

Cuntz 環の表現論とその分岐則¹

京大・数理解析 川村 勝紀² (Katsunori Kawamura)
 Research Institute for Mathematical Sciences,
 Kyoto Univ.

概要

一般に C^* -環の表現に対して既約分解が一意性を持たないという事実が知られている為、既約表現の分類、表現の分岐則などの表現論における重要な問題はあまり考えられて来なかった。しかし、Bratteli-Jorgensen 等の研究により、Cuntz 環に対しては上記の問題が意味を持つような表現のクラスが存在することが示され、それ以降様々な表現論的な問題を考えることが可能となった。今回は現在までの Cuntz 環の表現論 (Cuntz-Krieger 環の置換表現を含む) とその周辺を分岐則という視点から紹介する。

Cuntz 環 ([6]) はいわゆる作用素環とよばれる関数解析の分野で、非可換、無限次元、有限生成な C^* -環の典型例である。有限生成で、簡単な関係式だけで決まる為、計算ができるよい研究対象である。我々の研究は環そのものではなく、表現、自己準同型などの、環の上部構造を具体例を構成する方法で調べることにある。たとえば、完全可約で既約分解の一意性の成り立つ表現論は作用素環ではまされたが、Cuntz 環の一般化された置換表現や、表現論のアナロジーとしての自己準同型の世界ではこれらの表現論のよい結果が成立する。この表現論の応用として、Fermion の代数の表現やフラクタル上の L_2 空間の正規直交基底の構成などが得られる。

目次

1	Cuntz 環 —表現されるもの—	2
1.1	Cuntz 環の定義	2
1.2	\mathcal{O}_N の解釈	3
2	表現	4
2.0	Cuntz 環の表現論の課題	4
2.1	具体例	5
2.2	置換表現とシフト表現	7
2.3	Cuntz-Krieger 環のシフト表現	9

¹研究集会:表現論および等質空間上の調和解析, 京都大学数理解析研究所 420 号室, 2004 08 10, 旧題「Cuntz-Krieger 環の置換表現」

²e-mail:kawamura@kurims.kyoto-u.ac.jp

3	自己準同型 —表現の分岐をひきおこすもの—	9
3.1	具体例	10
3.2	置換自己準同型	11
4	セクター —分規則の代数—	12
4.1	セクター環	13
4.2	スペクトル加群 ⁶	14
4.3	Cuntz 環の置換セクターとその分類	15
5	応用と関連分野 —分岐則の実現—	16
5.1	Fermion の表現 — $\text{Res}_{CAR}^{\mathcal{O}_2} \pi$ —	16
5.2	フラクタル上の正規直交基底 — $\text{Res}_{C(X)}^{\mathcal{O}_N} \pi$ —	17

1 Cuntz 環 —表現されるもの—

1.1 Cuntz 環の定義

A が C^* -環とは A は Banach 空間かつ $*$ -代数で次の等式を満たすものをいう: $\|x^*x\| = \|x\|^2$ for $\forall x \in A$. $x \in A$ が射影作用素とは $x^* = x$, $x^2 = x$ のときをいう. $x \in A$ が部分等長作用素とは x^*x, xx^* はともに射影作用素のときをいう.

定義 1.1 ([7]) 自然数 $N \geq 2$ に対して $A = (a_{ij})$ を $0, 1$ を成分に持つ N 次正方行列で, どの行も列も 0 ではないとする. このとき **Cuntz-Krieger 環** \mathcal{O}_A とは以下の関係式を満たす部分等長作用素 s_1, \dots, s_N で生成された C^* -環のことである:

$$s_i^* s_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} s_j s_j^*, \quad (i = 1, \dots, N), \quad \sum_{j=1}^N s_j s_j^* = I.$$

ここで I は \mathcal{O}_A の単位元とする. 特に $a_{ij} = 1, \forall i, j$ のときを **Cuntz 環** と呼び \mathcal{O}_N と記す.

簡単の為 Cuntz 環の場合について性質を述べる.

定理 1.2 (i) \mathcal{O}_N は同型を除いて一意に存在する.

(ii) \mathcal{O}_N は単純, つまり, 両側閉イデアルは自明なものしかない.

(iii) $\mathcal{O}_N \cong \mathcal{O}_M$ (i.e. $*$ -同型 $\phi: \mathcal{O}_N \rightarrow \mathcal{O}_M$ が存在する) $\Leftrightarrow N = M$.

(iv) 任意の $N \geq 2$ に対して埋め込み $\varphi: \mathcal{O}_N \hookrightarrow \mathcal{O}_2$ が存在する.

\mathcal{O}_N は以下のような線形空間を稠密な $*$ -部分環として持つことが分かる.

$$\text{Lin} \langle \{s_J s_{J'}^* : J, J' \in \{1, \dots, N\}^k, k \geq 0\} \rangle \quad (1.1)$$

ここで多重指数 $J = (j_1, \dots, j_k) \in \{1, \dots, N\}^k$, $k \geq 1$ に対して $s_J \equiv s_{j_1} \cdots s_{j_k}$, $s_J^* \equiv s_{j_k}^* \cdots s_{j_1}^*$, $\{1, \dots, N\}^0 \equiv \{0\}$, $s_0 \equiv I$ とする. Cuntz 環そのものはノルムによる位相で完備な C^* -環であるが, しばしば計算は部分環 (1.1) のみを考えれば十分である. 特に本論ではこの稠密な $*$ -環と Cuntz 環 \mathcal{O}_N 自身を同一視して話を進めても構わない.

1.2 \mathcal{O}_N の解釈

数学的定義の他に, 他の分野の言葉を用いて Cuntz 環の意味を説明する. 以下の解釈は, Cuntz 環の表現論に反映されることが § 5 で示される.

1.2.1 自由半群代数の表現 ([8, 9]) \mathbf{F}_N^+ を N 文字の自由半群とし \mathbf{F}_N^+ から生成される C^* -環 $C^*(\mathbf{F}_N^+)$ のある表現 (\mathcal{H}, π) に対して

$$\pi(C^*(\mathbf{F}_N^+)) \cong \mathcal{O}_N.$$

1.2.2 Fermion との関係 Boson-Fermion 対応により Boson がある Fermion の表現の上で Fermion の 2 次式の無限和で書けることが知られている ([18]). これを標語的に表すと

$$\text{Fermion} = \sqrt{\text{Boson}}.$$

一方 Fermion が Cuntz 環の生成元の多項式で書ける (帰納的 Fermion 系 (RFS)). 以下のように $a_n \in \mathcal{O}_2$ を定義する: $n \geq 1$ に対して,

$$a_n \equiv \sum_{J \in \{1, \dots, N\}^{n-1}} (-1)^{n_2(J)} s_J s_1 s_2^* s_J^*, \quad n_2(J) \equiv \{j \in J : j = 2\}.$$

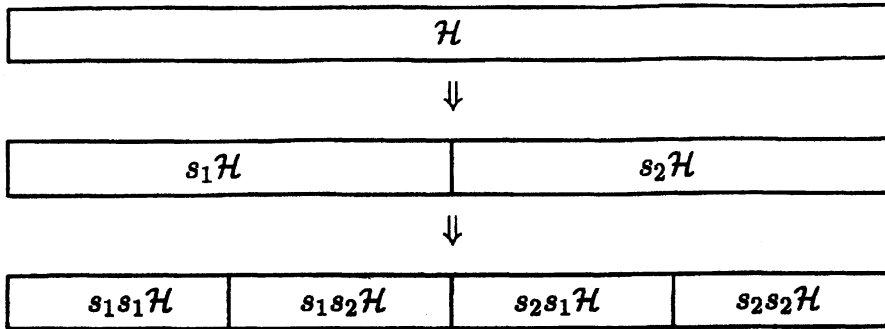
すると $a_n a_m^* + a_m^* a_n = \delta_{n,m} I$, $a_n a_m + a_m a_n = 0$, を満たす. これより Fermion の代数 $\mathcal{A} \equiv \langle \{a_n, a_n^* : n \geq 1\} \rangle$ が \mathcal{O}_2 に埋め込まれることが分かる. a_n は s_i, s_i^* の $2n$ 次の非可換斉次多項式である. この意味において

$$\mathcal{O}_2 = \sqrt{\text{Fermion}}$$

といえる. Boson-Fermion 対応は表現に依存し生成元の対応は 2 次式の無限和であるのことに對して, Fermion-Cuntz 環の対応は表現に依存しない多項式による生成元の対応である.

