数理解析研究所講究録 1410 巻 2005 年 64-84

楕円積分と超楕円積分を結ぶ関係式とホインの微分方程式

横浜市立大学・数理科学教室　竹村　剛一 (Kouichi Takemura)
Department of Mathematical Sciences,
Yokohama City University

1. はじめに

楕円積分と超楕円積分を結び関係式はかなり昔から研究されているものである。例えば、１９世紀にエルミートは次の式を発見している ([3])。

$$\int \frac{zdz}{\sqrt{(z^2-a)(8z^3-6az-b)}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \int \frac{dy}{\sqrt{y^3-3ay+b}}, \tag{1.1}$$

ここで y と z の間の変数変換は $y=(2z^3-b)/(3(z^2-a))$ で与えられるものである。

本稿では、ホインの微分方程式のモノドロミーの２つの表示式を比べることによって、上で述べたような式が組織的に得られることを説明する。ホインの微分方程式とは、４点に確定特異点をもつフックス型の２階常微分方程式の標準型であり、具体型は

$$\left(\left(\frac{d}{dw}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{w} + \frac{\delta}{w-1} + \frac{\epsilon}{w-t}\right)\frac{d}{dw} + \frac{\alpha\beta w - q}{w(w-1)(w-t)}\right)\tilde{f}(w) = 0 \tag{1.2}$$

で係数の間に

$$\gamma + \delta + \epsilon = \alpha + \beta + 1, \tag{1.3}$$

という関係式があるものとして与えられる ([8])。また、ホインの微分方程式を解くことは、BC_1 Inozemtsev 模型と呼ばれる量子力学の模型の固有値・固有関数を求めることと等価であることが知られている。ここで BC_1 Inozemtsev 模型はハミルトニアンが

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{i=0}^{3} l_i(l_i+1)\wp(x+\omega_i), \tag{1.4}$$

となっている模型であるが、$\wp(x)$ は周期 $(2\omega_1, 2\omega_3)$ はワイエルシュトラスの二重周期関数であり、$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ は半周期たちであり（$\omega_0 = 0$, $\omega_2 = -\omega_1 - \omega_3$ としている）、l_i $(i = 0,1,2,3)$ は定数である。また、この模型は BC_N Inozemtsev 模型という N 粒子で B_N-対称性をもつ「量子可積分」であり普遍的な模型の１粒子版であることも知られている ([4, 7])。

ところで、ホインの微分方程式と BC_1 Inozemtsev 模型の対応については、$f(x)$ をハミルトニアン H の固有関数で固有値が E であるもの、つまり

$$(H-E)f(x) = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{i=0}^{3} l_i(l_i+1)\wp(x+\omega_i) - E\right)f(x) = 0, \tag{1.5}$$

としたとき、定数たち l_0, l_1, l_2, l_3 は $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ に、楕円関数の周期の比 ω_3/ω_1 は特異点 t に、固有値 E はアクセサリーパラメータ q に、固有関数 $f(x)$ はホインの微分方程式の解 $\tilde{f}(w)$ に対応する ([9, 10, 11, 12])。本稿では式 (1.5) についてもホインの微

分方程式と呼ぶことにする。また、$l_0 \neq 0$ で $l_1 = l_2 = l_3 = 0$ の場合は、式 (1.5) はラメの微分方程式と呼ばれる。

Hermite や Halphen は、ラメの微分方程式を、解が Baker-Akhiezer 関数 (または Block 関数) の形に表示できるという仮設をおいて研究し、Krichever [5] は Baker-Akhiezer 関数のような表示を用いて KP 方程式の準周期解を研究した。本稿では、微分方程式 (1.5) の解を、彼らの手法と関連する Hermite-Krichever 仮設法を用いて調べる。本稿の設定では、Hermite-Krichever 仮設法は微分方程式が楕円 Baker-Akhiezer 関数の微分たちの有限和に指数関数を掛けた関数を解としてもつという仮定をおいて解を調べる。より明示的に述べると、微分方程式 (1.5) の解を

$$f(x) = \exp(\kappa x)\left(\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{l_i-1}\tilde{b}_j^{(i)}\left(\frac{d}{dx}\right)^j \Phi_i(x,\alpha)\right), \tag{1.6}$$

という形で探すということとなる。ここで $\Phi_i(x,\alpha)$ は、$\Phi_i(x,\alpha) = \exp(\zeta(\alpha)x)\sigma(x+\omega_i-\alpha)/\sigma(x+\omega_i)$ $(i=0,1,2,3)$ という準周期関数である。また、解がこのような形で書けることがわかったら、大域的モノドロミー（ここでは解を周期分 ($2\omega_1$ または $2\omega_3$) ずらしたときの挙動）を α と κ を用いて記述することができる。よって、α と κ の具体的な表示がわかるときには、大域的モノドロミーを調べることに Hermite-Krichever 仮設法が役立つのではないかと期待できる。

Treibich と Verdier は [14] などにより、もし l_0, l_1, l_2, l_3 がすべて整数であれば、ポテンシャルとなっている関数 $\sum_{i=0}^{3} l_i(l_i+1)\wp(x+\omega_i)$ が定常高次 KdV 方程式をみたすことを発見して確立し、Krichever のアイデア [5] を発展させる形で楕円ソリトンの理論を構築した。そして、Gesztesy と Weikard [2, 15]、Smirnov [9]、本稿著者 [10, 12] らによってさらに結果が得られてきた。これゆえ、関数 $\sum_{i=0}^{3} l_i(l_i+1)\wp(x+\omega_i)$ は Treibich-Verdier ポテンシャルと呼ばれている。また、このポテンシャルは超楕円曲線 $\nu^2 = -Q(E)$ と密接に関連している。ここで、$Q(E)$ は E についての多項式でそれぞれの $l_0, l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{Z}$ についてそれぞれ決まるものである。この多項式に関して、例えば固有値 E が $Q(E) = 0$ をみたすならば微分方程式 (1.5) はホイン多項式に対応する楕円関数を解としてもつことが知られている ([2, 9, 10, 11]) 。

Belokolos, Eilbeck, Enolskii, Kostov, Smirnov らは、$l_0 = 1,2,3,4,5, l_1 = l_2 = l_3 = 0$ の場合と, $l_0 = 2, l_1 = 1, l_2 = 0, l_3 = 0$ の場合と $l_0 = 2, l_1 = 1, l_2 = 1, l_3 = 0$ の場合に、超楕円曲線 $\nu^2 = -Q(E)$ から楕円曲線 $\wp'(\alpha)^2 = 4\wp(\alpha)^3 - g_2\wp(\alpha) - g_3$ への写像を研究し、式 (1.6) にある α, κ と固有値 E の関係式を調べた。([1] とその中の引用文献が参考となる。) そして、これらの個々の写像を楕円曲線の正則 1 形式に代入することにより、式 (1.1) にあるような超楕円積分を楕円積分に帰着させる変換公式をいくつかの場合に得た。

他方、Maier はラメの微分方程式の場合 ($l_0 \neq 0$, $l_1 = l_2 = l_3 = 0$) にこの写像についてのあるパターンを発見し、"twisted Lamé polynomial" と "theta-twisted Lamé polynomial" という多項式を導入して、それらを用いた形で写像の式を提出した ([6])。

本稿では、$l_0, l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の場合に Hermite-Krichever 仮設法を正当化して発展させることができたということを報告する。この過程において、[10] にて得られた Bethe 仮設法の結果や [12] にて得られた微分方程式 (1.5) の解の大域的モノドロミーの超楕円積分を用いた表示が本質的に使われている。また、微分方程式 (1.5) の解の大域的モノドロミーの楕円積分を用いた表示についても結果を得ることができた。ホインの微分方程式を Hermite-Krichever 仮設法を用いて研究する上で、超楕円曲線から楕円曲

