^n$, $n \geq 3$, $a \neq -b$,

$(2)_e$ $K = \mathbb{T} \times \mathrm{SU}(2m)$, $V = \mathbb{C}^{2m} \oplus \Lambda^2\mathbb{C}^{2m}$, $m \geq 2$, $b \neq 0$,

$(2)_e'$ $K = \mathbb{T} \times \mathrm{SU}(2m)$, $V = (\mathbb{C}^{2m})^* \oplus \Lambda^2\mathbb{C}^{2m}$, $m \geq 3$, $b \neq 0$,

$(2)_o$ $K = \mathbb{T} \times \mathrm{SU}(2m+1)$, $V = \mathbb{C}^{2m+1} \oplus \Lambda^2\mathbb{C}^{2m+1}$, $m \geq 2$, $a \neq -mb$,

$(2)_o'$ $K = \mathbb{T} \times \mathrm{SU}(2m+1)$, $V = (\mathbb{C}^{2m+1})^* \oplus \Lambda^2\mathbb{C}^{2m+1}$, $m \geq 2$, $a \neq mb$,

(3) $K = \mathbb{T} \times \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(m)$, $V = \mathbb{C}^n \oplus (\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m)$,
$2 \leq n < m$, $a \neq 0$ または $m \geq 2$, $n \geq m+2$, $a \neq b$,

(3)' $K = \mathbb{T} \times \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(m)$, $V = (\mathbb{C}^n)^* \oplus (\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m)$,
$3 \leq n < m$, $a \neq 0$ または $m \geq 2$, $n \geq m+2$, $a \neq -b$,

(4) $K = \mathbb{T} \times \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(m)$, $V = (\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^2) \oplus (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^m)$,
$n \geq 3$, $n \geq m \geq 2$, $b \neq 0$,

(5) $K = \mathbb{T} \times \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{Sp}(m)$, $V = (\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^2) \oplus (\mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}^m)$,
$n \geq 3$, $m \geq 2$, $b \neq 0$,

(III) K の中心が 0 次元のとき.

(4) $K = \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(m)$, $V = (\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^2) \oplus (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^m)$,
$n > m \geq 3$.

(II), (III) における番号は (I) に対応して付けている. (II) において $(2)_e$, $(2)_o$ としているのは, それぞれ (I)(2) の n が偶数, 奇数になる場合に様相が異なるので区別している. また, 番号に' が付いているものについて, $\mathrm{SU}(n)$ の $(\mathbb{C}^n)^*$ への作用は, $\mathbb{C}^n$ への自然な作用の反傾表現を表す.

一般の multiplicity-free な作用は次のようにして構成される ([BR]).
(1) 有限個の indecomposable である multiplicity-free な作用の組 $\{((K_i)_{\mathbb{C}}, V_i)\}_{i=1}^r$ をとり, $K = \prod_{i=1}^r K_i$, $V = \bigoplus_{i=1}^r V_i$ とする. すると, $K_{\mathbb{C}}$ は V に multiplicity-free に作用する.
(2) $p_i : K \to K_i$ を自然な射影とする. 各 i について, K_i の中心の単位元の連結成分 $Z(K_i)_0$ は高々2 次の torus であり, $K_i' \subset K_i$ を K_i の半直積因子とすると $K_i = Z(K_i)_0 \times K_i'$ である. $T \subset \prod_{i=1}^r Z(K_i)_0$ を連結閉部分群とするとき, ある連結閉部分群 $T_i \subset T$ が存在し, $(p_i(T_i) \times K_i')_{\mathbb{C}}$ が V_i に multiplicity-free に作用し, 自

然な準同型 $\prod_{i=1}^r T_i \to T$ が局所同型になるとき, かつそのときに限り $T \times \prod_{i=1}^r K_i'$ は V に multiplicity-free に作用する.

このようにして, N が Heisenberg Lie 群 H_n のときの Gelfand 対 $(K \ltimes H_n, K)$ はすべて分類される.

2.2. reduced な場合.

ここからは N が一般の 2-step 冪零 Lie 群の場合を考える. $\widehat{N}$ を N の unitary 双対とし, N の既約 unitary 表現 $\pi \in \widehat{N}$ に対して $N_\pi := N/(\ker\pi)_0$ とする. ただし, $(\ker\pi)_0$ は K の表現としての核 $\ker\pi$ の単位元の連結成分を表す. π の次元 $\dim\pi$ は 1 または ∞ であるが, $\dim\pi = 1$ のとき $N_\pi \simeq \mathbb{R}$ であり, $\dim\pi = \infty$ のときは N_π はある Heisenberg Lie 群 H_n と同型になる. K は $\widehat{N}$ に自然に作用する. この作用に関する π における K の固定部分群を K_π で表すとすると, K_π は N_π に自己同型として作用する. これらを用いて, Heisenberg 型 Gelfand 対の分類において最も有効な方法である **localization** を与えることができる.

命題 3(Localization Lemma) ([BJR1][BJR2][Kik1][N]). 対 $(K \ltimes N, K)$ が Gelfand 対であるためには, 任意の $\pi \in \widehat{N}$ について $(K_\pi \ltimes N_\pi, K_\pi)$ が Gelfand 対になることが必要十分である.

$N_\pi \simeq \mathbb{R}$ のときは明らかに $(K_\pi \ltimes N_\pi, K_\pi)$ は Gelfand 対なので, N_π が Heisenberg Lie 群になるような π について, K_π の作用が multiplicity-free になるかを調べることにより $(K \ltimes N, K)$ が Gelfand 対になるかが判定できる. さらに, $\pi \in \widehat{N}$ としては $\widehat{N}$ において一般的な位置にあるものについて判定すれば十分である.

例 1. $\mathfrak{n} = \mathbb{C}^{2n+1} + (\Lambda^2\mathbb{C}^{2n+1} \oplus \mathbb{R})$ を 2step 冪零 Lie 代数とする. ただし, $\mathbb{C}^{2n+1}$ は行 vector 全体のなす $\mathbb{C}$ 上の vector 空間, $\Lambda^2\mathbb{C}^{2n+1}$ は $(2n+1)$ 次交代行列全体のなす $\mathbb{C}$ 上の vector 空間とみなし, 括弧積は $[z, w] = (z^t w - w^t z, -\mathrm{Im}({}^t z\overline{w}))$ とする. $N = \exp\mathfrak{n}$ を $\mathfrak{n}$ を Lie 代数にもつ連結かつ単連結な冪零 Lie 群とする. $\mathrm{SU}(2n+1)$ は $\mathbb{C}^{2n+1}$ に自然に作用し, $\mathbb{T}$ は $\mathbb{C}^{2n+1}$ に scalar 倍で作用する. ここで $K = \mathbb{T} \times \mathrm{SU}(2n+1)$ とすると, K は $\mathbb{C}^{2n+1}$ に $\mathbb{C}$ 上の線型写像として作用し, この作用から誘導して $\mathfrak{n}$, そして N に自己同型として作用する. このとき, $(K \ltimes N, K)$ が Gelfand 対であることを示す. 命題 3 より, N の既約 unitary 表現 π に対して $(K_\pi \ltimes N_\pi, K_\pi)$ が Gelfand 対であることを示せばよい. [Kir] より N の unitary 双対 $\widehat{N}$ は $\mathfrak{n}^*$ の余随伴軌道全体のなす空間 $\mathfrak{n}^*/N$ と 1 対 1 に対応する. さらに, $\mathfrak{n}$ 上に自然に K-不変な実内積を入れることにより, $\mathfrak{n}^*$ を $\mathfrak{n}$ と同一視することができる. よって, N に既約 unitary 表現は $\mathfrak{n}$ の元で表すことができる. 特に, N の無限次元既約 unitary 表現は $\Lambda^2\mathbb{C}^{2n+1} \oplus \mathbb{R}$ の元 (x, r) で表される. これを $\pi_{x,r}$ と書くことにする. さらに, $(x, r) \in \Lambda^2\mathbb{C}^{2n+1} \oplus \mathbb{R}$ としては K-軌道から 1 つずつ選べばよい. しかも, $\mathbb{R}$ には K が自明に作用するから, $x \in \Lambda^2\mathbb{C}^{2n+1}$ を K-軌道から 1 つ選べばよいことになる. $r \in \mathbb{R}$ は任意でよい. 最も一般的な位置にある $x \in \Lambda^2\mathbb{C}^{2n+1}$ は行列の直和として次のように表される.