1.2.3 自己相似性 Cuntz 環はある種の自己相似性を持っている. 例えば \mathcal{O}_2 がある無限次元 Hilbert 空間 \mathcal{H} に作用していると仮定する. すると \mathcal{O}_2

の生成元 s_1, s_2 は \mathcal{H} 上のユニタリーでない等長作用素であり, \mathcal{H} に作用するたびに \mathcal{H} の無限次元部分空間の直和に分解してゆく ([19]).



これをフラクタル (=自己相似集合) との比較で表で示す:

フラクタル (自己相似集合)	Cuntz 環
位相空間 $X \subset \mathbf{R}^M$	Hilbert 空間
自己相似写像	等長作用素
$X = \bigcup_{i=1}^N f_i(X)$	$\sum_{i=1}^N s_i s_i^* = I$
$f_i(X) \cap f_j(X) = \emptyset (i \neq j)$	$s_i^* s_j = \delta_{ij} I$

より詳しく § 5.2 で解説を行う。

2 表現

\mathcal{H} を複素ヒルベルト空間とすると, (\mathcal{H}, π) が C^* -環 A の $*$ -表現とは $\pi : A \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が $*$ -準同型るときをいう。以降単に $*$ -表現を表現と呼ぶことにする。この解説では A が単位元 I を含むときは, $\pi(I) = I$ を仮定する。2つの A の表現 (\mathcal{H}_1, π_1) と (\mathcal{H}_2, π_2) が同値とはあるユニタリー $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ が存在して $\text{Ad}U \circ \pi_1 = \pi_2$ のときをいう。本論に入る前に Cuntz 環の表現の何を問題としているかを, 表現論の標準的な切り口で述べておくことにする ([17]).

2.0 Cuntz 環の表現論の課題

課題 1 既約表現 (の同値類) を分類し, それを理解せよ。

課題 2 与えられた表現を既約分解せよ。

課題 1 は次のような問題を含んでいる:

- 既約表現の構成,
- 分類のパラメーター (“状態”やその他種々の不変量) の発見と計算,
- 双対 $\text{Spec } \mathcal{O}_N \equiv \widehat{\mathcal{O}_N} = \text{IrrRep } \mathcal{O}_N / \sim$ の分類,
- 同値な表現の間の絡作用素の構成.

現在, Cuntz 環のすべての既約表現の上記の意味での研究はできていない.

課題 2-A 誘導表現の分解:今回は省略する.

課題 2-B 制限の分解 (分岐則): 部分環 \mathcal{A} への制限の既約分解

$$\text{Spec } \mathcal{O}_N \ni \pi \rightarrow \pi|_{\mathcal{A}} = \bigoplus_{\lambda} \pi_{\lambda}.$$

分規則の問題の変形として, 作用素環ならではの以下のような問題を考えることができる:

課題 2-B' 自己準同型による分岐則: 自己準同型 $\rho \in \text{End } \mathcal{O}_N$ に対して,

$$\text{Spec } \mathcal{O}_N \ni \pi \mapsto \pi \circ \rho = \bigoplus_{\lambda} \pi_{\lambda}.$$

\mathcal{O}_N が無限次元非可換であることが十分に多くの (表現の分岐を引き起こすという意味での) 非自明な自己準同型の存在を保証している. 実際にこの問題を §3 で扱う. このほかの課題としては「他の C^* 環の “よい” 表現を研究せよ」なども考えられる. たとえば Cuntz-Pimsner 環などの表現が次の目標となる.

2.1 具体例

次に具体的な表現を紹介する. その前に基本的な言葉を確認しておく. (\mathcal{H}, π) が巡回的とは $\exists x \in \mathcal{H}$ s.t. $\overline{\pi(\mathcal{O}_N)x} = \mathcal{H}$ となることである. このとき x を (\mathcal{H}, π) の巡回ベクトルと呼ぶ. (\mathcal{H}, π) は既約とは閉不変部分空間は自明なもののみの場合である. (\mathcal{H}, π) が \mathcal{O}_N の置換表現とは \mathcal{H} の完全正規直交基底 $\{e_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ と写像 $f_i: \Lambda \rightarrow \Lambda, i = 1, \dots, N$ が存在して $\pi(s_i)e_{\lambda} = e_{f_i(\lambda)}$ となる場合をいう. つまり置換表現とは基底ベクトルを基底ベクトルに移す表現である.

例 1:(標準表現) $\mathbf{N} \equiv \{1, 2, 3, \dots\}$ に対して $l_2(\mathbf{N})$ 上の作用素 $\pi_S(s_i), i = 1, \dots, N$ を $l_2(\mathbf{N})$ の標準基底 $\{e_n : n \in \mathbf{N}\}$ 上に以下のように定義する:

$$\pi_S(s_i)e_n \equiv e_{N(n-1)+i} \quad (n \in \mathbf{N}, i = 1, \dots, N).$$

すると $\pi_S(s_i)$ は $l_2(\mathbf{N})$ 上の等長作用素であることがわかる. さらにその共役作用素は

$$(\pi_S(s_i))^* e_{N(n-1)+j} = \delta_{ij} e_n \quad (n \in \mathbf{N}, i, j = 1, \dots, N)$$

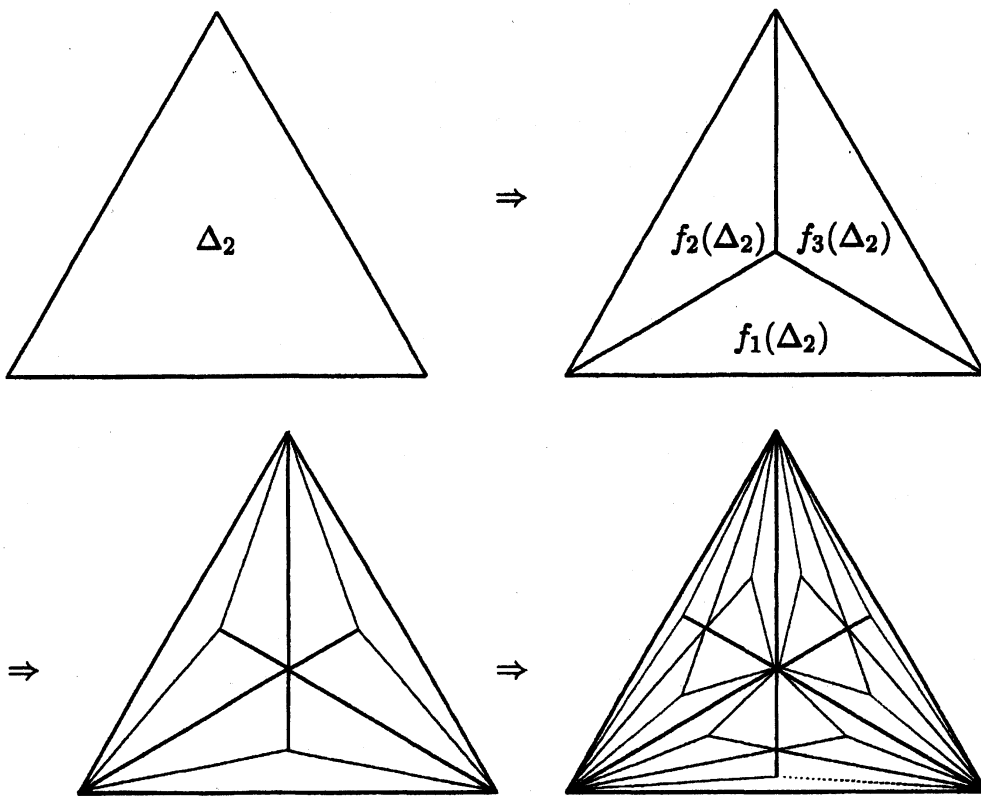
となる. これより $\pi_S(s_1), \dots, \pi_S(s_N)$ が Cuntz 環の生成元の関係式を満たすことがわかる. これより $(l_2(\mathbf{N}), \pi_S)$ は \mathcal{O}_N の表現となる. さらに定義より $(l_2(\mathbf{N}), \pi_S)$ は \mathcal{O}_N の置換表現である. $(l_2(\mathbf{N}), \pi_S)$ は既約である. この証明にはまず, $\overline{\pi_S(\mathcal{O}_N)e_1} = l_2(\mathbf{N})$ を示し, 次に勝手な 0 でないベクトル $v \in l_2(\mathbf{N})$ に対して, $e_1 \in \overline{\pi_S(\mathcal{O}_N)v}$ を示すことにより得られる. \mathcal{O}_N の表現 (\mathcal{H}, π) で $\pi(s_1)\Omega = \Omega$ を満たす巡回ベクトル $\Omega \in \mathcal{H}$ が存在するものはすべて $(l_2(\mathbf{N}), \pi_S)$ と同値である.