線への写像（後に現れる$\wp(\alpha)$の表示式）などをより詳しく調べることが必要となるが、このために、Maierのアイデアを基にtwisted Heun polynomialやtheta-twisted Heun polynomialを導入し、Maierの結果を援護する定理を得ることができた。そして、微分方程式(1.5)の解の大域的モノドロミーの2種類の表示（超楕円積分によるものとHermite-Krichever仮設法によるもの）を見比べることにより、第一種超楕円積分を第一種楕円積分に帰着させる式と第二種超楕円積分を第二種楕円積分に帰着させる式を得ることができた。これにより、ホインの微分方程式たちやラメの微分方程式たちで個々に知られていた超楕円積分を楕円積分に帰着させる式についての一つの明快な解釈が得られたこととなる。例えば$l_0 = 2$, $l_1 = l_2 = l_3 = 0$の場合では、式(1.1)は第一種超楕円積分を第一種楕円積分に帰着させる式となっており、第二種超楕円積分を第二種楕円積分に帰着させる式は、$y = (2z^3 - b)/(3(z^2 - a))$という関係式においての

$$\int \frac{(2z^2 - a)dz}{\sqrt{(z^2 - a)(8z^3 - 6az - b)}} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8z^3 - 6az - b}{z^2 - a}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \int \frac{ydy}{\sqrt{y^3 - 3ay + b}}, \quad (1.7)$$

となる。

Hermite-Krichever仮設法はBC_1 Inozemtsev模型の固有値問題に応用できると期待される。なぜなら、この方法によりモノドロミーは楕円積分を用いて表示され、モノドロミー自体が模型の境界条件の判定に用いることができるからである。

本稿の構成であるが、まず2章にて、Hermite-Krichever仮設法の正当性を保障する定理を紹介する。3章にて、ホインの微分方程式の解の積分表示、付随する超楕円曲線に関係する多項式、解の大域的モノドロミーの超楕円積分による表示式について述べる。4章にて、モノドロミーの2種類の表示を用いることにより、超楕円積分を楕円積分に帰着させる式たちを導き出す。5章にて、twisted Heun polynomialとtheta-twisted Heun polynomialを導入し、Maierの結果を援護する定理などを述べる。6章にて、いろいろな例の計算結果を紹介する。

なお、本稿では、$l_0, l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$と$(l_0, l_1, l_2, l_3) \neq (0, 0, 0, 0)$を仮定する。

2. Hermite-Krichever仮設法

この章では、ホインの微分方程式(式(1.2)またはそれと同値な式(1.5))でのHermite-Krichever仮設法について解説する。

関数$\Phi_i(x, \alpha)$を

$$\Phi_i(x, \alpha) = \frac{\sigma(x + \omega_i - \alpha)}{\sigma(x + \omega_i)} \exp(\zeta(\alpha)x), \qquad (i = 0, 1, 2, 3). \quad (2.1)$$

によって定義する。ここで$\zeta(x)$はワイエルシュトラスのゼータ関数であり、$\sigma(x)$はワイエルシュトラスのシグマ関数である。$\eta_k = \zeta(\omega_k)$ $(k = 1, 3)$とする。シグマ関数の準周期性より、

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^j \Phi_i(x + 2\omega_k, \alpha) = \exp(-2\eta_k\alpha + 2\omega_k\zeta(\alpha)) \left(\frac{d}{dx}\right)^j \Phi_i(x, \alpha) \quad (2.2)$$

という式が$i = 0, 1, 2, 3$, $k = 1, 3$, $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$で成立する。

以下で述べる定理は、作用素Hの固有関数は大抵の場合はHermite-Krichever仮設法の形で表示できることを主張している。

Theorem 2.1. ([13]) $l_0, l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を仮定し、$l = l_0 + l_1 + l_2 + l_3$ とおく。それぞれの固有値 E に対し、微分方程式 *(1.5)* の 0 でない解で、

$$f(x) = \exp(\kappa x)\left(\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{l_i-1}\tilde{b}_j^{(i)}\left(\frac{d}{dx}\right)^j\Phi_i(x,\alpha)\right) \tag{2.3}$$

という形で表示できるものが存在するか、または、

$$f(x) = \exp(\bar{\kappa} x)\left(\bar{c} + \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{l_i-2}\bar{b}_j^{(i)}\left(\frac{d}{dx}\right)^j\wp(x+\omega_i) + \sum_{k=1}^{3}\bar{c}_k\frac{\wp'(x)}{\wp(x)-e_k}\right) \tag{2.4}$$

という形で表示できるものが存在する。

解が式 *(2.3)* で表示できるとき、α と κ は、ある多項式 $P_1(E), \dots, P_4(E)$ を用いて

$$\wp(\alpha) = \frac{P_1(E)}{P_2(E)}, \quad \kappa = \frac{P_3(E)}{P_4(E)}\sqrt{-Q(E)}, \tag{2.5}$$

と表示できる。ここで、$Q(E)$ は微分方程式に付随してきまる超楕円曲線 $\nu^2 = -Q(E)$ に関係するもので次章の式 *(3.3)* にて定義されるものである。さらにこのとき

$$f(x + 2\omega_k, E) = \exp(-2\eta_k\alpha + 2\omega_k\zeta(\alpha) + 2\kappa\omega_k)f(x) \tag{2.6}$$

が $k = 1, 3$ で成立する。ここで $\eta_k = \zeta(\omega_k)$ $(k = 1, 3)$ である。

また、固有値 E が $P_2(E) \neq 0$ を満たすときは式 *(2.3)* で表示できる解が存在し、$P_2(E) = 0$ を満たすときは式 *(2.4)* で表示できる解が存在する。

Hermite-Krichever 仮設法の形の解 $f(x)$ として次章で現れる関数 $\Lambda(x, E)$ をとってくることができるということと、[10] で得られている Bethe 仮設法によって表される解の零点を用いて α と κ が表示できることが上の定理を証明する際にキーポイントとなっている。

Example 1. *(i)* $l_0 = 1,\ l_1 = l_2 = l_3 = 0$ の場合。

この場合では、式 *(2.3)* は以下の形に書き直される。

$$f(x) = \exp(\kappa x)\left(\tilde{b}_0^{(0)}\Phi_0(x,\alpha)\right) \tag{2.7}$$

この場合は、どんな固有値 E についても上の形の非自明な（$\tilde{b}_0^{(0)} \neq 0$ となる）解が存在し、$\alpha,\ \kappa$ は以下の式をみたしている。

$$\wp(\alpha) = -E, \quad \kappa = 0. \tag{2.8}$$

(ii) $l_0 = 2,\ l_1 = l_2 = l_3 = 0$ の場合。

この場合では、式 *(2.3)* は以下の形に書き直される。

$$f(x) = \exp(\kappa x)\left(\tilde{b}_0^{(0)}\Phi_0(x,\alpha) + \tilde{b}_1^{(0)}\left(\frac{d}{dx}\right)\Phi_0(x,\alpha)\right) \tag{2.9}$$

$e_i = \wp(\omega_i)$ $(i = 1, 2, 3)$, $g_2 = -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1)$, $g_3 = 4e_1e_2e_3$ とおく。$\alpha,\ \kappa$ と固有値 E の関係は、

$$\wp(\alpha) = e_1 - \frac{(E-3e_1)(E+6e_1)^2}{9(E^2-3g_2)}, \quad \kappa = \frac{2}{3(E^2-3g_2)}\sqrt{-(E^2-3g_2)\prod_{i=1}^{3}(E-3e_i)}. \tag{2.10}$$

となっており、$E \neq \pm\sqrt{3g_2}$ のときには式 *(2.9)* の形の解が存在する。また、係数の比 $\tilde{b}_1^{(0)}/\tilde{b}_0^{(0)}$ についても E を用いて表示することができる。