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & -a_2 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} 0 & -a_n \\ a_n & 0 \end{pmatrix} \oplus (0),$$

ただし, $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0$ とする. すると, $N_{\pi_{x,r}} \simeq H_{2n+1}$ で, $K_{\pi_{x,r}}$ の単位元

の連結成分は $\mathrm{Sp}(1)^{\times n} \times \mathbb{T}$ と同型になる．よって，$(K_{\pi_{x,r}} \ltimes N_{\pi_{x,r}}, K_{\pi_{x,r}})$ は Gelfand 対になる．従って，$(K \ltimes N, K)$ は Gelfand 対である．

$\mathfrak{n} = \mathrm{Lie}(N)$ を N の Lie 代数とする．すると $\mathfrak{n}$ は $\mathbb{R}$ 上の K-加群である．よって，$\mathfrak{n}$ 上には K-不変な実内積が入る．$Z(\mathfrak{n})$, $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ をそれぞれ $\mathfrak{n}$ の中心，導来 ideal とする．すると，$Z(\mathfrak{n})$, $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ はともに $\mathfrak{n}$ の $\mathbb{R}$ 上の K-部分加群であり，$\mathfrak{n}$ が 2-step であるから $Z(\mathfrak{n}) \supset [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ となる．いま，$Z(\mathfrak{n})$ の $\mathfrak{n}$ における直交補空間を V, $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ の $Z(\mathfrak{n})$ における直交補空間を $\mathfrak{a}$ とおき，$W := V \oplus \mathfrak{a}$ とする．このとき，W は $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ の $\mathfrak{n}$ における直交補空間であり，$[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = [V, V] = [W, W]$ となる．よって，K の N への作用は W への作用で決まる．

定義 5. N が **reduced** であるとは，$Z(\mathfrak{n}) = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ となること，即ち $\mathfrak{a} = \{0\}$ ということとする．

定義 6. $(K \ltimes N, K)$ を Gelfand 対とし，$Z \subset N$ を N の中心 $Z(N)$ に含まれる K-不変な連結閉部分群とする．このとき，K は N/Z に自己同型として作用し，$(K \ltimes (N/Z), K)$ も Gelfand 対になる．このような Gelfand 対 $(K \ltimes (N/Z), K)$ を $(K \ltimes N, K)$ の **central reduction** と呼ぶ．Gelfand 対 $(K \ltimes N, K)$ が他の Gelfand 対の central reduction として得られないとき**極大**であるという．

W が既約のときは N は reduced であり，$W = V$ となる．W が既約な Gelfand 対は Vinberg により得られた．そのうち極大な Gelfand 対は以下の通りである．それ以外はこれらの central reduction で得られる ([V1][V2]).

(1) $K = \mathrm{SO}(n)$, $V = \mathbb{R}^n$, $[V, V] = \Lambda^2\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$,

(2) $K = \mathrm{Spin}(7)$, $V = \mathbb{R}^8$, $[V, V] = \mathbb{R}^7$,

(3) $K = G_2$, $V = \mathbb{R}^7$, $[V, V] = \mathbb{R}^7$,

(4) $K = \mathbb{T} \times \mathrm{SO}(n)$, $V = \mathbb{C}^n$, $[V, V] = \mathbb{R}$, $n \geq 3$,

(5) $K = \mathbb{T} \times \mathrm{SU}(n)$, $V = \mathbb{C}^n$, $[V, V] = \Lambda^2\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{R}$, $n \geq 2$,

(5)' $K = \mathrm{SU}(2m)$, $V = \mathbb{C}^{2m}$, $[V, V] = \Lambda^2\mathbb{C}^{2m} \oplus \mathbb{R}$,

(6) $K = \mathrm{SU}(2m+1)$, $V = \mathbb{C}^{2m+1}$, $[V, V] = \Lambda^2\mathbb{C}^{2m+1}$,

(7) $K = \mathrm{SU}(2m+1)$, $V = \mathbb{C}^{2m+1}$, $[V, V] = \mathbb{R}$,

(8) $K = \mathbb{T} \times \mathrm{SU}(n)$, $V = \mathbb{C}^n$, $[V, V] = H\Lambda^2\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$,

(9) $K = (\mathbb{T}\times)\mathrm{Sp}(n)$, $V = \mathbb{H}^n$, $[V, V] = HS_0^2(\mathbb{H}^n) \oplus \mathbb{H}_0$,

(10) $K = \mathbb{T} \times \mathrm{SU}(n)$, $V = S^2\mathbb{C}^n$, $[V, V] = \mathbb{R}$, $n \geq 2$

(11) $K = \mathbb{T} \times \mathrm{SU}(n)$, $V = \Lambda^2\mathbb{C}^n$, $[V, V] = \mathbb{R}$, $n \geq 3$,

(11)' $K = \mathrm{SU}(2m+1)$, $V = \Lambda^2\mathbb{C}^{2m+1}$, $[V, V] = \mathbb{R}$,

(12) $K = \mathbb{T} \times \mathrm{Spin}(7)$, $V = \mathbb{C}^8$, $[V, V] = \mathbb{R}^7 \oplus \mathbb{R}$,

(13) $K = \mathbb{T} \times \mathrm{Spin}(9)$, $V = \mathbb{C}^{16}$, $[V, V] = \mathbb{R}$,

(14) $K = (\mathbb{T}\times)\mathrm{Spin}(10)$, $V = \mathbb{C}^{16}$, $[V, V] = \mathbb{R}$,

(15) $K = \mathbb{T} \times E_6$, $V = \mathbb{C}^{27}$, $[V, V] = \mathbb{R}$,

(16) $K = \mathbb{T} \times G_2$, $V = \mathbb{C}^7$, $[V, V] = \mathbb{R}$,

(17) $K = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n)$, $V = \mathbb{H}^n$, $[V, V] = \mathbb{H}_0$, $n \geq 2$,

(18) $K = \mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{Sp}(n)$, $V = \mathbb{H}^2 \otimes_{\mathbb{H}} \mathbb{H}^n$, $[V, V] = H\Lambda^2\mathbb{H}^2$,

(19) $K = \mathbb{T} \times \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(m)$, $V = \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$, $[V, V] = \mathbb{R}$, $n \geq m \geq 3$,

(19)' $K = \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(m)$, $V = \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$, $[V, V] = \mathbb{R}$, $n > m \geq 3$,

(20) $K = \mathbb{T} \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(n)$, $V = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^n$, $[V, V] = H\Lambda^2\mathbb{C}^2$, $n \geq 2$,

(20)' $K = \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(n)$, $V = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^n$, $[V, V] = H\Lambda^2\mathbb{C}^2$, $n \geq 3$,

(21) $K = \mathbb{T} \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{Sp}(n)$, $V = \mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}^n$, $[V, V] = H\Lambda^2\mathbb{C}^2$, $n \geq 2$,

(22) $K = \mathbb{T} \times \mathrm{SU}(3) \times \mathrm{Sp}(n)$, $V = \mathbb{C}^3 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}^n$, $[V, V] = \mathbb{R}$, $n \geq 2$,

(23) $K = \mathbb{T} \times \mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{SU}(n)$, $V = \mathbb{H}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n$, $[V, V] = \mathbb{R}$, $n \geq 4$,

(23)' $K = \mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{SU}(n)$, $V = \mathbb{H}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n$, $[V, V] = \mathbb{R}$, $n \geq 5$,

ここで, $\mathbb{H}_0$ は $\mathbb{H}$ の虚部全体のなす $\mathbb{R}$ 上の vector 空間, $H\Lambda^2\mathbb{C}^n$, $H\Lambda^2\mathbb{H}^2$ はそれぞれ $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ の元を成分にもつ歪 Heirmte 行列全体のなす $\mathbb{R}$ 上の vector 空間, $HS_0^2\mathbb{H}^n$ は $\mathbb{H}$ の元を成分にもち, trace が 0 である Hermite 行列全体のなす $\mathbb{R}$ 上の vector 空間とする. なお, (5)', (11)', (19)', (20)', (23)' はそれぞれ (5), (11), (19), (20), (23) から $\mathbb{T}$ を除いたものであるが, (5) では n が奇数, (11) では n が偶数, (19) では $n = m$, (20) では $n = 2$, (23) では $n = 4$ のとき $\mathbb{T}$ なしでは Gelfand 対にならないことに注意する.

次に, N が reduced で $V(= W)$ が可約な場合を考える. $V = V_1 \oplus V_2$ と K-加群として分解されたとする. すると $[V_1, V_2] = \{0\}$ となる. $\mathfrak{n}$ は reduced なので, $[V_i, V_i] \neq \{0\}\,(i = 1, 2)$ となり, $\mathfrak{n}_i := V_i + [V_i, V_i]$ とおくと $\mathfrak{n}_i$ は K-不変な $\mathfrak{n}$ の部分 Lie 代数となる. $N_i := \exp \mathfrak{n}_i$ を $\mathfrak{n}_i$ に対応する N の解析部分群とする. すると, N_i は K-不変な N の部分群になり, $(K \ltimes N_i, K)$ も Gelfand 対になる. そこで, 新しい Gelfand 対を得るために, 以下のように新しい対 $(K \ltimes N, K)$ を構成する.

(1) 幾つかの Gelfand 対 $\{(K_i \ltimes N_i, K_i)\}$ から直積 $\widetilde{K} = \prod_i K_i$, $\widetilde{N} = \prod_i N_i$ を構成し, Gelfand 対 $(\widetilde{K} \ltimes \widetilde{N}, \widetilde{K})$ を得る.