例 2: $\Delta_{N-1} \equiv \{x = (x_i)_{i=1}^N \in \mathbf{R}^N : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^N x_i = 1\}$ を $N-1$ -標準単体とする. $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^N$ を \mathbf{R}^N の標準基底とすると $x = \sum_{i=1}^N x_i \varepsilon_i$ と表せる. Δ_{N-1} の内点の全体の集合を $\text{Int}\Delta_{N-1}$ と記す.

$p = (p_i)_{i=1}^N \in \text{Int}\Delta_{N-1}$ を固定し, $f_i^{(p)} : \Delta_{N-1} \rightarrow \Delta_{N-1}$ を

$$f_i^{(p)}(x) \equiv x + x_i \cdot (p - \varepsilon_i) \quad (x = (x_i)_{i=1}^N \in \Delta_{N-1}, i = 1, \dots, N)$$

とする. $N = 3, p = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)/3$ の場合を以下に図示する:



Δ_{N-1} に対して Δ_{N-1} を含む \mathbf{R}^N 内の $N-1$ 次元超平面 $\cong \mathbf{R}^{N-1}$ のルベーグ測度を正規化した確率測度 μ を入れると, $p_i = \mu(f_i^{(p)}(\Delta_{N-1}))$ となる. この測度に関して $L_2(\Delta_{N-1})$ を考える. $L_2(\Delta_{N-1})$ 上への \mathcal{O}_N の表現

$\pi^{(p)}$ を

$$(\pi^{(p)}(s_i)\phi)(x) \equiv \begin{cases} p_i^{-1/2} \cdot \phi((f_i^{(p)})^{-1}(x)) & (x \in f_i^{(p)}(\Delta_{N-1})), \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

$\phi \in L_2(\Delta_{N-1})$, とおく. このとき以下の命題が成り立つ.

命題 2.1 (i) すべての $p \in \text{Int}\Delta_{N-1}$ に対して $(L_2(\Delta_{N-1}), \pi^{(p)})$ は既約かつ, 任意の置換表現と非同値.

(ii) $p, q \in \text{Int}\Delta_{N-1}$ に対して $\pi^{(p)} \sim \pi^{(q)} \Leftrightarrow p = q$.

この例では § 1.2.3 の Cuntz 環の自己相似性が表現のレベルでよく表されており, 表現の不変量と表現される空間の点との対応もはっきりしている.

例 3: T_3 を閉区間 $[-1, 1]$ 上の以下で定義される実 3 次変換とする:

$$T_3(x) \equiv 4x^3 - 3x \quad (x \in [-1, 1]).$$

このとき \mathcal{O}_3 の表現 $(L_2[-1, 1], \pi_t)$ を以下で定義する:

$$(\pi_t(s_i)\phi)(x) \equiv m_i(x)\phi(T_3(x)) \quad (i = 1, 2, 3, x \in [-1, 1], \phi \in L_2[-1, 1]).$$

ここで $m_i(x) \equiv \chi_{D_i}(x)\sqrt{|12x^2 - 3|}$, χ_{D_i} は集合 D_i 上の特性関数, $D_1 \equiv [-1, -1/2]$, $D_2 \equiv [-1/2, 1/2]$, $D_3 \equiv [1/2, 1]$ とする. 次の固有方程式が成り立つ:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\pi_t(s_1 + s_2 + s_3)\Omega = \Omega, \quad \Omega(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(1-x^2)^{1/4}}.$$

この式を用いて $(L_2[-1, 1], \pi_t)$ は例 2 の $(L_2(\Delta_2), \pi^{(p)})$, $p = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)/3$ と同値であることがわかる. このことから非線形変換で定義される Cuntz 環の表現でも, 線形変換と同値な表現が存在することがわかる.

2.2 置換表現とシフト表現

次節で分規則の具体的な記述をするために置換表現の言葉を用意する. 以下の記号を定める: $\{1, \dots, N\}^* \equiv \bigcup_{k \geq 0} \{1, \dots, N\}^k$, $\{1, \dots, N\}_1^* \equiv \bigcup_{k \geq 1} \{1, \dots, N\}^k$, $\{1, \dots, N\}^\infty \equiv \{(j_n)_{n \in \mathbb{N}} : j_n \in \{1, \dots, N\}\}$, $\{1, \dots, N\}^\# \equiv \{1, \dots, N\}_1^* \cup \{1, \dots, N\}^\infty$.

定義 2.2 (\mathcal{H}, π) を \mathcal{O}_N の表現とする.

(i) $J \in \{1, \dots, N\}^k$ に対して, (\mathcal{H}, π) は $\mathbf{P}(J) \Leftrightarrow \exists \Omega \in \mathcal{H}$: 巡回ベクトル *s.t.* $\pi(s_J)\Omega = \Omega$.

(ii) $J = (j_n) \in \{1, \dots, N\}^\infty$ に対して, (\mathcal{H}, π) は $P(J) \Leftrightarrow \exists \Omega \in \mathcal{H}$: 巡回ベクトル $\|\Omega\| = 1$, s.t. $\{\pi(s_{j_k}^* \cdots s_{j_1}^*)\Omega \in \mathcal{H} : k \geq 1\}$ は正規直交族.

$J = (j_1, \dots, j_k) \in \{1, \dots, N\}^k$ は周期的 $\Leftrightarrow J = p(J) \equiv (j_{p(1)}, \dots, j_{p(k)})$, $p \in \mathbf{Z}_k \setminus \{id\}$. $J = (j_n) \in \{1, \dots, N\}^\infty$ は (最終的に) 周期的 (eventually periodic) $\Leftrightarrow \exists J_0, J_1 \in \{1, \dots, N\}^*$ s.t. $J = J_0 \cup (J_1)^\infty$. $J_1, J_2 \in \{1, \dots, N\}^*$ に対して, $J_1 \sim J_2 \Leftrightarrow \exists k, \exists p \in \mathbf{Z}_k, J_1, J_2 \in \{1, \dots, N\}^k$ s.t. $J_1 = p(J_2)$. $J_1, J_2 \in \{1, \dots, N\}^\infty$ に対して, $J_1 \sim J_2 \Leftrightarrow \exists J'_1, J'_2 \in \{1, \dots, N\}^*, \exists J_3 \in \{1, \dots, N\}^\infty$ s.t. $J_1 = J'_1 \cup J_3, J_2 = J'_2 \cup J_3$. $J_1 \in \{1, \dots, N\}^*, J_2 \in \{1, \dots, N\}^\infty$ のとき, $J_1 \not\sim J_2$ と定義する.