3. モノドロミーの超楕円積分による表示式

この章では、ホインの微分方程式 (1.5) の解を考えるのに重要な役割を果たす二重周期関数を導入し、これを用いて解の積分表示・付随する超楕円曲線に関係する多項式・解の大域的モノドロミーの超楕円積分による表示式を求める

$h(x)$ という関数を、微分方程式 (1.5) の解の２つの積であるとすると、これは次の微分方程式をみたす。

$$\left(\frac{d^3}{dx^3}-4\left(\sum_{i=0}^{3}l_i(l_i+1)\wp(x+\omega_i)-E\right)\frac{d}{dx}-2\left(\sum_{i=0}^{3}l_i(l_i+1)\wp'(x+\omega_i)\right)\right)h(x)=0. \tag{3.1}$$

ここでの三階の微分方程式 Eq.(3.1) について、$l_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(i=0,1,2,3)$ ならば、すべての E に対して二重周期関数の解をもつことが知られている。より詳しく、次の Proposition が成り立っている。

Proposition 3.1. ([10, Proposition 3.5]) $l_0, l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とすると、微分方程式 *(3.1)* は以下のように表示される 0 ではない二重周期関数の解をもつ。

$$\Xi(x,E)=c_0(E)+\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{l_i-1}b_j^{(i)}(E)\wp(x+\omega_i)^{l_i-j}. \tag{3.2}$$

ここで、係数 $c_0(E)$, $b_j^{(i)}(E)$ を、E の多項式ですべてについて共通因子をもたず、$c_0(E)$ をモニックに（最高次の係数が 1 となるように）とってくることができ、そうすれば式 *(3.2)* は一意に定まる。

また、$g=\deg_E c_0(E)$ とおくと、他の係数はすべて $\deg_E b_j^{(i)}(E)<g$ をみたす。

後に重要な役割を果たすことになる多項式 $Q(E)$ を

$$Q(E)=\Xi(x,E)^2\left(E-\sum_{i=0}^{3}l_i(l_i+1)\wp(x+\omega_i)\right)+\frac{1}{2}\Xi(x,E)\frac{d^2\Xi(x,E)}{dx^2}-\frac{1}{4}\left(\frac{d\Xi(x,E)}{dx}\right)^2, \tag{3.3}$$

として導入する。この式の右辺は、$\Xi(x,E)$ が微分方程式 (1.5) を満たしているということより x に依存していない。そして、$Q(E)$ は次数が $2g+1$ のモニックな多項式となっている。

Example 2. 以下の場合、関数 $\Xi(x,E)$ と多項式 $Q(E)$ は次のように表示できる。
(i) $l_0=1$, $l_1=l_2=l_3=0$ の場合。

$$\Xi(x,E)=\wp(x)+E,\quad Q(E)=(E+e_1)(E+e_2)(E+e_3). \tag{3.4}$$

(ii) $l_0=2$, $l_1=l_2=l_3=0$ の場合。

$$\Xi(x,E)=9\wp(x)^2+3E\wp(x)+E^2-\tfrac{9}{4}g_2,\quad Q(E)=(E^2-3g_2)\textstyle\prod_{i=1}^{3}(E-3e_i). \tag{3.5}$$

ところで、二重周期関数 $\Xi(x,E)$ と多項式 $Q(E)$ を用いることによって微分方程式 (1.5) の解 $\Lambda(x,E)$ の積分表示を得ることができる。

Proposition 3.2. ([10, Proposition 3.7]) $\Xi(x,E)$ を *Proposition 3.1* で定まっている関数とし、$Q(E)$ を式 *(3.3)* で定まっている多項式とする。すると、関数

$$\Lambda(x,E)=\sqrt{\Xi(x,E)}\exp\int\frac{\sqrt{-Q(E)}dx}{\Xi(x,E)} \tag{3.6}$$

は微分方程式 *(1.5)* の解となる。

さて、微分方程式 (1.5) は基本周期 $(2\omega_1,2\omega_3)$ について周期的であるので、関数たち $\Lambda(x+2\omega_1,E)$, $\Lambda(x+2\omega_3,E)$ も微分方程式 (1.5) の解となる。このとき、関数たち $\Lambda(x+2\omega_1,E)$, $\Lambda(x+2\omega_3,E)$ がもとの解 $\Lambda(x,E)$ たちを用いてどのように表示できるのか、という問題は大域的モノドロミーを求める問題でもあるが、以下の命題はこの問題に対する１つの結果である。

Proposition 3.3. (*c.f.* [12, Theorem 3.7]) $l_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ *(*$i=0,1,2,3$*)* を仮定する。E_0 は $Q(E_0)=0$ をみたす数とすると、ある $q_1,q_3\in\{0,1\}$ について $\Lambda(x+2\omega_k,E_0)=(-1)^{q_k}\Lambda(x,E_0)$ $(k=1,3)$ をみたす。そして、この E_0 と q_1,q_3 を用いると

$$\Lambda(x+2\omega_k,E)=(-1)^{q_k}\Lambda(x,E)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{E_0}^{E}\frac{\int_{0+\varepsilon}^{2\omega_k+\varepsilon}\Xi(x,\tilde{E})dx}{\sqrt{-Q(\tilde{E})}}d\tilde{E}\right) \tag{3.7}$$

が $k=1,3$ に対して成立する。ここで ε は積分路に極を含まないように決められた数で、右辺の値は ε に依存していない。

これより大域的モノドロミーの積分表示をよりわかりやすい形に書き直す。関数 $\wp(x+\omega_i)^n$ は $\left(\frac{d}{dx}\right)^{2j}\wp(x+\omega_i)$ $(j=0,\ldots,n)$ の線形結合で表示できるので、関数 $\Xi(x,E)$ は

$$\Xi(x,E)=c(E)+\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{l_i-1}a_j^{(i)}(E)\left(\frac{d}{dx}\right)^{2j}\wp(x+\omega_i) \tag{3.8}$$

と表示できる。ここで

$$a(E)=\sum_{i=0}^{3}a_0^{(i)}(E) \tag{3.9}$$

とおく。すると、Proposition 3.3 より、$k=1,3$ で

$$\Lambda(x+2\omega_k,E)=(-1)^{q_k}\Lambda(x,E)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{E_0}^{E}\frac{-2\eta_k a(\tilde{E})+2\omega_k c(\tilde{E})}{\sqrt{-Q(\tilde{E})}}d\tilde{E}\right) \tag{3.10}$$

と表示できる。この式は、大域的モノドロミーは E についての種数 g の超楕円積分を用いて表せることを示している。

Example 3. 大域的モノドロミーの超楕円積分による表示式は、$k=1,3$ において以下のようになる。
(i) $l_0=1$, $l_1=l_2=l_3=0$ の場合。この場合は楕円積分による表示式となる。

$$\Lambda(x+2\omega_k,E)=-\Lambda(x,E)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{-e_2}^{E}\frac{2\omega_k\tilde{E}-2\eta_k}{\sqrt{-(\tilde{E}+e_1)(\tilde{E}+e_2)(\tilde{E}+e_3)}}d\tilde{E}\right). \tag{3.11}$$

(ii) $l_0 = 2,\ l_1 = l_2 = l_3 = 0$ の場合。

$$\Lambda(x+2\omega_k, E) = \Lambda(x,E)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{\sqrt{3g_2}}^{E}\frac{-6\eta_k\tilde{E}+\omega_k(2\tilde{E}^2-3g_2)}{\sqrt{-(\tilde{E}^2-3g_2)\prod_{i=1}^{3}(\tilde{E}-3e_i)}}d\tilde{E}\right). \tag{3.12}$$