(2) $\widetilde{K}$ の閉部分群 K をとる. さらに, 必要に応じて $\widetilde{N}$ の中心 $Z(\widetilde{N})$ に含まれる K-不変な閉部分群 $Z \subset Z(\widetilde{N})$ をとり, $N := \widetilde{N}/Z$ として対 $(K \ltimes N, K)$ が Gelfand 対であるかを判定する.

このように構成した対で重要なのは, K が $V = \oplus_i V_i$ に indecomposable に作用するときである. このようなとき, Gelfand 対 $(K \ltimes N, K)$ を **indecomposable** と呼ぶことにする.

定理 1. N が reduced, V が可約で indecomposable である極大な Gelfand 対は以下の 2 通りである.

(I) $V = V_1 \oplus V_2$ (K-加群としての既約分解), K の $P(V)$ への作用は multipricity-free, $\mathfrak{n} = (V_1 + \mathbb{R}) \oplus (V_2 + \mathbb{R})$, 即ち, N は 2 個の Heisenberg Lie 群の直積,

(II) 次のいずれか;

(1) $K = \mathrm{Sp}(1) \times \prod_{i=1}^r \mathrm{Sp}(n_i)$, $V = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{H}^{n_i}$, $[V,V] = (\mathbb{H}_0)^{\oplus r}$,

(2) $K = \mathrm{Spin}(3) \times \prod_{i=1}^r \mathrm{Sp}(n_i)$, $V = \mathbb{R}^3 \oplus \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{H}^{n_i}$, $[V,V] = \Delta(\mathbb{H}_0)$,

(3) $K = \prod_{i=1}^r \mathrm{Sp}(m_i) \times \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1) \times \prod_{j=1}^s \mathrm{Sp}(n_j)$,
$V = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{H}^{m_i} \oplus \mathbb{H} \bigoplus_{j=1}^s \mathbb{H}^{n_j}$, $[V,V] = \Delta_{12}(\mathbb{H}_0) \oplus \Delta_{23}(\mathbb{H}_0)$,

(4) $K = \mathbb{T} \times \mathrm{Sp}(m) \times \mathrm{Sp}(1) \times \prod_{i=1}^r \mathrm{Sp}(n_i)$, $V = (\mathbb{H}^m \oplus \mathbb{H}^m) \oplus \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{H}^{n_i}$,
$[V,V] = \mathbb{R} \oplus \Delta(\mathbb{H}_0)$,

(5) $K = \prod_{i=1}^r \mathrm{Sp}(l_i) \times \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(m) \times \mathrm{Sp}(1) \times \prod_{j=1}^s \mathrm{Sp}(n_j)$,
$V = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{H}^{l_i} \oplus (\mathbb{H}^m \oplus \mathbb{H}^m) \bigoplus_{j=1}^s \mathbb{H}^{n_j}$, $[V,V] = \Delta_{12}(\mathbb{H}_0) \oplus \Delta_{34}(\mathbb{H}_0)$,

(6) $K = \mathbb{T} \times \mathrm{SU}(m) \times \mathrm{Sp}(1) \times \prod_{i=1}^r \mathrm{Sp}(n_i)$, $V = (\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^2) \oplus \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{H}^{n_i}$,
$[V,V] = \mathbb{R} \oplus \Delta(\mathbb{H}_0)$,

(7) $K = \mathrm{SU}(m) \times \mathrm{Sp}(1) \times \prod_{i=1}^r \mathrm{Sp}(n_i)$, $V = (\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^2) \oplus \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{H}^{n_i}$,
$[V,V] = \mathbb{R} \oplus \Delta(\mathbb{H}_0)$, $m \geq 3$,

(8) $K = \mathbb{T} \times \mathrm{Sp}(m) \times \mathrm{Sp}(1) \times \prod_{i=1}^r \mathrm{Sp}(n_i)$, $V = (\mathbb{H}^m \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2) \oplus \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{H}^{n_i}$,
$[V,V] = \mathbb{R} \oplus \Delta(\mathbb{H}_0)$,

ここで, $\Delta(\mathbb{H}_0)$ は $\mathbb{H}_0^{\oplus r}$ に対角線状に含まれる部分 Sp(1)-加群を表す. (2) において, $\mathbb{R}$ 上の自然な SO(3)-加群 $\mathbb{R}^3$ およびその 2 次交代 tensor $\Lambda^2\mathbb{R}^3$ を被覆写像 $\mathrm{Sp}(1) \simeq \mathrm{Spin}(3) \to \mathrm{SO}(3)$ を通して Sp(1)-加群とみなす. (3) では, 1 つ目の Sp(1) は $\bigoplus_{i=1}^r \mathbb{H}^{m_i}$, $\mathbb{H}$ および $\Delta_{12}(\mathbb{H}_0)$ に, 2 つ目の Sp(1) は $\mathbb{H}$, $\bigoplus_{j=1}^s \mathbb{H}^{n_j}$ および $\Delta_{23}(\mathbb{H}_0)$ に作用する. (5) においては, 1 つ目の Sp(1) は V において $\bigoplus_{i=1}^r \mathbb{H}^{l_i}$ および 1 つ目の $\mathbb{H}^m$ に, 2 つ目の Sp(1) は 2 つ目の $\mathbb{H}^m$ および $\bigoplus_{j=1}^s \mathbb{H}^{n_j}$ に作用するものとする.

2.3. reduced でない場合.

続いて, N が reduced でない場合を考える. $W = V \oplus \mathfrak{a}, \mathfrak{n}_1 := V + [V,V]$ とすると, $\mathbb{R}$ 上の K-加群としての直和分解 $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{a}$ は Lie 代数としての直和分解にもなる. $N_1 = \exp \mathfrak{n}_1$, $A = \exp \mathfrak{a}$ をそれぞれ $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{a}$ に対応する N の解析部分群とすると, $N = N_1 \times A$ と直積分解される. このとき, $(K \ltimes N, K)$ が Gelfand 対であるためには, 任意の $a \in A \simeq \mathfrak{a}$ について, a における K の固定部分群を K_a で表すとき, $(K_a \ltimes N_1, K_a)$ が Gelfand 対になることが必要十分である. 特に, $(K \ltimes N, K)$ が Gelfand 対ならば, $(K \ltimes N_1, K)$ も Gelfand 対である.

定義7. L を簡約 Lie 群, $Z(L)$ を L の中心, $L_1,\dots,L_r$ を L の単純因子とし, $L=Z(L)\times L_1\times\cdots\times L_r$ と直積分解できるとする. また, K を L の compact 部分群, $Z(K)$ を K の中心, V を $\mathbb{R}$ 上の L-加群とし, $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_s$ を V の L-加群としての既約分解とする. このとき, V が **principal** であるとは, 以下の条件が成り立つことである;
(1) $Z(K)=Z(L)\times(Z(K)\cap L_1)\times\cdot\times(Z(K)\cap L_r)$,
(2) $Z(L)=(Z(L)\cap\mathrm{GL}(V_1))\times\cdots\times(Z(L)\cap\mathrm{GL}(V_s))$.

定義8. L,K,V を定義7と同じものとし, L の各単純成分 L_i で V に自明に作用するものすべての直積を P, 非自明に作用するものすべてと $Z(L)$ の直積を L^0 とおく. このとき, V が Sp(1)-**satureted** であるとは, 以下の条件を満たすことである;
(1) K の Sp(1)-単純因子は P または L^0 に含まれる.
(2) $p_i:L\to L_i$ を自然な射影とする. もし, ある i および一般の位置にある $x\in V$ で x における固定部分群 L_x の像 $p_i(L_x)$ が L_i と一致したら, $L_i\subset K$ である.
(3) $L^i:=Z(L)\times\prod_{k\neq i}L_k$ とする. もし, V の部分加群 V' で L_i が非自明に作用し, かつ L^i-加群として既約となるものが存在すれば, L_i は V' の補空間に自明に作用する.

Gelfand 対 $(K\ltimes N,K)$ は, V が principal, Sp(1)-saturated であるとき, それぞれ **principal**, Sp(1)-**saturated** と呼ぶ. Yakimova は indecomposable, principal, かつ Sp(1)-saturated である極大な Heisenberg 型 Gelfand 対を分類した ([Y4][Y5]). それらのうち reduced でなくて, K の中心が極大, 即ち K に $\mathbb{T}$ をそれ以上付け加えられらないものは以下の通りである.