定理 2.3 ([5, 8, 9])

- (i) 任意の $J \in \{1, \dots, N\}^\#$ に対して, $\exists (\mathcal{H}, \pi)$ s.t. $(\mathcal{H}, \pi) = P(J)$.
- (ii) (\mathcal{H}, π) と (\mathcal{H}', π') は $P(J) \Rightarrow (\mathcal{H}, \pi) \sim (\mathcal{H}', \pi')$.
- (iii) 任意の置換表現 (\mathcal{H}, π) に対して $\{J_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \{1, \dots, N\}^\#$ が存在して $(\mathcal{H}, \pi) = \bigoplus_\lambda P(J_\lambda)$, かつ, この分解はユニタリー同値を除き一意.
- (iv) 置換表現 (\mathcal{H}, π) は巡回的 $\Leftrightarrow \exists J \in \{1, \dots, N\}^\#$ s.t. (\mathcal{H}, π) は $P(J)$.
- (v) 置換表現 (\mathcal{H}, π) は既約 $\Leftrightarrow \exists J \in \{1, \dots, N\}^\#$ s.t. J : 周期的でない, (\mathcal{H}, π) は $P(J)$.
- (vi) $J, J' \in \{1, \dots, N\}^\#$ に対して, $P(J) \sim P(J') \Leftrightarrow J \sim J'$.

Cuntz 環の置換表現はシフト表現と呼ばれる特殊な置換表現の既約分解により簡潔に表せる. $X_N \equiv \{1, \dots, N\}^\infty$ に対して, $f_i : X_N \rightarrow X_N$; $f_i(j_1, j_2, \dots) \equiv (i, j_1, j_2, \dots)$. とする. \mathcal{O}_N のシフト表現 $(l_2(X_N), \pi_f)$ を以下で定義する:

$$\pi_f(s_i)e_x \equiv e_{f_i(x)} \quad (x \in X_N, i = 1, \dots, N).$$

命題 2.4 ([5]) 以下の既約分解が成り立つ:

$$(l_2(X_N), \pi_f) = \bigoplus_{J: \text{非周期的}} P(J)$$

ここで J は $\{1, \dots, N\}^\#$ の中の非周期的な元のなす部分集合を \sim で同一視した商集合の中に値をとる. 全ての \mathcal{O}_N の既約置換表現 (の同値類) が右辺に重複度 1 で現れる.

2.3 Cuntz-Krieger 環のシフト表現

Cuntz 環の置換表現とシフト表現を Cuntz-Krieger 環の場合に一般化する (これが本講演の最初の講演題目であった.) $A = (a_{ij}) \in M_N(\{0, 1\})$ に対して $\{1, \dots, N\}_A^* \equiv \coprod_{k \geq 0} \{1, \dots, N\}_A^k$, $\{1, \dots, N\}_A^0 \equiv \{0\}$, $\{1, \dots, N\}_A^1 \equiv \{1, \dots, N\}$, $\{1, \dots, N\}_A^k \equiv \{(j_i)_{i=1}^k \in \{1, \dots, N\}^k : a_{j_{i-1}j_i} = 1, i = 2, \dots, k\}$ ($k \geq 2$), $\{1, \dots, N\}_{A,c}^* \equiv \coprod_{k \geq 1} \{1, \dots, N\}_{A,c}^k$, $\{1, \dots, N\}_{A,c}^k \equiv \{(j_i)_{i=1}^k \in \{1, \dots, N\}_A^k : a_{j_k j_1} = 1\}$, $\{1, \dots, N\}_A^\infty \equiv \{(j_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{1, \dots, N\}^\infty : a_{j_{n-1}j_n} = 1, n \geq 2\}$, $\{1, \dots, N\}_{A,c}^\# \equiv \{1, \dots, N\}_{A,c}^* \sqcup \{1, \dots, N\}_A^\infty$. \mathcal{O}_A の置換表現 $P(J)$ が任意の $J \in \{1, \dots, N\}_A^\#$ に対して定義され, その性質も Cuntz 環の場合の主張で表現のパラメーターを $J \in \{1, \dots, N\}_A^\#$ に取り替えるだけでよい.

$X_A \equiv \{1, \dots, N\}_A^\infty$ とおく. X_A 上の写像の組 $f = \{f_i\}_{i=1}^N$ を定義する: $i = 1, \dots, N$ に対して,

$$f_i : D(f_i) \rightarrow R(f_i); \quad f_i(j_1, j_2, \dots) \equiv (i, j_1, j_2, \dots),$$

$$R(f_i) \equiv \{(j_1, j_2, \dots) \in X_A : j_1 = i\}, \quad D(f_i) \equiv \coprod_{j: a_{ij}=1} R(f_j).$$

すると Cuntz 環の時と同様に \mathcal{O}_A のシフト表現 $(l_2(X_A), \pi_f)$ が定義され, 以下の命題が成り立つ:

命題 2.5 ([15])

$$(l_2(X_A), \pi_f) = \bigoplus_{J: \text{非周期的}} P(J)$$

ここで J は $\{1, \dots, N\}_A^\#$ の中の非周期的な元のなす部分集合を \sim で同一視した商集合の中に値をとる. 全ての \mathcal{O}_A の既約置換表現 (の同値類) が右辺に重複度 1 で現れる.

3 自己準同型 —表現の分岐をひきおこすもの—

Cuntz 環 \mathcal{O}_N の自己準同型としては canonical endomorphism がよく知られており, 応用としても重要であるが, 表現の分岐としてはほぼ自明である (任意の表現に対して重複度を N 倍する). ここでは非自明な例からスタートする.

3.1 具体例

\mathcal{O}_3 の生成元 s_1, s_2, s_3 についての斉次式 t_1, t_2, t_3 を考える:

$$\begin{cases} t_1 \equiv s_1 s_2 s_3^* + s_2 s_3 s_1^* + s_3 s_1 s_2^*, \\ t_2 \equiv s_2 s_1 s_3^* + s_3 s_2 s_1^* + s_1 s_3 s_2^*, \\ t_3 \equiv s_1 s_1 s_1^* + s_2 s_2 s_2^* + s_3 s_3 s_3^*. \end{cases} \quad (3.1)$$

t_1, t_2, t_3 は再び \mathcal{O}_3 の関係式を満たす. 対応

$$\rho(s_i) \equiv t_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

は \mathcal{O}_3 の代数自己準同型となり, $\rho(x^*) = \rho(x)^*$, $\rho(I) = I$ を満たす. このような ρ を \mathcal{O}_3 の単位的 $*$ -自己準同型と呼ぶ. 以下単に単位的 $*$ -自己準同型を自己準同型と呼ぶ. t_1, t_2, t_3 は s_1, s_2, s_3 の巡回置換で不変な \mathcal{O}_3 の元である. したがって $\rho(\mathcal{O}_3) \subset \mathcal{O}_3^{\mathbb{Z}_3} \neq \mathcal{O}_3$. よって ρ は自己同型ではない. さらに ρ の性質を調べるために ρ の引き起こす \mathcal{O}_3 の置換表現の分規則を調べる.

補題 3.1 \mathbb{N} 上の写像の組 $f = \{f_1, f_2, f_3\}$ を以下のように定義する:

$$f_1(1) \equiv 2, \quad f_1(2) \equiv 5, \quad f_2(1) \equiv 4, \quad f_2(2) \equiv 1, \quad f_3(1) \equiv 3, \quad f_3(2) \equiv 6,$$

$$f_i(n) \equiv 3(n-1) + i \quad (i = 1, 2, 3, n \geq 3).$$

このとき次が成り立つ:

(i) $\pi_f(s_i)e_n \equiv e_{f_i(n)}$ は \mathcal{O}_3 の表現 $(l_2(\mathbb{N}), \pi_f)$ を定める. $(l_2(\mathbb{N}), \pi_f)$ は定義 2.2 の $P(12)$ になる.