4. 超楕円積分を楕円積分に帰着させる式

ホインの微分方程式の大域的モノドロミーを表す式として、Hermite-Krichever 仮設法によるもの（式 (2.6)）と超楕円積分によるもの（式 (3.10)）があるが、これらを見比べることで超楕円積分を楕円積分に帰着させる式を導出する。

α, κ は Hermite-Krichever 仮設法からきまる値たち、$Q(E)$, $a(E)$, $c(E)$ は超楕円積分に現れている多項式たちとする。

$$A = -2\alpha - \int_{E_0}^{E}\frac{a(\tilde{E})}{\sqrt{-Q(\tilde{E})}}d\tilde{E}, \tag{4.1}$$

$$B = 2\zeta(\alpha) + 2\kappa + \int_{E_0}^{E}\frac{c(\tilde{E})}{\sqrt{-Q(\tilde{E})}}d\tilde{E}, \tag{4.2}$$

とおく。$k=1$ と $k=3$ の各々の場合に式 (2.6) と式 (3.10) を見比べることにより、ある整数 n_1, n_3 が存在して

$$\eta_1 A + \omega_1 B = \pi\sqrt{-1}(q_1+2n_1), \tag{4.3}$$

$$\eta_3 A + \omega_3 B = \pi\sqrt{-1}(q_3+2n_3), \tag{4.4}$$

が成立することがうかがえる。ルジャンドルの関係式 $\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \pi\sqrt{-1}/2$ を用いて $-A/2$ と $B/2$ を求めることにより、次の式が導かれる。

$$\alpha + \frac{1}{2}\int_{E_0}^{E}\frac{a(\tilde{E})}{\sqrt{-Q(\tilde{E})}}d\tilde{E} = -(q_1+2n_1)\omega_3 + (q_3+2n_3)\omega_1, \tag{4.5}$$

$$\zeta(\alpha) + \kappa + \frac{1}{2}\int_{E_0}^{E}\frac{c(\tilde{E})}{\sqrt{-Q(\tilde{E})}}d\tilde{E} = -(q_1+2n_1)\eta_3 + (q_3+2n_3)\eta_1. \tag{4.6}$$

ところで、$\xi = \wp(\alpha)$ とおくと、$E \to \infty$ としたときに $\alpha \to 0 \pmod{2\omega_1\mathbb{Z} \oplus 2\omega_3\mathbb{Z}}$ となること ([13]) と式 $\int(1/\wp'(\alpha))d\xi = \int d\alpha$ から、

$$\int_{\infty}^{\xi}\frac{d\tilde{\xi}}{\sqrt{4\tilde{\xi}^3 - g_2\tilde{\xi} - g_3}} = \alpha = -\frac{1}{2}\int_{\infty}^{E}\frac{a(\tilde{E})}{\sqrt{-Q(\tilde{E})}}d\tilde{E} \tag{4.7}$$

が成立する。ここで、$Q(E)$ は次数が $2g+1$ の多項式であり、$a(E)$ は次数が g の多項式であるので、式 (4.7) は第一種超楕円積分を第一種楕円積分に帰着させる式となっている。変数変換は、式 (2.5) で出てきた多項式たち $P_1(E)$, $P_2(E)$ を用いて $\xi = P_1(E)/P_2(E)$ と表示できる。5 章にて、この変数変換をよりくわしく調べることにする。α_0 を、$E = E_0$ における α の値とする。式 (4.5) より $\alpha_0 = -(q_1+2n_1)\omega_3 + (q_3+2n_3)\omega_1$ とな

り、また、

$$\alpha - \alpha_0 + \frac{1}{2}\int_{E_0}^{E} \frac{a(\tilde{E})}{\sqrt{-Q(\tilde{E})}} d\tilde{E} = 0, \tag{4.8}$$

が成立する。

κ については、$\alpha_0 \equiv 0 \pmod{2\omega_1\mathbb{Z} \oplus 2\omega_3\mathbb{Z}}$ のときは

$$\kappa = -\frac{1}{2}\int_{E_0}^{E} \frac{c(\tilde{E})}{\sqrt{-Q(\tilde{E})}} d\tilde{E} + \zeta\left(\frac{1}{2}\int_{E_0}^{E} \frac{a(\tilde{E})}{\sqrt{-Q(\tilde{E})}} d\tilde{E}\right), \tag{4.9}$$

が成立し、$\alpha_0 \not\equiv 0 \pmod{2\omega_1\mathbb{Z} \oplus 2\omega_3\mathbb{Z}}$ のときは次の式が成立している。

$$\kappa = -\frac{1}{2}\int_{E_0}^{E} \frac{c(\tilde{E})}{\sqrt{-Q(\tilde{E})}} d\tilde{E} + \int_{\wp(\alpha_0)}^{\xi} \frac{\tilde{\xi} d\tilde{\xi}}{\sqrt{4\tilde{\xi}^3 - g_2\tilde{\xi} - g_3}}. \tag{4.10}$$

ここで、$Q(E)$ は次数が $2g+1$ の多項式、$c(E)$ は次数が $g+1$ の多項式であり、κ は式 (2.5) で出てきた多項式たち $P_3(E), P_4(E)$ を用いて $\kappa = P_3(E)\sqrt{-Q(E)}/P_4(E)$ と表示されているので、式 (4.10) は第二種超楕円積分を第二種楕円積分に帰着させる式となっている。

例については、6 章に載せてある。

5. Twisted Heun polynomial と Theta-twisted Heun polynomial

Theorem 2.1 にて $\wp(\alpha)$ と $\kappa/\sqrt{-Q(E)}$ は E の有理関数となることが示されているのだが、この章では、この有理関数をより詳しく調べていく。

[13] により、$E \to \infty$ としたときに $\alpha \to 0 \pmod{2\omega_1\mathbb{Z} \oplus 2\omega_3\mathbb{Z}}$ が成立することと、さらにくわしく、$\wp(\alpha), \kappa$ は

$$\wp(\alpha) - e_k = -\frac{4N_k(E)}{(\sum_{i=0}^{3} l_i(l_i+1))^2 D_k(E)}, \quad (k=1,2,3), \tag{5.1}$$

$$\kappa = \left(1 - \frac{2}{\sum_{i=0}^{3} l_i(l_i+1)}\right)\frac{P_\kappa(E)}{\tilde{P}_\kappa(E)}\sqrt{-Q(E)}, \tag{5.2}$$

という表示をもつことがわかっている。ここで、$N_k(E), D_k(E)$ $(k=1,2,3)$, $P_\kappa(E)$, $\tilde{P}_\kappa(E)$ はモニックな多項式で、$\deg_E N_k(E) = 1 + \deg_E D_k(E)$, $\deg_E P_\kappa(E) = \deg_E \tilde{P}_\kappa(E) - g$ をみたしているものである。これから、この多項式たち、とくにそれらの零点たちを調べていく。

p は、$\sum_{i=0}^{3} l_i\omega_i \equiv \omega_p \pmod{2\omega_1\mathbb{Z} \oplus 2\omega_3\mathbb{Z}}$ をみたす 0, 1, 2, 3 のいずれかの整数とする。

さて、Hermite-Krichever 仮設法にでてくる α が、$\alpha \equiv \omega_p \pmod{2\omega_1\mathbb{Z} \oplus 2\omega_3\mathbb{Z}}$ をみたすとする。このとき、Hermite-Krichever 仮設法の形でかけるホインの微分方程式の解 $f(x)$ は、$z = \wp(x)$ とおくことにより

$$f(x) = \exp(\bar{\kappa}x)\frac{\left(\sum_{j=0}^{\tilde{l}^{(0)}} \bar{a}_j(z-e_2)^j\right) + \sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}\left(\sum_{j=0}^{\tilde{l}^{(0)}} \bar{b}_j(z-e_2)^j\right)}{(z-e_1)^{l_1/2}(z-e_2)^{l_2/2}(z-e_3)^{l_3/2}}, \tag{5.3}$$