(1) $K=\mathbb{T}\times\mathrm{SU}(n)$, $\mathfrak{n}=(\mathbb{C}^n+\mathbb{R})\oplus\mathfrak{su}(n)$,

(2) $K=\mathbb{T}\times\mathrm{SU}(4)$, $\mathfrak{n}=(\mathbb{C}^4+\mathbb{R})\oplus\mathbb{R}^6$,

(3) $K=\mathbb{T}\times\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(4)$, $\mathfrak{n}=((\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^4)+H\Lambda^2\mathbb{C}^2)\oplus\mathbb{R}^6$,

(4) $K=\mathbb{T}\times\mathrm{SU}(4)\times\mathrm{SU}(n)$, $\mathfrak{n}=((\mathbb{C}^4\otimes\mathbb{C}^n)+\mathbb{R})\oplus\mathbb{R}^6$,

(5) $K=\mathrm{Sp}(n)\times K'\times\mathrm{Sp}(m)$, $K'=\mathrm{Sp}(1),\mathbb{T}$, $\mathfrak{n}=(\mathbb{H}^n+\mathbb{H}_0)\oplus(\mathbb{H}^n\otimes_{\mathbb{H}}\mathbb{H}^m)$,

(6) $K=\mathrm{Sp}(n)\times K'$, $K'=\mathrm{Sp}(1),\mathbb{T}$, $\mathfrak{n}=(\mathbb{H}^n+\mathbb{H}_0)\oplus HS_0^2\mathbb{H}^n$,

(7) $K=\mathbb{T}\times\mathrm{Spin}(7)$, $\mathfrak{n}=(\mathbb{R}^8+\mathbb{R}^7)\oplus(\mathbb{R}^7\otimes\mathbb{R}^2)$,

(8) $K=\mathbb{T}\times\mathrm{Spin}(7)$, $\mathfrak{n}=(\mathbb{C}^8+\mathbb{R})\oplus\mathbb{R}^7$,

(9) $K=\mathbb{T}\times\mathrm{Spin}(7)$, $\mathfrak{n}=(\mathbb{C}^7+\mathbb{R})\oplus\mathbb{R}^8$,

(10) $K=\mathbb{T}\times\mathrm{Spin}(10)$, $\mathfrak{n}=(\mathbb{C}^{16}+\mathbb{R})\oplus\mathbb{R}^{10}$,

(11) $K=\mathbb{T}\times\mathrm{SU}(n)\times\mathrm{SU}(2)$, $\mathfrak{n}=((\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^2)+\mathbb{R})\oplus\mathfrak{su}(2)$, $n\geq 2$,

(12) $K=\mathbb{T}\times\mathrm{Sp}(n)\times\mathrm{SU}(2)$, $\mathfrak{n}=((\mathbb{H}^n\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^2)+\mathbb{R})\oplus\mathfrak{su}(2)$, $n\geq 2$

(13) $K = \mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(4)$, $\mathfrak{n} = ((\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^2) + \mathbb{R}) \oplus ((\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^4) + \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^6$,

(14) $K = \mathbb{T}^2 \times \mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(4)$, $\mathfrak{n} = ((\mathbb{H}^n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2) + \mathbb{R}) \oplus ((\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^4) + \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^6$, $n \geq 2$,

(15) $K = \mathbb{T} \times \mathrm{SU}(4) \times \mathrm{SU}(2)$, $\mathfrak{n} = \mathbb{R}^6 \oplus ((\mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^2) + \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{su}(2)$,

(16) $K = \mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(4) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(4)$,
$\mathfrak{n} = \mathbb{R}^6 \oplus ((\mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^2) + \mathbb{R}) \oplus ((\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^4) + \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^6$,

(17) $K = \mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(4)$, $\mathfrak{n} = (\mathbb{C}^4 + \mathbb{R}) \oplus (\mathbb{C}^4 + \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^6$,

(18) $K = \mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(4)$, $\mathfrak{n} = (\mathbb{C}^4 + \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^6 \otimes \mathbb{R}^2$,

ただし,$\mathbb{H}^n \otimes_{\mathbb{H}} \mathbb{H}^m$ は $\mathbb{H}^n$, $\mathbb{H}^m$ をそれぞれ斜体 $\mathbb{H}$ 上の右加群, 左加群とみなしたときの tensor 積である $\mathbb{R}$ 上の vector 空間である. また,$\mathrm{SU}(4) \simeq \mathrm{Spin}(6)$ により, $\mathrm{SU}(4)$ は $\mathbb{R}^6$ に作用する. なお,(5),(6) では $K' = \{1\}$ でも Gelfand 対になる. (7) は $\mathbb{T}$ がなくても Gelfand 対である. さらに,(4) では $n \geq 5$, (11) では $n \geq 3$ のとき, $\mathbb{T}$ がなくても Gelfand 対になる. (13) では,$n \geq 3$ のとき,$\mathbb{T}$ の第 2 成分への作用が自明でなければ Gelfand 対になる.

Sp(1)-saturated でない Gelfand 対を分類するには, K の被覆群 $\widetilde{K}$ が $\mathrm{Sp}(1)$ を単純因子にもち, その Sp(1)-因子が V, $\mathfrak{a} \simeq A$ いずれにも非自明に作用する状況を考える必要がある. まず, 簡単のために Gelfand 対 $(K \ltimes N, K)$ について V, $\mathfrak{a}$ ともに既約であるとする. 必要に応じて K をその中心拡大と取り替えることにより, K の閉部分群 K_1', K_2' が存在し, K_1' は $\mathfrak{a}$ に,K_2' は V にそれぞれ自明に作用し, $K = K_1' \times \mathrm{Sp}(1) \times K_2'$, と直積分解される. $K_1 := K_1' \times \mathrm{Sp}(1)$, $K_2 := \mathrm{Sp}(1) \times K_2'$ とおく. このとき,$(K_1 \times N_1, K_1)$ も Gelfand 対になる. 逆に,reduced な Gelfand 対 $(K_1 \ltimes N_1, K_1)$ に対して, A, K_2' をとり, 任意の $a \in A$ について K_a を求めて, $(K_a \ltimes N_1, K_a)$ が Gelfand 対になれば $(K \ltimes N, K)$ も Gelfand 対になる. K_1' は A に自明に作用するから, $K_a = K_1' \times (K_2)_a$ である. $p_2 : K_2 \to \mathrm{Sp}(1)$ を自然な射影とする. K_2' は V に自明に作用するので, $((K_1' \times p_2((K_2)_a)) \ltimes N_1, K_1' \times p_2((K_2)_a))$ が Gelfand 対になるかが問題になる. そこで,$a \in A$ が一般の位置にあるときの $p_2((K_2)_a)$ の単位元の連結成分がどのようになるかにより K_2, A を分類する.

(I) $p_2((K_2)_a)_0 = \mathrm{Sp}(1)$ のとき.

- $K_2 = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n)$, $A = \mathbb{H}^n$.

(II) $p_2((K_2)_a)_0 = \mathbb{T}$ のとき.

- $K_2 = \mathrm{SO}(3)$, $A = \mathbb{R}^3$,
- $K_2 = \mathrm{SU}(2) \times (\mathbb{T}\times)\mathrm{SU}(n)$, $A = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^n$,
- $K_2 = \mathrm{SU}(2) \times (\mathbb{T}\times)\mathrm{Sp}(n)$, $A = \mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}^n$.

(III) $p_2((K_2)_a)_0 = \{1\}$ のとき. それ以外の (K_2, A).

これらに対し,reduced な Gelfand 対 $(K_1 \ltimes N_1, K_1)$ について, $\mathrm{Sp}(1)$ を $\mathbb{T}$, $\{1\}$ に取り替えたときに Gelfand 対になるかを分類することにより, K_1, K_2 の組が決まる. K_1 および N_1 は以下のように分類される.

(1) $(K_1' \ltimes N_1, K_1')$ が Gelfand 対.

- $K_1 = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n)$, $\mathfrak{n}_1 = \mathbb{H}^n + \mathbb{H}_0$,

(2) $((\mathbb{T} \times K_1') \ltimes N_1, \mathbb{T} \times K_1')$ が Gelfand 対だが, $(K_1' \ltimes N_1, K_1')$ は Gelfand 対ではない.

- $K_1 = \mathbb{T} \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(n)$, $\mathfrak{n}_1 = (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^n) + \mathbb{R}$,
- $K_1 = \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(n)$, $\mathfrak{n}_1 = (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^n) + \mathbb{R}$, $n \geq 3$,
- $K_1 = \mathbb{T} \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{Sp}(n)$, $\mathfrak{n}_1 = (\mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}^n) + \mathbb{R}$, $n \geq 2$.

(3) $((\mathbb{T} \times K_1') \ltimes N_1, \mathbb{T} \times K_1')$ が Gelfand 対ではない. それ以外の (K_1, N_1).

(1) のときはすべての組 (K_2, A) について, (2) のときは (I),(II) なる組 (K_2, A), (3) のときは $(K_2, A) = (\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n), \mathbb{H}^n)$ のみ $(K \ltimes N, K)$ が Gelfand 対になる.

V を可約とするとき, $V = V_1 \oplus V_2$ とし, $i = 1,2$ について, $\mathfrak{n}_i = V_i + [V_i, V_i]$ を V_i の生成する $\mathfrak{n}$ の部分 Lie 代数, $N_i = \exp \mathfrak{n}_i$ を $\mathfrak{n}_i$ に対応する N の解析部分群とすると, $(K \ltimes (N_i \times A), K)$ も Gelfand 対になる. このことと定理 1 を組み合わせると, V が可約で indecomposable のとき, 次の Gelfand 対およびその central reduction だけが (1) の場合となり, 他はすべて (3) の場合となる.

- $K = \mathrm{Sp}(1) \times \prod_{i=1}^r \mathrm{Sp}(n_i)$, $V = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{H}^{n_i}$, $[V, V] = (\mathbb{H}_0)^{\oplus r}$.