(ii) $n \geq 7$ に対して $e_m \equiv (\pi_f \circ \rho)(s_i)e_n$ とすると $m > n$.

証明. (i) $(f_1 \circ f_2)(2) = 2$, $\{f_J(2) : J \in \{1, 2, 3\}^*\} = \mathbb{N}$ となる. これらより, $\pi_f(s_1 s_2)e_2 = e_2$ かつ e_2 は $(l_2(\mathbb{N}), \pi_f)$ の巡回ベクトルである. 従って, $(l_2(\mathbb{N}), \pi_f)$ は $P(12)$.

(ii) 直接計算によりチェックされる. ■

\mathcal{O}_N の表現 (\mathcal{H}, π) が $P(J)$, $J \in \{1, \dots, N\}^\#$ で $\rho \in \text{End } \mathcal{O}_N$ に対して $(\mathcal{H}, \pi \circ \rho)$ を簡単に $P(J) \circ \rho$ と書く.

命題 3.2 $P(12) \circ \rho = P(113223)$.

証明. $(l_2(\mathbf{N}), \pi_f)$ を補題 3.1 の表現とする. 定理 2.3 (ii) と補題 3.1 (i) より, $(l_2(\mathbf{N}), \pi_f \circ \rho) = P(113223)$ を示せば十分である. h_i を $(\pi \circ \rho)(s_i)e_n = e_{h_i(n)}$ となるような \mathbf{N} 上の写像とすると, 以下のような値をとる:

n	$h_1(n)$	$h_2(n)$	$h_3(n)$
1	12	16	5
2	8	15	4
3	13	1	9
4	17	3	10
5	6	7	14
6	2	11	18

これより $h = \{h_1, h_2, h_3\}$ は以下のサイクルを持つ:

$$1 \xrightarrow{h_3} 5 \xrightarrow{h_1} 6 \xrightarrow{h_1} 2 \xrightarrow{h_3} 4 \xrightarrow{h_2} 3 \xrightarrow{h_2} 1. \quad (3.2)$$

よって $(\pi_f \circ \rho)(s_{113223})e_2 = e_2$. さらに $\{(\pi \circ \rho)(s_J)e_2 : J \in \{1, 2, 3\}^*\} = \{e_n : n \in \mathbf{N}\}$. ベクトル e_2 は巡回的で (3.2) を満たすので, $(l_2(\mathbf{N}), \pi_f \circ \rho) = P(113223)$. ■

ρ は既約表現 $P(12)$ を既約表現 $P(113223)$ に移した. このことより $\{x \in \mathcal{O}_3 : \forall y \in \rho(\mathcal{O}_3), xy = yx\} = \mathbf{CI}$ となる. 一般にこのような性質をもつ自己準同型は既約であるという. 同様に以下が成り立つ:

$$P(1) \circ \rho = P(2) \circ \rho = P(3) \circ \rho = P(12) \oplus P(3),$$

$$P(13) \circ \rho = P(23) \circ \rho = P(113223).$$

ρ が自己同型でないことは, 既約表現 $P(1)$ を可約表現 $P(12) \oplus P(3)$ に移していることからわかる.

3.2 置換自己準同型

一般に \mathcal{O}_N の自己準同型と \mathcal{O}_N のユニタリー元のあいだには以下の 1-1 対応がある: $\text{End } \mathcal{O}_N \ni \rho; \rho(s_i) = us_i \Leftrightarrow u = \sum_{i=1}^N \rho(s_i)s_i^* \in U(\mathcal{O}_N)$. 特に以下の対応による自己準同型 ψ_σ を考える:

$$\psi_\sigma(s_i) \equiv u_\sigma s_i \quad (i = 1, \dots, N); \quad u_\sigma \equiv \sum_{J \in \{1, \dots, N\}^k} s_{\sigma(J)} s_J^*$$

ここで $\sigma \in \mathfrak{S}_{N,k} \equiv \{\eta : \{1, \dots, N\}^k \rightarrow \{1, \dots, N\}^k \mid \text{全単射}\}$. ψ_σ を σ による \mathcal{O}_N の置換自己準同型と呼ぶ. (3.1) の ρ はある置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_{3,2}$ による

\mathcal{O}_3 の置換自己準同型である. canonical endomorphism も置換自己準同型である.

一般に \mathcal{O}_N の自己準同型 ρ は次の対応で \mathcal{O}_N の表現を \mathcal{O}_N の表現に移す: $(\mathcal{H}, \pi) \mapsto (\mathcal{H}, \pi \circ \rho)$. ただし (\mathcal{H}, π) が既約でも $(\mathcal{H}, \pi \circ \rho)$ は既約とは限らない. これより $(\mathcal{H}, \pi \circ \rho)$ の既約分解がどうなるかという問題が起こる.

定理 3.3 $\sigma \in \mathcal{G}_{N,k}$ とする.

(i) (\mathcal{H}, π) が置換表現のとき, $(\mathcal{H}, \pi \circ \psi_\sigma)$ も置換表現.

(ii) $(\mathcal{H}, \pi) = P(J)$ のとき, $(\mathcal{H}, \pi \circ \psi_\sigma)$ は $\{P(J_i)\}$ の有限直和.

ρ で既約表現を移した場合の既約分解公式としての分岐則を考えることができる. このように自己準同型により分岐則が引き起こされる. 具体的な計算結果とその計算方法については [11, 12, 13].

4 セクター — 分岐則の代数 —

自己準同型が表現の分岐を引き起こすことを § 3 で紹介した. このことから分岐則は自己準同型の性質を反映しており, 表現の分岐により自己準同型の分類が考えられる. $\rho_1, \rho_2 \in \text{End}\mathcal{O}_N$ に対して $\rho_1 \sim \rho_2 \Leftrightarrow \exists u \in \mathcal{O}_N$: ユニタリー s.t. $Adu \circ \rho_1 = \rho_2$ とする. すると, $\rho_1 \sim \rho_2$ ならば, ρ_1, ρ_2 の引き起こす分岐はユニタリー同値になる. このことより, 分岐則の違いにより自己準同型の同値類 (=セクター) の違いがわかる.

$$\text{Sect}\mathcal{O}_N \equiv \text{End}\mathcal{O}_N / \sim$$

を \mathcal{O}_N のセクターと呼ぶ ([14]). 一般に代数の自己準同型の全体に対しては加法は考えられない. しかしながらその同値類である $\text{Sect}\mathcal{O}_N$ に対しては \mathcal{O}_N の性質を用いて準同型の合成による積 $[\rho_1][\rho_2] \equiv [\rho_1 \circ \rho_2]$ と分配法則を満たす加法 $[\rho_1] \oplus \cdots \oplus [\rho_N]$ (のようなもの) が定義される. こうして $\text{Sect}\mathcal{O}_N$ 代数 (のようなもの) になる. (3.1) の ρ は $\text{Sect}\mathcal{O}_3$ の元の 1 つを与えている. $\text{Sect}\mathcal{O}_N$ に関しては完全可約な表現論と同様な理論が期待できる. たとえば既約な ρ_1, ρ_2 に対してそのセクターの積の既約なセクターへの分解

$$[\rho_1][\rho_2] = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} [\rho_\lambda]$$

は群の表現のテンソル積の分解のように思える. この分岐則をフュージョン則と呼ぶ. この意味において $\text{Sect}\mathcal{O}_N$ は (コンパクト) 群の表現環に似ている. ただし一般に $[\rho_1][\rho_2] \neq [\rho_2][\rho_1]$ である. フュージョン則の計算や既約性の証明には \mathcal{O}_N の既約表現の自己準同型による分岐則の計算が有効である.