と表示できる。ここで、$\hat{l}^{(0)}$ は $(l_0+l_1+l_2+l_3)/2$ を超えない最大の整数、$\check{l}^{(0)}$ は $(l_0+l_1+l_2+l_3-3)/2$ を超えない最大の整数である。A_p という集合を、解 $f(x)$ が式 (5.3) の表示をもつもので $\bar{\kappa}=0$ となるような固有値 E たちの集合、B_p という集合を、解 $f(x)$ が式 (5.3) の表示をもつもので $\bar{\kappa}\neq 0$ となるような固有値 E たちの集合として定める。

また、$p'\in\{0,1,2,3\}\setminus\{p\}$ について、α は、$\alpha\equiv\omega_{p'} \pmod{2\omega_1\mathbb{Z}\oplus 2\omega_3\mathbb{Z}}$ を満たしているとする。$k\in\{1,2,3\}$ を、$\omega_{p'}\equiv\omega_p+\omega_k \pmod{2\omega_1\mathbb{Z}\oplus 2\omega_3\mathbb{Z}}$ により定めると、Hermite-Krichever 仮設法の形でかけるホインの微分方程式の解 $f(x)$ は、$z=\wp(x)$ とおくことにより

$$f(x)=\exp(\kappa x)\frac{\sqrt{z-e_k}\left(\sum_{j=0}^{\hat{l}}a_j(z-e_k)^j\right)+\sqrt{(z-e_{k'})(z-e_{k''})}\left(\sum_{j=0}^{\check{l}}b_j(z-e_k)^j\right)}{(z-e_1)^{l_1/2}(z-e_2)^{l_2/2}(z-e_3)^{l_3/2}},\tag{5.4}$$

と表示できる。ここで、$\hat{l}$ は $(l_0+l_1+l_2+l_3-1)/2$ を超えない最大の整数、$\check{l}$ は $(l_0+l_1+l_2+l_3-2)/2$ を超えない最大の整数である。$A_{p'}$ という集合を、解 $f(x)$ が式 (5.4) の表示をもつもので $\kappa=0$ となるような固有値 E たちの集合、$B_{p'}$ という集合を、解 $f(x)$ が式 (5.4) の表示をもつもので $\bar{\kappa}\neq 0$ となるような固有値 E たちの集合として定める。

集合たち $A_i,\ B_i\ (i=0,1,2,3)$ について、以下の命題が成立することが知られている。

Proposition 5.1. ([13]) *(i)* 8つの集合たち $A_i,\ B_i\ (i=0,1,2,3)$ において、この中のどの2つも共通部分を持たない。
(ii) 集合 $\cup_{i=0}^{3}A_i$ は多項式 $Q(E)$ の零点集合と一致する。

$\wp(\alpha)-e_k\ (k=1,2,3)$ の E による表示式は、集合 $A_i,\ B_i\ (i=0,k)$ を用いて以下のように表すことができる。

Proposition 5.2. ([13]) $m(E')$ を $a(E)$ の $E=E'$ での零点の重複度、つまり $a(E)=(E-E')^{m(E')}\tilde{a}(E)$ かつ $\tilde{a}(E')\neq 0$ をみたす数とし、$\tilde{m}(E')$ を $Q(E)$ の $E=E'$ での零点の重複度とする。多項式 $D(E),\ N_k(E)$ を

$$D(E)=\prod_{E'\in A_0}(E-E')^{2+2m(E')-\tilde{m}(E')}\prod_{E'\in B_0}(E-E')^{2+2m(E')},\tag{5.5}$$

$$N_k(E)=\prod_{E'\in A_k}(E-E')^{2+2m(E')-\tilde{m}(E')}\prod_{E'\in B_k}(E-E')^{2+2m(E')},\quad (k=1,2,3).\tag{5.6}$$

によって定義する。すると、

$$\wp(\alpha)=e_k-\frac{4N_k(E)}{(\sum_{i=0}^{3}l_i(l_i+1))^2D(E)}\tag{5.7}$$

が成立し、次数については $\deg_E N_k(E)=1+\deg_E D(E)$ が成立する。

系として、以下のものが得られる。

Corollary 5.3. ([13]) $E' \in \cup_{i=0}^{3}(A_i \cup B_i)$ において $a(E') \neq 0$ が成立して代数方程式 $Q(E)=0$ が重解をもたないと仮定する。多項式 $D(E)$, $N_k(E)$ を

$$D(E) = \prod_{E' \in A_0} (E - E') \prod_{E' \in B_0} (E - E')^2, \tag{5.8}$$

$$N_k(E) = \prod_{E' \in A_k} (E - E') \prod_{E' \in B_k} (E - E')^2, \quad (k = 1,2,3). \tag{5.9}$$

によって定義すると、

$$\wp(\alpha) = e_k - \frac{4N_k(E)}{(\sum_{i=0}^{3} l_i(l_i+1))^2 D(E)} \tag{5.10}$$

と $\deg_E N_k(E) = 1 + \deg_E D(E)$ が成立する。

これより、集合たち A_i, B_i $(i = 0,1,2,3)$ をより具体的に表示するため、Heun polynomial と twisted Heun polynomial を導入する。また、これらの多項式による $\wp(\alpha)$ の E を用いた表示式も求めてゆく。

まず、集合 A_i $(i = 0,1,2,3)$ を調べるために Heun polynomial を導入する。この Heun polynomial は準可解性と関連するものである ([11, §5])。

β_0, β_1, β_2, β_3 は、$-\sum_{i=0}^{3} \beta_i \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ をみたす整数とする。ベクトル空間 $V_{\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3}$ を $\left\{\wp_1(x)^{\beta_1}\wp_2(x)^{\beta_2}\wp_3(x)^{\beta_3}\wp(x)^n\right\}_{n=0,\dots,-\sum_{i=0}^{3}\beta_i/2}$ によって生成されるものとする。

$i \in \{0,1,2,3\}$ とし、それぞれの i に対して α_i を $-l_i$ と l_i+1 のいずれかとし、ベクトル空間 $U_{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$ を

$$U_{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} = \begin{cases} V_{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}, & \sum_{i=0}^{3} \alpha_i/2 \in \mathbb{Z}_{\leq 0}; \\ V_{1-\alpha_0,1-\alpha_1,1-\alpha_2,1-\alpha_3}, & \sum_{i=0}^{3} \alpha_i/2 \in \mathbb{Z}_{\geq 2}; \\ \{0\}, & \text{その他の場合}. \end{cases} \tag{5.11}$$

で定める。$l_0+l_1+l_2+l_3$ が偶数のときには、ハミルトニアン H（式 (1.4)）は以下のベクトル空間たち

$$U_{-l_0,-l_1,-l_2,-l_3}, \quad U_{-l_0,-l_1,l_2+1,l_3+1}, \quad U_{-l_0,l_1+1,-l_2,l_3+1}, \quad U_{-l_0,l_1+1,l_2+1,-l_3}, \tag{5.12}$$

に閉じて作用し、$l_0+l_1+l_2+l_3$ が奇数のときには、ハミルトニアン H は以下のベクトル空間たち

$$U_{-l_0,-l_1,-l_2,l_3+1}, \quad U_{-l_0,-l_1,l_2+1,-l_3}, \quad U_{-l_0,l_1+1,-l_2,-l_3}, \quad U_{l_0+1,-l_1,-l_2,-l_3}. \tag{5.13}$$