$\mathfrak{a}$ が可約のときを考える. まず, $\mathfrak{a}$ が indecomposable で K_2 の Sp(1)-単純因子がただ 1 つ作用するとき, 上の (I) を満たすものは以下のものである.

- $K_2 = \mathrm{Sp}(1) \times \prod_{i=1}^r \mathrm{Sp}(l_i) \times \prod_{j=1}^s \mathrm{Sp}(m_j) \times \prod_{k=1}^t (\mathrm{Sp}(n_k) \times \mathrm{Sp}(n_k'))$,
  $\mathfrak{a} = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{H}^{l_i} \oplus \bigoplus_{j=1}^s (\mathbb{H}^{m_j} \oplus HS_0^2 \mathbb{H}^{m_j}) \oplus \bigoplus_{k=1}^t (\mathbb{H}^{n_k} \oplus (\mathbb{H}^{n_k} \otimes_{\mathbb{H}} \mathbb{H}^{n_k'}))$,

ただし, $l_i, m_j, n_k, n_k' > 1$. (II) を満たすものは以下のものである.

- $K_2 = \mathrm{SU}(2) \times (\mathbb{T}\times)\mathrm{SU}(4)$, $\mathfrak{a} = (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^4) \oplus \mathbb{R}^6$.

他はすべて (III) を満たす.

V, $\mathfrak{a}$ ともに indecomposable な成分が 1 つずつのときは, (I), (II), (III) と (1), (2), (3) の組み合わせは既約のときと同じである. ただし, (3) なる組 $(K_2, \mathfrak{a})$ は複数組み合わさることを許す. V に非自明に作用する K_2 の Sp(1)-単純因子が 2 個以上あるものを構成するために, 以下の組 $(K_2, \mathfrak{a})$ を考える.

- $K_2 = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1)$, $\mathfrak{a} = \mathbb{H}$,
- $K_2 = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{Sp}(1)$, $\mathfrak{a} = \mathbb{H}^n \oplus \mathbb{H}^n$.

これらに現れる Sp(1)-単純因子を indecomposable につないでいくと樹木ができる. これらの先端に上の (1), (2), (3) を満たす V の indecomposable な因子や (I), (II), (III) を満たす $\mathfrak{a}$ の indecomposable な因子がつながるが, それが Gelfand 対となるのは以下のときである.

- (3) が 1 個で他が (I),

- (2) が 1 個, (II) が高々 1 個で他が (1) または (I),
- V の因子はすべて (1) で $\mathfrak{a}$ の因子は任意.

$W = V \oplus \mathfrak{a}$ に reduced でない Sp(1)-saturated な因子 W_i があるときは, 組 $(K_1, W_i + [W_i, W_i])$ を V が indecomposable な場合に準じて分類すれば同様の方法で Gelfand 対が分類できる. W_i が indecomposable で Sp(1)-saturated なもののうち (1) を満たすのは分類における (5), (6) の場合であり, (2) を満たすのは分類における (4) において $n = 2$ となるときのみである. 他で Sp(1)-単純因子を持つものはすべて (3) を満たす.

§3. 簡約型 Gelfand 対.

G が簡約 Lie 群である Gelfand 対で最も基本的なものは 半単純 Riemann 対称対 (G, K) である. これは, 半単純 Lie 群 G と G の compact 部分群 K で, 等質空間 G/K が Riemann 対称空間となるものである. 既約な半単純 Riemann 対称対の分類はよく知られている. そこで, G をより一般の簡約 Lie 群とし, G/K が Riemann 対称空間にならないような Gelfand 対 (G, K) を分類することをこの節の目的とする.

定義 9. G を複素簡約代数群, H を G の部分代数群とする. このとき, 対 (G, H) が **spherical** であるとは, G の Borel 部分群 B について G/H 内に稠密な B-軌道をもつことである.

簡約型 Gelfand 対と spherical な対には次のような関係がある.

命題 4 ([AV]). G を簡約 Lie 群, K を G の compact 部分群とし, $G_{\mathbb{C}}$, $K_{\mathbb{C}}$ をそれぞれ G, K の複素化とする. このとき, (G, K) が Gelfand 対であるためには, $(G_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}})$ が spherical であることが必要十分である.

spherical な対の分類は, G が単純 Lie 群のとき Krämer により, G が半単純で G/K への作用が principal のとき Mikityuk と Brion により分類された.

G が compact 単純 Lie 群で G/K が Riemann 対称空間でない Gelfand 対 (G, K) は以下で与えられる ([Kr]).

(1) $G = \mathrm{SU}(m+n)$, $K = \mathrm{SU}(m) \times \mathrm{SU}(n)$, $1 \leq m < n$,

(2) $G = \mathrm{SU}(2n+1)$, $K = \mathbb{T} \cdot \mathrm{Sp}(n)$, $n \geq 2$,

(3) $G = \mathrm{SU}(2n+1)$, $K = \mathrm{Sp}(n)$, $n \geq 2$,

(4) $G = \mathrm{Sp}(n+1)$, $K = \mathbb{T} \times \mathrm{Sp}(n)$, $n \geq 2$,

(5) $G = \mathrm{SO}(2n+1)$, $K = \mathrm{U}(n)$, $n \geq 2$,

(6) $G = \mathrm{SO}(4n+2)$, $K = \mathrm{SU}(2n+1)$, $n \geq 2$,

(7) $G = \mathrm{SO}(10)$, $K = \mathrm{Spin}(7) \times \mathrm{SO}(2)$,

(8) $G = \mathrm{SO}(9)$, $K = \mathrm{Spin}(7)$,

(9) $G = \mathrm{SO}(8)$, $K = G_2$,

(10) $G = \mathrm{SO}(7)$, $K = G_2$,

(11) $G = E_6$, $K = \mathrm{Spin}(10)$,

(12) $G = G_2$, $K = \mathrm{SU}(3)$.

G が非 compact 単純 Lie 群のときは次のようになる ([Y2] 参照).

(1) $G = \mathrm{SU}(m,n)$, $K = \mathrm{SU}(m) \times \mathrm{SU}(n)$, $1 \leq m < n$,

(2) $G = \mathrm{SU}(2n,1)$, $K = \mathbb{T} \cdot \mathrm{Sp}(n)$, $n \geq 2$,

(3) $G = \mathrm{SU}(2n,1)$, $K = \mathrm{Sp}(n)$, $n \geq 2$,

(4) $G = \mathrm{Sp}(n,1)$, $K = \mathbb{T} \times \mathrm{Sp}(n)$, $n \geq 2$,

(5) $G = \mathrm{SO}_0(2n,1)$, $K = \mathrm{U}(n)$, $n \geq 2$,

(6) $G = \mathrm{SO}^*(4n+2)$, $K = \mathrm{SU}(2n+1)$, $n \geq 2$,

(7) $G = \mathrm{SO}_0(8,2)$, $K = \mathrm{Spin}(7) \times \mathrm{SO}(2)$,

(8) $G = \mathrm{SO}_0(8,1)$, $K = \mathrm{Spin}(7)$,

(9) $G = \mathrm{SO}_0(7,1)$, $K = G_2$,

(11) $G = E_{6(-14)}$, $K = \mathrm{Spin}(10)$.

番号は compact 単純 Lie 群に合わせている. (10), (12) に対応する Gelfand 対は存在しない.

G が半単純で単純ではないとき, G/K が対称空間でない indecomposable な Gelfand 対 (G,K) は次のように分類される.

(1) $G_{\mathbb{C}} = \mathrm{SO}(n,\mathbb{C}) \times \mathrm{SO}(n+1,\mathbb{C})$, $K_{\mathbb{C}} = \mathrm{SO}(n,\mathbb{C})$, $n \geq 5$, $g \mapsto (g, g \oplus 1)$,

(1-1) $G = \mathrm{SO}(n) \times \mathrm{SO}(n+1)$, $K = \mathrm{SO}(n)$, $n \geq 5$,

(1-2) $G = \mathrm{SO}(n) \times \mathrm{SO}_0(n,1)$, $K = \mathrm{SO}(n)$, $n \geq 5$,

(2) $G_{\mathbb{C}} = \mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(n+1,\mathbb{C})$, $K_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^\times \cdot \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, $n \geq 2$,
$(z,g) \mapsto (g, zg \oplus z^{-n})$,

(2-1) $G = \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(n+1)$, $K = \mathbb{T} \cdot \mathrm{SU}(n)$, $n \geq 2$,

(2-2) $G = \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(n,1)$, $K = \mathbb{T} \cdot \mathrm{SU}(n)$, $n \geq 2$,

(3) $G_{\mathbb{C}} = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(n+2,\mathbb{C})$, $K_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^\times \cdot (\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(n,\mathbb{C}))$,
$(z, g_1, g_2) \mapsto (g_1, z^n g_1 \oplus z^{-2} g_2)$,

(3-1) $G = \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(n+2)$, $K = \mathbb{T} \cdot (\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(n))$,