4.1 セクター環

一般に環 \mathcal{A} から環 \mathcal{B} への準同型の集合 $\text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ は環 \mathcal{A} から環 \mathcal{B} への線形写像の集合 $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ などに比べて、代数的構造を考えにくい。しかし、以下の条件のもとでうまく $\text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ の同値類に加法群に似た構造を考えることができる。

$N \geq 2$ を固定して、

$$H_N \mathcal{B} \equiv \{(t_i)_{i=1}^N \in \mathcal{B}^N : t_1, \dots, t_N \text{ は } \mathcal{O}_N \text{ の生成元の関係式を満たす}\}$$

とおき $H_N \mathcal{B} \neq \emptyset$ を仮定する。 $\xi = (t_i)_{i=1}^N \in H_N \mathcal{B}$ と $\rho = (\rho_i)_{i=1}^N \in (\text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B}))^N$ に対して、カップリング $\langle \cdot | \cdot \rangle : H_N \mathcal{A} \times (\text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B}))^N \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ を定義する:

$$\langle \xi | \rho \rangle \equiv \sum_{i=1}^N \text{Ad} t_i \circ \rho_i.$$

ここで $\text{Ad} t_i : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$; $\text{Ad} t_i(x) \equiv t_i x t_i^*$ for $x \in \mathcal{B}$ である。 $\text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \equiv \text{Inn} \mathcal{B} \setminus \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ を \mathcal{A} から \mathcal{B} へのセクターと呼ぶ。ここで $\text{Inn} \mathcal{B}$ は \mathcal{B} の内部自己同型群で $\text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ に左から作用しているものとする: $\phi \mapsto \alpha \circ \phi$ ($\alpha \in \text{Inn} \mathcal{B}$, $\phi \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$). $\text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 上の N -項演算 p を以下で定義する:

$$p : (\text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B}))^N \rightarrow \text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \quad p([\rho_1], \dots, [\rho_N]) \equiv [\langle \xi | \rho \rangle]$$

ここで $\xi \in H_N \mathcal{B}$, $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_N) \in (\text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B}))^N$. p は well-defined となる。 $[\rho] \in \text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ が既約とは $\rho(\mathcal{A})' \cap \mathcal{B} = \mathbf{C}I$ のときをいう。 $[\rho] \in \text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ が固有 (proper) とは ρ が全射でないときをいう。

命題 4.1 $\text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 上の N -項演算 $p : (\text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B}))^N \rightarrow \text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ は以下の性質を満たす:

(i) (可換性) p は完全対称、つまり

$$p(z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(N)}) = p(z_1, \dots, z_N) \quad (z_1, \dots, z_N \in \text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \sigma \in \mathfrak{S}_N).$$

(ii) (結合律) $(\text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B}))^{2N-1}$ 上で以下写像の合成の式が成り立つ:

$$p \circ (id^{N-1} \times p) = p \circ (p \times id^{N-1}).$$

特に $H_2 \mathcal{B} \neq \emptyset$ のとき p は通常の 2 項演算になり、 $(\text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B}), p)$ は可換な半群になる。これより、 $\text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ での演算 p を和と呼ぶことにする。 $(\text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B}), p)$ を \mathcal{A} から \mathcal{B} へのセクター半群または、単にセクター群と呼ぶ。 $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ のときに $\text{Sect} \mathcal{A} \equiv \text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = \text{Inn} \mathcal{A} \setminus \text{End} \mathcal{A}$ とする。

命題 4.2 (i) $\text{Sect } \mathcal{A}$ は写像の合成を積として単位元を持つ半群となる。

(ii) $H_N \mathcal{A} \neq \emptyset$ と仮定するとき, $\text{Sect } \mathcal{A}$ の和と積は分配法則を満たす。

$N \geq 2$ に対して, $H_N \mathcal{O}_N \neq \emptyset$. \mathcal{R} が properly infinite ならば $H_2 \mathcal{R} \neq \emptyset$. この意味で (作用素環の世界では) $H_N \mathcal{A} \neq \emptyset$ となる例は豊富にある. $\text{Sect } \mathcal{A}$ に上記の意味で和と積を考えたものを \mathcal{A} のセクター環 (sector algebra) と便宜的に呼ぶことにする. 外部自己同型群 $\text{Out } \mathcal{A}$ は $\text{Sect } \mathcal{A}$ の部分群である為, $\text{Out } \mathcal{A}$ が非可換ならば, $\text{Sect } \mathcal{A}$ も非可換である.

$H_N \mathcal{A} \neq \emptyset$ となる C^* -環 \mathcal{A} に対して $\text{Sect } \mathcal{A}$ は一般に非可換環の (ような) 構造をもつことがわかった. p を通常の和のようにあえて書くと, 以下のように表せる: $x_{\sigma(1)} + \cdots + x_{\sigma(N)} = x_1 + \cdots + x_N$,
 $x_1 + \cdots + x_{N-1} + (x_N + \cdots + x_{2N-1}) = (x_1 + \cdots + x_N) + x_{N+1} + \cdots + x_{2N-1}$,
 $x(yz) = (xy)z$, $1x = x = x1$, $x(y_1 + \cdots + y_N) = xy_1 + \cdots + xy_N$. ここで ι は \mathcal{A} 上の恒等写像とする. 0元がなく, $H_N \mathcal{A} \neq \emptyset$, $H_k \mathcal{A} = \emptyset$, $2 \leq k \leq N-1$ のときは N 個づつしか和を定義できないことに注意する. K -理論より, $H_2 \mathcal{O}_3 = \emptyset$ かつ $H_3 \mathcal{O}_3 \neq \emptyset$. 従って $\text{Sect } \mathcal{O}_3$ の和は 3 つづつしか定義できない.

4.2 スペクトル加群⁶

§ 3 の自己準同型が表現の分規を引き起こす現象をスペクトル加群の概念で再定式化する.

$N \geq 2$ を固定して $H_N \mathcal{B} \neq \emptyset$ を仮定する. セクター半群 $\text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ のある表現 (正確には右加群) を考える. 具体的にはある 2 つのベクトル空間のあいだの線形作用素として表す. $\text{Spec } \mathcal{A}$, $\text{BSpec } \mathcal{A}$ をそれぞれ \mathcal{A} の単位的既約表現, 単位的表現のユニタリー同値類の集合とする. \mathcal{B} についても同様である. $\text{BSpec } \mathcal{A}$ 上に $[\pi_1] \oplus [\pi_2] \equiv [\pi_1 \oplus \pi_2]$ ($[\pi_1], [\pi_2] \in \text{BSpec } \mathcal{A}$) で和を定義する. 今 $\text{BSpec } \mathcal{A}$ には 0 表現は入っていないので, $\text{BSpec } \mathcal{A}$ はこの和で (単位元のない) 半群になる. $[\rho] \in \text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ の $\text{BSpec } \mathcal{B}$ から $\text{BSpec } \mathcal{A}$ への作用素としての表現 $R_{[\rho]}$ を以下で定義する: $R_{[\rho]} : \text{BSpec } \mathcal{B} \rightarrow \text{BSpec } \mathcal{A}$, $[\pi] R_{[\rho]} \equiv [\pi \circ \rho]$ ($[\pi] \in \text{BSpec } \mathcal{A}$). すると, $R_{[\rho]}$ は well-defined, $\text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ の作用は $\text{BSpec } \mathcal{A}$ と $\text{BSpec } \mathcal{B}$ の演算に分配的になる. つまり, $R_{[\rho]}$ は加法半群 $\text{BSpec } \mathcal{B}$ から $\text{BSpec } \mathcal{A}$ への準同型になる. さらに写像

$$R : \text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \rightarrow \text{Hom}(\text{BSpec } \mathcal{B}, \text{BSpec } \mathcal{A})$$

は以下の式をみたす: 任意の $z_1, \dots, z_N \in \text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ に対して

$$x R_{p(z_1, \dots, z_N)} = x R_{z_1} \oplus \cdots \oplus x R_{z_N} \quad (x \in \text{BSpec } \mathcal{B})$$

となる.これより, R は $\text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ の N -項演算半群の作用素としての表現を与えていることがわかる. (正確には可換半群 $\text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ の $V = \text{BSpec}\mathcal{A} \oplus \text{BSpec}\mathcal{B}$ を考えていることになる. R は V への右からの作用素としての実現である.) $(\text{BSpec}\mathcal{A}, \text{BSpec}\mathcal{B}, R)$ を $\text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ の右スペクトル加群と呼ぶ. 特に $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ のとき, $(\text{BSpec}\mathcal{A}, R)$ を $\text{Sect}\mathcal{A}$ の右スペクトル加群と呼ぶ.