に閉じて作用することが確かめられる [11]。この設定で、以下の命題が成立している。

Proposition 5.4. ([13]) $i \in \{0,1,2,3\}$ とする。それぞれの i に対し、式 *(5.12)* または式 *(5.13)* の中のベクトル空間 $U_{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$ で $\sum_{k=1}^{3} \alpha_k\omega_k \equiv \omega_i$ *(mod* $2\omega_1\mathbb{Z} \oplus 2\omega_3\mathbb{Z}$*)* をみたすものがただ一つ存在する。さらに、集合 A_i は、空間 $U_{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$ におけるハミルトニアン H の固有値の集合と一致する。

$i \in \{0,1,2,3\}$ に対し、Proposition 5.4 でのベクトル空間における H の作用についてのモニックな固有多項式を $H^{(i)}(E)$ と記し、Heun polynomial と呼ぶことにする。Proposition 5.4 より、集合 A_i $(i = 0,1,2,3)$ は Heun polynomial $H^{(i)}(E)$ の零点集合と一致することがわかる。

次に、集合 B_i $(i = 0,1,2,3)$ に関連する形で twisted Heun polynomial を導入する。p を $\sum_{i=0}^{3} l_i\omega_i \equiv \omega_p$ (mod $2\omega_1\mathbb{Z} \oplus 2\omega_3\mathbb{Z}$) をみたす数とする。ここでは簡単のた

め、$l_0+l_1+l_2+l_3$ が偶数で $l_0>l_1+l_2+l_3-4$ のときに twisted Heun polynomial $Ht^{(p)}(E)$ の定義の仕方を述べる。$l_0+l_1+l_2+l_3$ が奇数または $l_0\leq l_1+l_2+l_3-4$ のときの $Ht^{(p)}(E)$ や $i\in\{0,1,2,3\}\setminus\{p\}$ の場合の $Ht^{(i)}(E)$ についてもほぼ同様に導入できるが、詳しくは [13] を参照のこと。

条件 $E\in B_p$ は、微分方程式 (1.5) の解で式 (5.3) の形で書けて $\bar{\kappa}\neq 0$ をみたすものが存在することと同値であるので、この状況を考察していく。

$$s_j=\frac{\exp(\bar{\kappa}x)(\wp(x)-e_2)^j}{(\wp(x)-e_1)^{l_1/2}(\wp(x)-e_2)^{l_2/2}(\wp(x)-e_3)^{l_3/2}}, \tag{5.14}$$

$$t_j=\frac{\exp(\bar{\kappa}x)(\wp(x)-e_2)^j}{(\wp(x)-e_1)^{l_1/2-1}(\wp(x)-e_2)^{l_2/2-1}(\wp(x)-e_3)^{l_3/2-1}}, \tag{5.15}$$

とおく。すると、式 (5.3) での $f(x)$ は

$$f(x)=\sum_{j=0}^{\tilde{l}^{(0)}}\bar{a}_j s_j+\sum_{j=0}^{\tilde{l}^{(0)}}\bar{b}_j t_j, \tag{5.16}$$

と書き換えられる。また、この式で現れない項の係数 $\bar{a}_j$, $\bar{b}_j$ については $\bar{a}_j=0$, $\bar{b}_j=0$ としておく。式 (5.16) を微分方程式 (1.5) に代入して s_{j+4} と t_{j+4} についての係数を比較することにより、関係式

$$\begin{aligned}&(l_1+l_2+l_3-l_0-1-2j)(l_1+l_2+l_3+l_0-2j)\bar{a}_j \\ &+\sum_{j'=j+1}^{j+4}\bar{a}_{j'}c_{\bar{a}\bar{a}}(j,j',\bar{\kappa})+\bar{\kappa}\sum_{j'=j-1}^{j+3}\bar{b}_{j'}c_{\bar{a}\bar{b}}(j,j',\bar{\kappa})=0\end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned}&(l_1+l_2+l_3-l_0-4-2j)(l_1+l_2+l_3+l_0-3-2j)\bar{b}_j \\ &+\sum_{j'=j+1}^{j+4}\bar{b}_{j'}c_{\bar{b}\bar{b}}(j,j',\bar{\kappa})+\bar{\kappa}\sum_{j'=j+2}^{j+4}\bar{a}_{j'}c_{\bar{b}\bar{a}}(j,j',\bar{\kappa})=0,\end{aligned} \tag{5.18}$$

が得られる。ここで $c_{\bar{a}\bar{a}}(j,j',\bar{\kappa})$, $c_{\bar{a}\bar{b}}(j,j',\bar{\kappa})$, $c_{\bar{b}\bar{a}}(j,j',\bar{\kappa})$, $c_{\bar{b}\bar{b}}(j,j',\bar{\kappa})$ は、e_1, e_2, e_3, $\bar{\kappa}$, E についての多項式として書けるものである。正規化のため $\bar{a}_{\tilde{l}^{(0)}}=1$ とおくことにする。

$l_0+l_1+l_2+l_3$ が偶数で $l_0>l_1+l_2+l_3-4$ が成立するときには、係数たち $\bar{b}_{\tilde{l}^{(0)}-2},\bar{a}_{\tilde{l}^{(0)}-1},\bar{b}_{\tilde{l}^{(0)}-3},\dots,\bar{a}_0$ は式 (5.17, 5.18) により漸化的に決まっていく。さらに式 (1.5) を満たすために、式 (5.16) を微分方程式に代入したもので $j=0,1,2,3$ における s_j と t_j の係数が 0 とならなければならない。これは、$\bar{\kappa},E$ についての連立代数方程式となっている。この連立代数方程式において、グレブナ基底の理論での消去法によって $\bar{\kappa}$ についての次数を落としていき、$\bar{\kappa}=0$ に対応する解については除外していく。すると、$Ht^{(p)}(E)=0$ という E についての多項式に関する式が得られる。ここで、モニックであるように正規化された多項式 $Ht^{(p)}(E)$ を twisted Heun polynomial と呼ぶことにする。これは、Maier が twisted Lamé polynomial を定義したときの方法 [6] と同様のものである。

$l_0+l_1+l_2+l_3$ が奇数または $l_0\leq l_1+l_2+l_3-4$ のときの twisted Heun polynomial $Ht^{(p)}(E)$ や $i\in\{0,1,2,3\}\setminus\{p\}$ の場合での $Ht^{(i)}(E)$ についても、[13] にてほぼ同様に定義されている。また、twisted Heun polynomial の定義より、集合 B_i $(i=0,1,2,3)$ と $Ht^{(i)}(E)$ の零点集合が一致している。

もともとの懸案であった $\wp(\alpha)$ の計算であるが、ある仮定のもとでは Heun polynomial と twisted Heun polynomial を用いて表示できることがわかった。

Theorem 5.5. ([13]) ジェネリックな周期 $(2\omega_1, 2\omega_3)$ について多項式たち $H^{(i)}(E)$ と $Ht^{(i)}(E)$ はすべて重複零点をもたずこれらの零点と多項式 $a(E)$ の零点は共通部分をもたないと仮定する。すると、

$$\wp(\alpha) = e_k - \frac{4H^{(k)}(E)Ht^{(k)}(E)^2}{(\sum_{i=0}^{3} l_i(l_i+1))^2 H^{(0)}(E)Ht^{(0)}(E)^2} \tag{5.19}$$

と $\deg_E H^{(k)}(E)Ht^{(k)}(E)^2 = 1 + \deg_E H^{(0)}(E)Ht^{(0)}(E)^2$ が $k = 1,2,3$ に対して成立する。

なお、この定理の仮定は、$g \leq 3$ のとき、つまり多項式 $Q(E)$ の次数が 7 以下のときは正しいことがわかっているので ([13])、このとき定理の表示式は正しいことがわかる。