(3-2) $G = \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2,n)$, $K = \mathbb{T} \cdot (\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(n))$,

(4) $G_{\mathbb{C}} = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(m+1,\mathbb{C})$, $K_{\mathbb{C}} = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(m,\mathbb{C})$,
$(g_1, g_2) \mapsto (g_1, g_1 \oplus g_2)$,

(4-1) $G = \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{Sp}(m+1)$, $K = \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{Sp}(m)$,

(4-2) $G = \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{Sp}(1,m)$, $K = \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{Sp}(m)$

(5) $G_{\mathbb{C}} = \mathrm{Sp}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(n+2,\mathbb{C})$, $K_{\mathbb{C}} = \mathrm{Sp}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$,
$(g_1, g_2) \mapsto (g_1, g_1 \oplus g_2)$,

(5-1) $G = \mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{Sp}(n+2)$, $K = \mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{Sp}(n)$,

(5-2) $G = \mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{Sp}(2,n)$, $K = \mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{Sp}(n)$,

(6) $G_{\mathbb{C}} = \mathrm{SL}(n+2,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(m+1,\mathbb{C})$, $K_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^{\times} \cdot (\mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(m,\mathbb{C}))$,
$(z, g_1, g_2, g_3) \mapsto (z^2 g_1 \oplus z^{-n} g_2, g_2 \oplus g_3)$,

(6-1) $G = \mathrm{SU}(n+2) \times \mathrm{Sp}(m+1)$, $K = \mathbb{T} \cdot (\mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{Sp}(m))$,

(6-2) $G = \mathrm{SU}(n+2) \times \mathrm{Sp}(1,m)$, $K = \mathbb{T} \cdot (\mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{Sp}(m))$,

(6-3) $G = \mathrm{SU}(n,2) \times \mathrm{Sp}(m+1)$, $K = \mathbb{T} \cdot (\mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{Sp}(m))$,

(6-4) $G = \mathrm{SU}(n,2) \times \mathrm{Sp}(1,m)$, $K = \mathbb{T} \cdot (\mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{Sp}(m))$,

(7) $G_{\mathbb{C}} = \mathrm{Sp}(n+1,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(m+1,\mathbb{C})$, $K_{\mathbb{C}} = \mathrm{Sp}(n,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(1,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(m,\mathbb{C})$,
$(g_1, g_2, g_3) \mapsto (g_1 \oplus g_2, g_2 \oplus g_3)$,

(7-1) $G = \mathrm{Sp}(n+1) \times \mathrm{Sp}(m+1)$, $K = \mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(m)$, $n \geq m$,

(7-2) $G = \mathrm{Sp}(n+1) \times \mathrm{Sp}(1,m)$, $K = \mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(m)$, $n \geq 1$, $m \geq 1$,

(7-3) $G = \mathrm{Sp}(n,1) \times \mathrm{Sp}(1,m)$, $K = \mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(m)$, $n \geq m$,

(8) $G_{\mathbb{C}} = \mathrm{Sp}(1,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(1,\mathbb{C})$, $K_{\mathbb{C}} = \mathrm{Sp}(1,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(1,\mathbb{C})$,
$(g_1, g_2) \mapsto (g_1, g_1 \oplus g_2, g_2)$,

(8-1) $G = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{Sp}(1)$, $K = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1)$,

(8-2) $G = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1,1) \times \mathrm{Sp}(1)$, $K = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1)$,

(9) $G_{\mathbb{C}} = \mathrm{Sp}(1,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(m+1,\mathbb{C})$,
$K_{\mathbb{C}} = \mathrm{Sp}(1,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(1,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(m,\mathbb{C})$,
$(g_1, g_2, g_3) \mapsto (g_1, g_1 \oplus g_2, g_2 \oplus g_3)$,

(9-1) $G = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{Sp}(m+1)$, $K = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(m)$,

(9-2) $G = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1,1) \times \mathrm{Sp}(m+1)$, $K = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(m)$,

(9-3) $G = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{Sp}(1,m)$, $K = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(m)$,

(9-4) $G = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1,1) \times \mathrm{Sp}(1,m)$, $K = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(m)$,

(10) $G_{\mathbb{C}} = \mathrm{Sp}(n+1,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(m+1,\mathbb{C})$,
$K_{\mathbb{C}} = \mathrm{Sp}(n,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(1,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(1,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(m,\mathbb{C})$,
$(g_1, g_2, g_3, g_4) \mapsto (g_1 \oplus g_2, g_2 \oplus g_3, g_3 \oplus g_4)$,

(10-1) $G = \mathrm{Sp}(n+1) \times \mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{Sp}(m+1)$,
$K = \mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(m)$, $n \geq m$,

(10-2) $G = \mathrm{Sp}(n+1) \times \mathrm{Sp}(1,1) \times \mathrm{Sp}(m+1)$,
$K = \mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(m)$, $n \geq m$,

(10-3) $G = \mathrm{Sp}(n+1) \times \mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{Sp}(1,m)$,
$K = \mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(m)$, $n \geq 1$, $m \geq 1$,

(10-4) $G = \mathrm{Sp}(n+1) \times \mathrm{Sp}(1,1) \times \mathrm{Sp}(1,m)$,
$K = \mathrm{Sp}(n+1) \times \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(m)$, $n \geq 1$, $m \geq 1$,

(10-5) $G = \mathrm{Sp}(n,1) \times \mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{Sp}(1,m)$,
$K = \mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(m)$, $n \geq m$,

(10-6) $G = \mathrm{Sp}(n,1) \times \mathrm{Sp}(1,1) \times \mathrm{Sp}(1,m)$,
$K = \mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(m)$, $n \geq m$,

(11) $G_{\mathbb{C}} = \mathrm{Sp}(1,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(1,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(1,\mathbb{C})$, $K_{\mathbb{C}} = \mathrm{Sp}(1,\mathbb{C})$, $g \mapsto (g, g, g)$,

(11-1) $G = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1)$, $K = \mathrm{Sp}(1)$,

(11-2) $G = \mathrm{Sp}(1,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(1)$, $K = \mathrm{Sp}(1)$,

(12) $G_{\mathbb{C}} = \mathrm{Sp}(1,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(1,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(l+1,\mathbb{C})$, $K_{\mathbb{C}} = \mathrm{Sp}(1,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(l,\mathbb{C})$,
$(g_1, g_2) \mapsto (g_1, g_1, g_1 \oplus g_2)$,

(12-1) $G = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(l+1)$, $K = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(l)$,

(12-2) $G = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1,l)$, $K = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(m)$,

(12-3) $G = \mathrm{Sp}(1,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(l+1)$, $K = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(l)$,

(12-4) $G = \mathrm{Sp}(1,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(1,l)$, $K = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(l)$,

(13) $G_{\mathbb{C}} = \mathrm{Sp}(1,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(m+1,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(l+1,\mathbb{C})$,
$K_{\mathbb{C}} = \mathrm{Sp}(1,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(m,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(l,\mathbb{C})$,
$(g_1, g_2, g_3) \mapsto (g_1, g_1 \oplus g_2, g_1 \oplus g_3)$,

(13-1) $G = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(m+1) \times \mathrm{Sp}(l+1)$,
$K = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(m) \times \mathrm{Sp}(l)$, $m \geq l$,

(13-2) $G = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(m+1) \times \mathrm{Sp}(1,l)$,
$K = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(m) \times \mathrm{Sp}(l)$, $m \geq 1$, $l \geq 1$,

(13-3) $G = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1,m) \times \mathrm{Sp}(1,l)$,
$K = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(m) \times \mathrm{Sp}(l)$, $m \geq l$,

(14) $G_{\mathbb{C}} = \mathrm{Sp}(n+1,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(m+1,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(l+1,\mathbb{C})$,
$K_{\mathbb{C}} = \mathrm{Sp}(1,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(n,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(m,\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}(l,\mathbb{C})$,
$(g_1, g_2, g_3, g_4) \mapsto (g_1 \oplus g_2, g_1 \oplus g_3, g_1 \oplus g_4)$,

(14-1) $G = \mathrm{Sp}(n+1) \times \mathrm{Sp}(m+1) \times \mathrm{Sp}(l+1)$,
$K = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{Sp}(m) \times \mathrm{Sp}(l)$, $n \geq m \geq l$,

(14-2) $G = \mathrm{Sp}(n+1) \times \mathrm{Sp}(m+1) \times \mathrm{Sp}(1,l)$,
$K = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{Sp}(m) \times \mathrm{Sp}(l)$, $n \geq m \geq 1$, $l \geq 1$,

(14-3) $G = \mathrm{Sp}(n+1) \times \mathrm{Sp}(1,m) \times \mathrm{Sp}(1,l)$,
$K = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{Sp}(m) \times \mathrm{Sp}(l)$, $n \geq 1$, $m \geq l \geq 1$,

(14-4) $G = \mathrm{Sp}(1,n) \times \mathrm{Sp}(1,m) \times \mathrm{Sp}(1,l)$,
$K = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{Sp}(m) \times \mathrm{Sp}(l)$. $n \geq m \geq l$,

ここで, 番号 (1)– (14) は [Br][M] で分類された単純でない複素半単純群 $G_{\mathbb{C}}$ とその部分群 $K_{\mathbb{C}}$ の対とその埋め込み方を表し, (*-1), ... は対応する実形を表している. 特に (*-1) のみが G が compact Lie 群となるものである. また, (3), (6) は $n \geq 3$ のとき, $\mathbb{C}^{\times}$, $\mathbb{T}$ はなくてもよい. ここで与えられた Gelfand 対はすべて principal であることに注意する.

decomposable な簡約型 Gelfand 対は以下のようにして構成される.