この作用からわかる $\text{Sect}\mathcal{A}$ の性質を示す.

定理 4.3 (i) 外部自己同型群 $\text{Out}\mathcal{A} \subset \text{Sect}\mathcal{A}$ の元はすべて既約.

(ii) (既約判定条件) \mathcal{B} は単純とする. $z \in \text{Sect}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ に対してある $x \in \text{Spec}\mathcal{B}$ が存在して $xR_z \in \text{Spec}\mathcal{A}$ ならば z は既約.

(iii) \mathcal{A} は単純とする. $z \in \text{Sect}\mathcal{A}$ に対してある $x \in \text{Spec}\mathcal{A}$ が存在して $xR_z = x$ ならば任意の $n \geq 1$ に対して z^n は既約.

(iv) (非同値性の判定条件) $\phi_1, \phi_2 \in \text{End}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ に対してある $\pi \in \text{IrrRep}\mathcal{B}$ が存在して以下の条件を満たすとする: $\pi \circ \phi_1 \not\sim \pi \circ \phi_2$. このとき, $\phi_1 \not\sim \phi_2$.

(v) (固有性の判定条件) $z \in \text{Sect}\mathcal{A}$ に対して, ある $x \in \text{Spec}\mathcal{A}$ が存在して $xR_z \notin \text{Spec}\mathcal{A}$ ならば, $z \notin \text{Out}\mathcal{A}$, つまり, z は固有セクター.

4.3 Cuntz 環の置換セクターとその分類

$k \geq 1$ に対して, 以下の記号を定める:

$$E_{N,k} \equiv \{\psi_\sigma \in \text{End}\mathcal{O}_N : \sigma \in \mathfrak{S}_{N^*}\}, \quad SE_{N,k} \equiv E_{N,k}/\sim,$$

$$PSE_{N,k} \equiv SE_{N,k} \setminus \text{Out}\mathcal{O}_N, \quad IPSE_{N,k} \equiv \{\xi \in PSE_{N,k} : \xi \text{ は既約}\}$$

$E_{N,k}$ の元を k 次の \mathcal{O}_N の置換準同型, $SE_{N,k} \subset \text{Sect}\mathcal{O}_N$ の元を k 次の \mathcal{O}_N の置換セクターと呼ぶ. 置換自己準同型はゲージ変換 $\gamma_z, z \in U(1)$ で共変な為, $\mathcal{O}_N^{U(1)}$ への制限もまた $\mathcal{O}_N^{U(1)}$ の自己準同型になる.

命題 4.4 ($SE_{2,2}$ の分類) $\#SE_{2,2} = 16, \text{Aut}\mathcal{O}_2 \cap E_{2,2} \cong V_4$. ここで V_4 は Klein 4 元群, $\#PSE_{2,2} = 14, \#IPSE_{2,2} = 5$,

$$PSE_{2,2} \setminus IPSE_{2,2} \subset \{\xi + \zeta : \xi, \zeta \in \text{Out}\mathcal{O}_2\}.$$

$M \equiv IPSE_{2,2}/\alpha$ とおくと, $\#M = 3$. ここで $\alpha \in \text{Aut}\mathcal{O}_2$ は $s_1 \leftrightarrow s_2$ で定められるものとする.

M の元 (の代表元) $\rho, \bar{\rho}, \eta$ を以下で紹介する:

$$\rho(s_1) \equiv s_{12,1} + s_{11,2}, \quad \rho(s_2) \equiv s_2,$$

$$\bar{\rho}(s_1) \equiv s_{21,1} + s_{12,2}, \quad \bar{\rho}(s_2) \equiv s_{11,1} + s_{22,2},$$

$$\eta(s_1) \equiv s_{22,1} + s_{11,2}, \quad \eta(s_2) \equiv s_{21,1} + s_{12,2}$$

ただしここで $s_{ij,k} \equiv s_i s_j s_k^*$ ($i, j, k = 1, 2$). 以下, $[\rho]$ を単に ρ と略記する.

定理 4.5 $\bar{\rho}\rho = \iota + \alpha, \quad \rho\bar{\rho} = \iota + \beta \neq \bar{\rho}\rho, \quad \bar{\rho}^2\rho^2 = \iota + \alpha + \eta.$

ここで上の演算や等号はすべて $\text{Sect}\mathcal{O}_2$ のセクター環としての意味とする. $\beta \in \text{Aut}\mathcal{O}_2$ は $s_1 \leftrightarrow -s_1$ で定義されているとする. 特に \mathcal{O}_2 の canonical endomorphism (のセクター) $\sigma \in \text{PSE}_{2,2}$ は $\sigma = \iota + \iota = 2\iota$ である.

5 応用と関連分野 —分岐則の実現—

群の表現論での分岐則はいろいろな実現のされ方が知られており, それらは数学における群の表現論の重要性を効果的に示している ([17]). 一方, 作用素環論 (とその周辺) 以外ではあまり知られていない Cuntz 環であるが, Cuntz 環の表現の分岐則はどのような実現がされているかを部分環 $A \subset \mathcal{O}_N$ への表現 π の制限 $\text{Res}_A^{\mathcal{O}_N} \pi$ による具体例で紹介し, Cuntz 環の表現の意義を考えてみる.

5.1 Fermion の表現 — $\text{Res}_{CAR}^{\mathcal{O}_2} \pi$ —

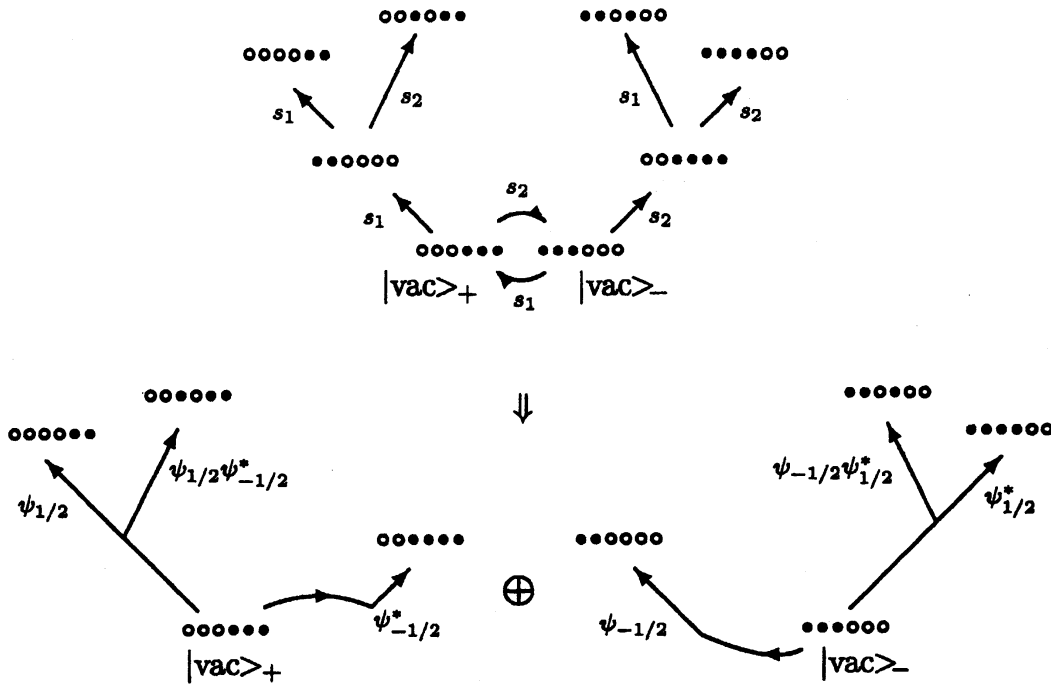
§ 1.2.2 での Fermion の代数 (作用素環では CAR と呼ぶ) の \mathcal{O}_2 へ埋め込みで CAR を \mathcal{O}_2 の部分環と同一視する. \mathcal{O}_2 の表現の CAR への制限 $\text{Res}_{CAR}^{\mathcal{O}_2} \pi$ の分規則を説明する ([1, 2, 3, 4, 16]). $P(1)$ を \mathcal{O}_2 の標準表現 (§ 2.1 例 1, § 2.2) とするとき, 次が成り立つ:

$$\text{Res}_{CAR}^{\mathcal{O}_2} P(1) \cong \text{Fock}.$$

この場合の分岐は自明 (既約成分が 1 個だけ) である. 同様に

$$\text{Res}_{CAR}^{\mathcal{O}_2} P(12) \cong IWF \oplus IWF^*$$

ここで IWF と IWF^* は Fermion の infinite wedge 表現とその双対表現である. Fock, IWF, IWF^* は互いにユニタリー非同値な CAR の既約表現である. マヤ図形 ([18, 16]) による infinite wedge 表現の実現を用いてこの分岐を表すと以下のようなになる:



一般に UHF 部分環への制限による分岐は [5, 2] にある. § 1.2.2 の話と \mathcal{O}_2 の分規則と infinite wedge 表現の関係を用いて, Boson-Fermion 対応が Cuntz 環の言葉で書ける ([16]).

5.2 フラクタル上の正規直交基底 — $\text{Res}_{C(X)}^{\mathcal{O}_N} \pi$ —

フーリエ級数展開と表現の分岐のアナロジーをフラクタルで考える. ある $M \geq 1$ に対して \mathbf{R}^M 内のコンパクトな自己相似集合 (= カントール集合, シルピンスキー・ガスケツト等) X に対して縮小写像 f_1, \dots, f_N が $X = f_1(X) \cup \dots \cup f_N(X)$, $\mu(f_i(X) \cap f_j(X)) = 0$ ($i \neq j$) とする. ここで μ をハウスドルフ測度とする. このとき $L_2(X, \mu)$ 上の作用素 $S(f_i)$ を以下で定義する:

$$(S(f_i)\phi)(x) \equiv \begin{cases} \{\Phi_{f_i}(f_i^{-1}(x))\}^{-1/2} \phi(f_i^{-1}(x)) & (x \in f_i(X)), \\ 0 & (\text{その他の場合}). \end{cases}$$

ここで Φ_{f_i} は $\mu \circ f_i$ の μ に対する Radon-Nikodým 微分である. $S(f_i)$ は等長作用素で $S(f_i)S(f_j) = S(f_i \circ f_j)$ を満たす. $\pi(s_i) \equiv S(f_i)$ は $L_2(X, \mu)$ 上への \mathcal{O}_N の既約な表現になる. 一方 X 上の連続関数環 $C(X)$ の \mathcal{O}_N への埋め込み $\varphi: C(X) \cong C^* \langle \{\alpha_{g^{-1}}(s_J s_J^*) \in \mathcal{O}_N : J \in \{1, \dots, N\}^*\} \rangle C \mathcal{O}_N$ を以下で定義する: $\varphi(\sum_J a_J \chi_{X_J}) \equiv \sum_J a_J \alpha_{g^{-1}}(s_J s_J^*)$ ここで $g = (g_{ij}) \in U(N)$, $g_{ij} \equiv N^{-1/2} e^{\sqrt{-1}(i-1)(j-1)}$. $C(X)$ を部分環 $\varphi(C(X))$ と同一視し

た上でその制限に関する既約分解

$$\text{Res}_{C(X)}^{\mathcal{O}_N} \pi = \bigoplus_{x \in X_0} \chi_x, \quad \chi_x(f) \equiv f(x) \quad (f \in C(X), x \in X_0)$$

が得られる。ここで X_0 は稠密な X のある可算部分集合である。 χ_x は $C(X)$ の既約表現, 従って1次元表現であるから $L_2(X, \mu)$ の完全正規直交基底 $\{\chi_x : x \in X_0\}$ が得られる。具体例と基底の具体的記述については [10] を参照。

参考文献

- [1] M.Abe and K.Kawamura, *Recursive Fermion System in Cuntz Algebra. I —Embeddings of Fermion Algebra into Cuntz Algebra—*, Comm. Math. Phys. **228**,85-101 (2002).
- [2] M.Abe and K.Kawamura, *Recursive Fermion System in Cuntz Algebra. II —Endomorphism, Automorphism and Branching of Representation—*, preprint RIMS-1362 (2002).
- [3] M.Abe and K.Kawamura, *Nonlinear Transformation Group of CAR Fermion Algebra*, Lett.Math.Phys. **60**:101-107, 2002.
- [4] M.Abe and K.Kawamura, *Pseudo Cuntz Algebra and Recursive FP Ghost System in String Theory*, Int. J. Mod. Phys. **A18**, No. 4 (2003) 607-625.
- [5] O.Bratteli and P.E.T.Jorgensen, *Iterated function Systems and Permutation Representations of the Cuntz algebra*, Memories Amer. Math. Soc. No.663 (1999).
- [6] J.Cuntz, *Simple C^* -algebras generated by isometries*, Comm. Math. Phys. **57**, 173-185 (1977).
- [7] J.Cuntz and W.Krieger, *A class of C^* -algebra and topological Markov chains*, Invent.Math., **56** (1980) 251-268.
- [8] K.R.Davidson and D.R.Pitts, *The algebraic structure of non-commutative analytic Toeplitz algebras*, Math.Ann. **311**, 275-303 (1998).
- [9] K.R.Davidson and D.R.Pitts, *Invariant subspaces and hyper-reflexivity for free semigroup algebras*, Proc. London Math. Soc. (3) **78** (1999) 401-430.

- [10] K. Kawamura and O. Suzuki, *Construction of orthonormal basis on self-similar sets by generalized permutative representations of the Cuntz algebras*, preprint RIMS-1408 (2003),
- [11] K. Kawamura, *Polynomial endomorphisms of the Cuntz algebras arising from permutations. I —General theory—*, preprint RIMS-1427 (2003).
- [12] K. Kawamura, *Polynomial endomorphisms of the Cuntz algebras arising from permutations. II —Branching laws of endomorphisms—*, preprint RIMS-1433 (2003).
- [13] K. Kawamura, *Polynomial endomorphisms of the Cuntz algebras arising from permutations. III —Branching laws and automata—* preprint RIMS-1442 (2004).
- [14] K. Kawamura, *Algebra of sectors*, preprint RIMS-1450 (2004).
- [15] K. Kawamura, *Representations of the Cuntz-Krieger algebras. II —Permutative representations—*, preprint RIMS-1462 (2004).
- [16] K. Kawamura, *Extensions of representations of the CAR algebra to the Cuntz algebra \mathcal{O}_2 —the Fock and the infinite wedge—*, preprint RIMS-1465 (2004).
- [17] 大島 利雄, 小林 俊行, *Lie 群と Lie 環 1・2*, 岩波講座 現代数学の基礎 17, 岩波書店.
- [18] T.Miwa, M.Jimbo and E.Date, *Solitons: Differential Equations, Symmetries and Infinite Dimensional Algebras*, Cambridge Univ. Press(2000).
- [19] 綿谷安男, 「複素力学系やフラクタル図形から生じる Cuntz 環の仲間とその表現」, クンツ環のフラクタル集合上の表現と数理解析への応用, 数理解析研究所講究録 1333, p 36-51, 2003 年 7 月.

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kawamura/index.html>