ところで、κ については、集合 A_0, B_0 を用いて以下のように表示できることが知られている。

Proposition 5.6. ([13]) すべての $E' \in \cup_{i=0}^{3}(A_i \cup B_i)$ で $a(E') \neq 0$ が成立して代数方程式 $Q(E) = 0$ が重解をもたないと仮定する。このとき、あるモニックな多項式 $P_\kappa(E)$ で

$$\kappa = \left(1 - \frac{2}{\sum_{i=0}^{3} l_i(l_i+1)}\right) \frac{P_\kappa(E)}{\prod_{E'\in A_0}(E-E')\prod_{E'\in B_0}(E-E')}\sqrt{-Q(E)} \tag{5.20}$$

と $\deg_E P_\kappa(E) = \deg_E(\prod_{E'\in A_0}(E-E')\prod_{E'\in B_0}(E-E')) - g$ をみたすものが存在する。

式 (5.20) で現れた多項式 $P_\kappa(E)$ を計算するために theta-twisted Heun polynomial $H\theta(E)$ を導入する。ここでは $\sum_{i=0}^{3} l_i\omega_i \equiv 0 \pmod{2\omega_1\mathbb{Z} \oplus 2\omega_3\mathbb{Z}}$ で $l_0 + l_1 + l_2 + l_3$ が偶数であり $l_0 > l_1 + l_2 + l_3 - 2$ が成立する場合について考察する。その他の場合については [13] を参照されたい。

u_j, v_j を

$$u_j = \frac{\Phi_0(x,\alpha)(\wp(x)-e_2)^j}{(\wp(x)-e_1)^{l_1/2}(\wp(x)-e_2)^{l_2/2}(\wp(x)-e_3)^{l_3/2}}, \tag{5.21}$$

$$v_j = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi_0(x,\alpha)\right)(\wp(x)-e_2)^j}{(\wp(x)-e_1)^{l_1/2}(\wp(x)-e_2)^{l_2/2}(\wp(x)-e_3)^{l_3/2}}, \tag{5.22}$$

により定める。$f(x)$ は式 (2.3) で表されている関数とし、$\kappa = 0$ と $\alpha \not\equiv 0 \pmod{\omega_1\mathbb{Z} \oplus \omega_3\mathbb{Z}}$ を仮定する。$\sum_{i=0}^{3} l_i\omega_i \equiv 0 \pmod{2\omega_1\mathbb{Z} \oplus 2\omega_3\mathbb{Z}}$ という前提があるので、関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\hat{l}} c_j u_j + \sum_{j=0}^{\tilde{l}} d_j v_j \tag{5.23}$$

と表示できる。また、式 (5.23) を式 (1.5) に代入し、u_{j+4}, v_{j+4} の係数を比べることにより、関係式

$$(l_1+l_2+l_3-l_0-2-2j)(l_1+l_2+l_3+l_0-1-2j)c_j \\ +\sum_{j'=j+1}^{j+4} c_{j'}c_{cc}(j,j',\alpha)+\wp'(\alpha)\sum_{j'=j+2}^{j+4} d_{j'}c_{cd}(j,j',\alpha)=0 \tag{5.24}$$

$$(l_1+l_2+l_3-l_0-3-2j)(l_1+l_2+l_3+l_0-2-2j)d_j \\ +\sum_{j'=j+1}^{j+4} d_{j'}c_{dd}(j,j',\alpha)+\wp'(\alpha)\sum_{j'=j+1}^{j+4} c_{j'}c_{dc}(j,j',\alpha)=0, \tag{5.25}$$

が得られる。ここで $c_{cc}(j,j',\alpha)$, $c_{cd}(j,j',\alpha)$, $c_{dc}(j,j',\alpha)$, $c_{dd}(j,j',\alpha)$ は e_1, e_2, e_3, $\wp(\alpha)$, $\wp'(\alpha)$, E についての多項式として書けるものである。正規化のため $d_{\tilde{l}}=1$ とおく。

もし $l_0+l_1+l_2+l_3$ が偶数で $l_0>l_1+l_2+l_3-2$ が成り立つならば、式 (5.24, 5.25) により $c_{\tilde{l}}, d_{\tilde{l}-1}, c_{\tilde{l}-1}, \dots, c_0$ は漸化的に決まっていく。また、微分方程式 (1.5) が成立するために、式 (5.23) を式 (1.5) に代入したものにおいて u_j, v_j $(j=0,1,2,3)$ の係数が 0 とならなければならない。よって、$\wp(\alpha), \wp'(\alpha), E$ についての連立代数方程式が得られる。

この連立代数方程式に関係式 $\wp'(\alpha)^2=4(\wp(\alpha)-e_1)(\wp(\alpha)-e_2)(\wp(\alpha)-e_3)$ を加えたものについて、グレブナ基底の理論での消去法を用いて $\wp(\alpha), \wp'(\alpha)$ についての次数を落としていき、$\alpha\equiv 0 \pmod{\omega_1\mathbb{Z}\oplus\omega_3\mathbb{Z}}$ に対応する解を除外していく。すると、$H\theta(E)=0$ という E についいの多項式に関する式が得られる。ここで、モニックであるように正規化された多項式 $H\theta(E)$ を theta-twisted Heun polynomial と呼ぶことにする。これは、Maier が theta-twisted Lamé polynomial を定義したときの方法 [6] と同様のものである。

$l_0+l_1+l_2+l_3$ が奇数または $l_0\le l_1+l_2+l_3-2$ の場合や $\sum_{i=0}^{3} l_i\omega_i \not\equiv 0 \pmod{2\omega_1\mathbb{Z}\oplus 2\omega_3\mathbb{Z}}$ の場合においても、ほぼ同様の方法で theta-twisted Heun polynomial $H\theta(E)$ を定義することができる ([13])。

κ の E による表示式と多項式 $H\theta(E)$ に関して、次の定理が成立する。

Theorem 5.7. ([13]) 仮定として、ジェネリックな周期 $(2\omega_1, 2\omega_3)$ に対し、多項式たち $a(E)$, $Q(E)$, $H\theta(E)$, $H^{(i)}(E)$, $Ht^{(i)}(E)$, $(i=0,1,2,3)$ はそれぞれ重複零点をもたず、多項式 $a(E)$, $H\theta(E)$, $H^{(i)}(E)$, $Ht^{(i)}(E)$, $(i=0,1,2,3)$ たちは共通零点をもたず、

$$\deg_E H\theta(E)-\deg_E H^{(0)}(E)Ht^{(0)}(E)=-g, \tag{5.26}$$

が成立するとしておく。すると、

$$\kappa=\left(1-\frac{2}{\sum_{i=0}^{3} l_i(l_i+1)}\right)\frac{H\theta(E)}{H^{(0)}(E)Ht^{(0)}(E)}\sqrt{-Q(E)}, \tag{5.27}$$

が成立している。

なお、この定理の仮定は、$g\le 3$ のとき、つまり多項式 $Q(E)$ の次数が 7 以下のときは正しいことがわかっているので ([13])、このとき定理の表示式は正しいことがわかる。

6. 計算例

前章にて、Theorem 5.5 と Theorem 5.7 が $g \le 3$ のときに成立すると述べたが、$g \le 3$ となるのはどのような場合であるのかということを書き下しておく。

まず、$g=1$ となるのは、

$$(l_0, l_1, l_2, l_3) = (1,0,0,0),\ (1,1,0,0),\ (1,1,1,1),$$

の場合と、それぞれについて l_0, l_1, l_2, l_3 を入れ替えた場合である。

次に、$g=2$ となるのは、

$$(l_0, l_1, l_2, l_3) = \begin{cases} (2,0,0,0),\ (2,1,0,0),\ (2,1,1,0),\ (2,2,0,0), \\ (2,2,1,1),\ (2,2,2,2),\ (1,1,1,0), \end{cases}$$

の場合と、それぞれについて l_0, l_1, l_2, l_3 を入れ替えた場合である。

そして、$g=3$ となるのは、

$$(l_0, l_1, l_2, l_3) = \begin{cases} (3,0,0,0),\ (3,1,0,0),\ (3,1,1,0),\ (3,1,1,1),\ (3,2,0,0), \\ (3,2,1,0),\ (3,2,2,1),\ (3,3,0,0),\ (3,3,1,1),\ (3,3,2,2), \\ (3,3,3,3),\ (2,1,1,1),\ (2,2,1,0),\ (2,2,2,0), \end{cases}$$

の場合と、それぞれについて l_0, l_1, l_2, l_3 を入れ替えた場合である。

$g \le 3$ の場合には微分方程式 (1.5) の解のモノドロミーの２通りの式と超楕円積分を楕円積分に帰着させる式は [13] によって計算されているが、本稿では、その中のいくつかの場合の計算例を、より平易な形で挙げておく。

6.1. $(l_0, l_1, l_2, l_3) = (1,0,0,0)$ の場合.