(1) indecomposable な簡約型 Gelfand 対 $\{G_i, K_i\}_{i=1}^r$ および torusT_0 をとり, $\widetilde{G} = T_0 \times \prod_{i=1}^r G_i$, $\widetilde{K} = T_0 \times \prod_{i=1}^r K_i$ とする. すると, $(\widetilde{G}, \widetilde{K})$ は簡約型 Gelfand 対である.

(2) $1 \leq i \leq r$ なる i について K_i の中心の単位元の連結成分を T_i, 半単純因子を K_i' とする. 必要があれば並べ替えることにより, T_i が 1 次元で, (G_i, K_i') は Gelfand 対にならないものたちがちょうど $1 \leq i \leq t$ に現れるとしてよい. $T = T_0 \times \prod_{i=1}^r T_i$ とし, $p_i : T \to T_i\,(0 \leq i \leq r)$ を自然な射影とする. さらに, $S \subset \{1, 2, \ldots, r\}$ について $p_S : T \to \prod_{i \in S} T_i$ を自然な射影とする. いま $T' \subset T$ を連結閉部分群とする. このとき, $(\widetilde{G}, T' \cdot \prod_{i=1}^r K_i')$ が Gelfand 対となるのは, 任意の $S \subset \{1, 2, \ldots, t\}$ について $\dim p_S(T')$ が S の元の個数 $\sharp S$ と一致することである. さらに, §1 の仮定を満たすためには, $p_0(T') = T_0$ かつ, $T' \cap T_0$ が有限である必要がある.

例 2. $G = \mathbb{T} \times \mathrm{SU}(2)$, $K = \Delta(\mathbb{T})$ とする. このとき, $G_1 = \mathrm{SU}(2)$, $K_1 = T_1 = \mathbb{T}$ で $\mathrm{SU}(2)/\mathbb{T}$ は Riemann 対称空間であり, $T_0 = \mathbb{T}$, $T' = \Delta(\mathbb{T})$ となり, p_0, p_1 ともに全射で, $T_0 \cap T'$ は 1 点である. よって, (G, K) は §1 の仮定を満たす簡約型 Gelfand 対で principal ではないものである.

§4. 一般の Gelfand 対.

最後に, G が一般の連結 Lie 群である Gelfand 対 (G, K) の分類について現在までの結果を報告する. $G = L \ltimes N$ において, $L = K$ のときは (G, K) は Heisenberg 型である. また, $N = \{1\}$ とすると (G, K) は簡約型となる. そこで, $L \neq K$ かつ $N \neq \{1\}$ とする.

(G, K) を Gelfand 対とすると, (L, K) も Gelfand 対である. ここで, (G, K) が §1 の仮定を満たしていても, (L, K) が満たしているとは限らない.

例 3. S を連結かつ単連結な可解 Lie 群, $\mathfrak{s} = \mathrm{Lie}S$ を S の Lie 代数とし, K を S に自己同型として効果的に作用する連結 compact Lie 群とする. $\mathfrak{n}$ を $\mathfrak{s}$ の冪零根基とし, N を $\mathfrak{n}$ に対応する S の解析部分群とする. このとき, $(K \ltimes S, K)$ が Gelfand

対であるためには, $(K \ltimes N, K)$ が Gelfand 対であり, S が N と vector 群 $\mathbb{R}^r$ に同型な S の解析部分群 A の半直積 $S = A \ltimes N$ となり, K は A に自明に作用し, 任意の $x \in \mathfrak{n}$ について $A \cdot x \subset K \cdot x$ となることが必要十分である. さらに, $L = K \times A$ とおくと, L は簡約 Lie 群になり, $K \ltimes S = L \ltimes N$ となる ([BJR1][Kik2]).

例 3 において, K が有限 abel 群でなければ (L, K) は §1 の仮定を満たさない. そこで, (L', K) も仮定を満たすような L の部分群 L' を探し, 今までの議論に帰着させる方法を与える.

(G, K) を Gelfand 対とすると, 命題 1 より $G = L \ltimes N$ と半直積に分解される. しかも, L は G の K-不変な部分群としてとることができる. L の半直積因子を L_s とおくと, L_s も K-不変になる. $L_0 := KL_s$ とすると, L_0 は L の簡約な正規部分群になり, L/L_0 は可換群になる. G/K が単連結であることから, ある vector 群 $A \simeq \mathbb{R}^r$ が存在して $L = A \times L_0$ と直積分解する. いま, $S = A \ltimes N$ とおくと, S は可解 Lie 群になり, K は A に自明に作用し, $K \ltimes S = (K \times A) \ltimes N$ となる.

命題 5. G を連結 Lie 群, K は L の連結な compact 部分群で, K を含む簡約な部分群 L と G の Lie 代数 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ の冪零根基 $\mathfrak{n}$ に対応する G の解析部分群 N により $G = L \ltimes N$ と半直積分解され, しかも, L は vector 群 A と K を含む簡約 Lie 群 L_0 との直積になると仮定する. このとき, (G, K) が Gelfand 対であるためには, $(L_0 \ltimes N, K)$ および $((K \times A) \ltimes N, K)$ が Gelfand 対になることが必要十分である.

K の半単純因子は L_0 に含まれる. よって, L_0 の中心 $Z(L_0)$ は L_0 の定義により K の中心の連続準同型像となるから torus である. $K_0 := Z(L_0)K$ とし, $K' := K_0 \cap L_s$ とする. さらに, 必要があれば L_s の被覆群をとることにより, (L_s, K') は principal な簡約型 Gelfand 対および compact 単純 Lie 群からなる自明な対 (K_j, K_j) たちの直積 $(L_1, K_1) \times \cdots \times (L_r, K_r)$ になる. 各 (L_i, K_i) について, L_i が N に自明に作用すれば, (L_i, K_i) は Gelfand 対 $(L_0 \ltimes N, K)$ の直積因子となる. よって, L_i が N に非自明に作用する場合が問題になる. ここで, すべての L_i が N に非自明に作用するとする. $\mathfrak{n} = \mathrm{Lie}(N)$ とすると, 命題 1 の条件 (3) より $\mathfrak{n}$ の K-加群としての既約分解は L-加群としての既約分解にもなる. $\mathfrak{n} = V \oplus Z(\mathfrak{n})$, $Z(\mathfrak{n}) = \mathfrak{a} \oplus [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ を K-加群としての分解とし, $W = V \oplus \mathfrak{a}$ とする. W の K-加群としての indecomposable な加群たちへの直和分解を $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_t$ とする. W_j に非自明に作用する L_i たちの直積を $L^{(j)}$, 対応する K_i たちの直積を $K^{(j)}$ とし, $\mathfrak{n}_j = W_j + [W_j, W_j]$ を W_j から生成される $\mathfrak{n}$ の部分 Lie 代数, $N_j = \exp \mathfrak{n}_j$ を $\mathfrak{n}_j$ に対応する N の解析部分群とすると, $(L^{(j)} \ltimes N_j, K^{(j)})$ は Gelfand 対になる. このとき, $(K^{(j)} \ltimes N_j, K^{(j)})$ も Gelfand 対になり, $(L_0 \ltimes N, K)$ は Gelfand 対の直積 $\prod_{j=1}^{t} (L^{(j)} \ltimes N_j, K^j)$ となる. そこで, 以下では $G = L \times N$, L は半単純, (L, K) は indecomposable な Gelfand 対で, K は N に indecomposable に作用すると仮定する.

上の仮定の下では, まだ Gelfand 対の分類は完成していない. しかし, 幾つかの仮定の下では分類されている. そのようなものを 2 つ挙げて終わることにする. $L \neq K$ で L が N に効果的に作用する principal で極大な Gelfand 対は以下で与えられる ([Y3][Y5]).

(1) $L = (\mathbb{T}\times)\mathrm{SU}(2n)$, $K = (\mathbb{T}\times)\mathrm{Sp}(n)$, $N = H_{2n}$, $n \geq 2$,

(2) $L = \mathrm{SO}(7)$, $K = G_2$, $N = \mathbb{R}^7$,

(3) $L = \mathrm{Spin}(7)$, $K = \mathrm{Spin}(6) \simeq \mathrm{SU}(4)$, $N = \mathbb{R}^8 \simeq \mathbb{C}^4$,

(4) $L = \mathrm{SO}(2n)$, $K = \mathrm{U}(n)$, $N = \mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$,

(5) $L = \mathbb{T} \times \mathrm{SO}(8)$, $K = \mathbb{T} \times \mathrm{Spin}(7)$, $N = \mathbb{C}^8$,

(6) $L = \mathrm{SO}(8)$, $K = \mathrm{Spin}(7)$, $N = \mathbb{R}^8 \otimes \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^8 \oplus \mathbb{R}^8$.

(1) において,§1 の仮定を満たすために, $\mathbb{T}$ は L, K にともに含まれるか, ともに含まれないとする. さらに,N の中心 $Z(N) \simeq \mathbb{R}$ についての central reduction $H_{2n}/\mathbb{R} \simeq \mathbb{C}^{2n} \simeq \mathbb{H}^n$ を新たに N にとっても Gelfand 対になる.

例 4. 上の (1) $(\mathrm{SU}(2n) \ltimes H_{2n}, \mathrm{Sp}(n))$ が Gelfand 対であることを確認する. 命題1(3) は容易に確認できる. $\mathrm{Lie}(H_{2n}) = \mathfrak{h}_{2n}$ において一般的な位置にある $x \in \mathfrak{h}_{2n}$ について L_x, K_x を求めると, それぞれ $L_x = \mathrm{SU}(2n-1)$, $K_x = \mathrm{Sp}(n-1)$ であるから (L_x, K_x) も Gelfand 対である. これにより, (4) が示された. (5) については, $\mathfrak{m} \simeq \mathfrak{l}/\mathfrak{k}$ において一般的な位置にある $y \in \mathfrak{m}$ として対角行列をとることができ, $K_y \simeq \mathrm{Sp}(1)^{\times n}$ となるから, $(K_y \ltimes H_{2n}, K_y)$ も Gelfand 対である. 以上により, $(\mathrm{SU}(2n) \ltimes H_{2n}, \mathrm{Sp}(n))$ は Gelfand 対である. $\mathrm{SU}(2n)$, $\mathrm{Sp}(n)$ のかわりに, それぞれ $\mathbb{T} \times \mathrm{SU}(2n)$, $\mathbb{T} \times \mathrm{Sp}(n)$ としてもよい. ただし, $\mathrm{SU}(2n)$ のみを $\mathbb{T} \times \mathrm{SU}(2n)$ に変えると Gelfand 対にはなるが §1 の仮定 (1) を満たさない.

L が reductive, (L, K) が indecomposable で L の N への作用は局所的に効果的ではないが, K の N への作用が局所的に効果的となる Gelfand 対で Sp(1)-saturated で極大なものは以下で尽くされる.

(1) $L = \mathrm{SO}(n) \times \mathrm{SO}(n)$, $K = \mathrm{SO}(n)$, $k \mapsto (k, k)$, $N = \mathbb{R}^n$, $n \geq 5$,

(2) $L = \mathbb{T} \times \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(n)$, $K = \mathbb{T} \times \mathrm{SU}(n)$, $(t, k) \mapsto (t, k, k)$, $N = H_n$, $n \geq 3$,

(3) $L = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{Sp}(2)$, $K = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(2)$, $(k_1, k_2) \mapsto (k_1, k_2, k_2)$, $N = \mathbb{H}^2$.

ただし, それぞれの例について, 2 つ目の $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{Sp}(2)$ は N に自明に作用するとする. また, L, K のあとの写像は K の L への埋め込まれ方を表している.

例 5. 上の (3)$((\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{Sp}(2)) \ltimes \mathbb{H}^2, \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(2))$ が Gelfand 対であることを示す. $L = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{Sp}(2)$ の 2 つ目の $\mathrm{Sp}(2)$ は $N = \mathbb{H}^2$ に自明に作用するから定理1(3) は明らかに成り立つ. いま $\mathbb{H}^2$ は加法群と考えているから (5) は自明. $\mathbb{H}^2$ の 0 でない元 $x \in \mathbb{H}^2$ について, $L_x \simeq \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(2)$, $K_x \simeq \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1)$ で, K_x の L_x への埋め込まれ方は $(k_1, k_2) \mapsto (k_1, k_2, (k_1, k_2))$ である. よって, (L_x, K_x) は Gelfand 対になる. 従って, $((\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{Sp}(2)) \ltimes \mathbb{H}^2, \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(2))$ は Gelfand 対になることが分かる.

References

[AV] D. N. Akhiezer and E. B. Vinberg: Weakly symmetric spaces and spherical varieties, Transform. Groups, 4 (1999), 3–24.

[BJLR] C. Benson, J. Jenkins, R. L. Lipsman and G. Ratcliff: A geometric criterion for Gelfand pairs associated with the Heisenberg groups, Pacific J. Math., 178 (1997), 1–36.

[BJR1] C. Benson, J. Jenkins and G. Ratcliff: On Gelfand pairs associated with solvable Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc., 321 (1990), 85–116.

[BJR2] C. Benson, J. Jenkins and G. Ratcliff: The orbit method and Gelfand pairs associated with nilpotent Lie groups, J. Geom. Anal., 9 (1999), 569–582.

[BR] C. Benson and G. Ratcliff: A classification of multiplicity free actions, J. Algebra, 181 (1996), 152–186.

[Br] M. Brion: Classification des espaces homogènes sphériques, Compositio Math., 63 (1987), 189–208.

[C] G. Carcano: A commutativity condition for algebras of invariant functions, Boll. Un. Mat. Ital. B(7), 1 (1987), 1091-1105.

[H] S. Helgason: Groups and Geometric Analysis, Academic Press, Orlando, 1984.

[HR] A. Hulanicki and F. Ricci: A tauberian theorem and tangential convergence of bounded harmonic functions on balls in $\mathbb{C}^n$, Invent. Math. 62 (1980), 325–331.

[Ka] V. G. Kac: Some remarks on nilpotent orbits, J. Algebra, 64 (1980), 190–213.

[Kik1] K. Kikuchi: On Gelfand pairs associated with nilpotent Lie groups, J. Math. Kyoto Univ., 34 (1994), 741–754.

[Kik2] K. Kikuchi: K-spherical representations for Gelfand pairs associated to solvable Lie groups, J. Math. Soc. Japan, 49 (1997), 469–486.

[Kir] A. A. Kirillov: Unitary representations of nilpotent Lie groups, Uspekhi Mat. Nauk 17 (1962), 57–110, English transl., Russian Math. Surveys 17 (1962), 53–104.

[Ko] A. Koranyi: Some applications of Gelfand pairs in classical analysis, in "Harmonic Analysis and Group Representations", C.I.M.E. (1980), 335–348.

[KR] A. Kaplan and F. Ricci: Harmonic analysis on groups of Heisenberg type, Lecture Notes in Math., 992 (1983), 416–435.

[Kr] M. Krämer: Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen, Compositio Math., 38 (1979), 129–153.

[La1] J. Lauret: Homogeneous nilmanifolds attached to representations of compact Lie groups, Manuscripta Math., 99 (1999), 287–309.

[La2] J. Lauret: Gelfand pairs attached to representations of compact Lie groups, Transform. Groups, 5 (2000), 307–324.

[Lea] A. Leahy: A classification of multiplicity free representations, J. Lie Theory, 8 (1998), 367–391.

[Lep] H. Leptin: A new kind of eigenfunction expansions on groups, Pacific J. Math., 116 (1985), 45–67.

[M] I. V. Mikityuk: On the integrability of invariant hamiltonian systems with homogeneous configuration spaces, Math. Sbornik, 129 (1986), 514–534, English transl., Math. USSR Sbornik, 57 (1987), 527–546.

[N] N. Nishihara: A geometric criterion for Gelfand pairs associated with nilpotent Lie groups, J. Funct. Anal., 183 (2001), 148–163.

[V1] E. B. Vinberg: Commutative homogeneous spaces and co-isotropic symplectic actions, Uspekhi. Mat. Nauk 56 (2001) no.1(337), 3–62, English transl., Russian Math. Surveys, 56 (2001) no.1, 1–60.

[V2] E. B. Vinberg: Commutative homogeneous spaces of Heisenberg type, Tr. Mosk. Mat. Obs. 64 (2003), 54–89, English transl., Moscow Math. Soc. 2003, 45–78.

[Y1] O. Yakimova: On weakly commutative homogeneous spaces, Uspekhi Mat. Nauk 57 (2002) no.3(345), 171–172, English transl., Russian Math. Surveys, 57 (2002) no.3, 615–616.

[Y2] O. Yakimova: Weakly symmetric spaces of semisimple Lie algebras, Vestnik Moskov. Univ. Ser.I Mat. Mekh., 2002 no.2, 57–60, English transl., Moscow Univ. Math. Bull., 57 (2002) no.2, 37–40.

[Y3] O. Yakimova: On the classificaion of Gel'fand pairs, Uspekhi Mat. Nauk 58 (2003) no.3(351), 195–196, English transl., Russian Math. Surveys, 58 (2003) no.3, 619–621.

[Y4] O. Yakimova: Saturated commutative spaces of Heisenberg type, Acta. Appl. Math., 81 (2004), 339–345.

[Y5] O. Yakimova: Principal Gelfand pairs, arXiv:math.RT/0403419 v2 (2004).