二重周期関数 $\Xi(x,E)$ と多項式 $Q(E)$ は

$$\Xi(x,E) = \wp(x) + E, \quad Q(E) = (E+e_1)(E+e_2)(E+e_3), \tag{6.1}$$

と計算される。微分方程式 (1.5) の解

$$\Lambda(x,E) = \sqrt{\Xi(x,E)} \exp \int \frac{\sqrt{-Q(E)}dx}{\Xi(x,E)} \tag{6.2}$$

の超楕円積分によるモノドロミーの表示式は、$k=1,3$ において

$$\Lambda(x+2\omega_k, E) = -\Lambda(x,E) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{-e_2}^{E} \frac{2\omega_k \tilde{E} - 2\eta_k}{\sqrt{-(\tilde{E}+e_1)(\tilde{E}+e_2)(\tilde{E}+e_3)}} d\tilde{E} \right) \tag{6.3}$$

となり、楕円積分による表示となっている。

また、Hermite-Krichever 仮設法による解を求めるということは、

$$f(x) = \exp(\kappa x) \left(\tilde{b}_0^{(0)} \Phi_0(x,\alpha) \right) \tag{6.4}$$

の形の解を求めることに対応し、$\wp(\alpha)$, κ は

$$\wp(\alpha) = -E, \quad \kappa = 0, \tag{6.5}$$

と計算される。ここで定まった α を用いることにより、モノドロミーは、$k=1,3$ に対して

$$f(x+2\omega_k, E) = (-2\eta_k \alpha + 2\omega_k \zeta(\alpha)) f(x) \tag{6.6}$$

と表示できる。この場合での積分の変換公式は、$\xi = -E$ によるものとなり、自明なものとなっている。

6.2. $(l_0, l_1, l_2, l_3) = (1,1,0,0)$ の場合.

二重周期関数 $\Xi(x,E)$ と多項式 $Q(E)$ は

$$\Xi(x,E) = E + \wp(x) + \wp(x+\omega_1) - 3e_1, \tag{6.7}$$

$$Q(E) = (E-4e_1)(E^2 - 2e_1E + g_2 - 11e_1^2), \tag{6.8}$$

と計算される。微分方程式 (1.5) の解

$$\Lambda(x,E) = \sqrt{\Xi(x,E)}\exp\int\frac{\sqrt{-Q(E)}dx}{\Xi(x,E)} \tag{6.9}$$

の超楕円積分によるモノドロミーの表示式は、$k=1,3$ において

$$\Lambda(x+2\omega_k,E) = \Lambda(x,E)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{4e_1}^{E}\frac{2\omega_k(\tilde{E}-3e_1)-4\eta_k}{\sqrt{-(\tilde{E}-4e_1)(\tilde{E}^2-2e_1\tilde{E}+g_2-11e_1^2)}}d\tilde{E}\right) \tag{6.10}$$

となっており、楕円積分による表示となっている。

また、Hermite-Krichever 仮設法による解を求めるということは、

$$f(x) = \exp(\kappa x)\left(\tilde{b}_0^{(0)}\Phi_0(x,\alpha) + \tilde{b}_0^{(1)}\Phi_1(x,\alpha)\right) \tag{6.11}$$

の形の解を求めることに対応し、$\wp(\alpha)$, κ は

$$\wp(\alpha) = e_1 - \frac{E^2-2e_1E+g_2-11e_1^2}{4(E-4e_1)}, \quad \kappa = \frac{\sqrt{-Q(E)}}{2(E-4e_1)}, \tag{6.12}$$

と計算される。ここで定まった α, κ を用いることにより、モノドロミーは、$k=1,3$ に対して

$$f(x+2\omega_k,E) = (-2\eta_k\alpha + 2\omega_k\zeta(\alpha) + 2\kappa\omega_k)f(x) \tag{6.13}$$

と表示できる。モノドロミーの２つの表示式に付随して、

$$\xi = e_1 - \frac{E^2-2e_1E+g_2-11e_1^2}{4(E-4e_1)} \tag{6.14}$$

という変数変換により、２つの式

$$\int_\infty^\xi\frac{d\tilde{\xi}}{\sqrt{4\tilde{\xi}^3-g_2\tilde{\xi}-g_3}} = -\frac{1}{2}\int_\infty^E\frac{2}{\sqrt{-Q(\tilde{E})}}d\tilde{E}, \tag{6.15}$$

$$\frac{1}{2}\int_{E_0}^E\frac{\tilde{E}-3e_1}{\sqrt{-Q(\tilde{E})}}d\tilde{E} = -\kappa + \int_{e_1}^\xi\frac{\tilde{\xi}d\tilde{\xi}}{\sqrt{4\tilde{\xi}^3-g_2\tilde{\xi}-g_3}}, \tag{6.16}$$

が得られる。ここで E_0 は、$E_0^2 - 2e_1E_0 + g_2 - 11e_1^2 = 0$ をみたす数である。この変換は、周期 $(2\omega_1, 2\omega_3)$ を $(\omega_1, 2\omega_3)$ に変えたときの Landen 変換と関連していることを付記しておく。

6.3. $(l_0, l_1, l_2, l_3) = (2, 0, 0, 0)$ の場合.

二重周期関数 $\Xi(x, E)$ と多項式 $Q(E)$ は

$$\Xi(x, E) = 9\wp(x)^2 + 3E\wp(x) + E^2 - 9g_2/4, \quad Q(E) = (E^2 - 3g_2)\prod_{i=1}^{3}(E - 3e_i), \tag{6.17}$$

と計算される。微分方程式 (1.5) の解

$$\Lambda(x, E) = \sqrt{\Xi(x, E)} \exp \int \frac{\sqrt{-Q(E)}dx}{\Xi(x, E)} \tag{6.18}$$

の超楕円積分によるモノドロミーの表示式は、

$$a(E) = 3E, \quad c(E) = E^2 - \tfrac{3}{2}g_2, \tag{6.19}$$

とおくことにより、$k = 1, 3$ において

$$\Lambda(x + 2\omega_k, E) = \Lambda(x, E) \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{\sqrt{3g_2}}^{E} \frac{-2\eta_k a(\tilde{E}) + 2\omega_k c(\tilde{E})}{\sqrt{-Q(\tilde{E})}} d\tilde{E}\right) \tag{6.20}$$

となる。

また、Hermite-Krichever 仮設法による解を求めるということは、

$$f(x) = \exp(\kappa x)\left(\tilde{b}_0^{(0)}\Phi_0(x, \alpha) + \tilde{b}_1^{(0)}\left(\frac{d}{dx}\right)\Phi_0(x, \alpha)\right) \tag{6.21}$$

の形の解を求めることに対応し、$\wp(\alpha)$, κ は

$$\wp(\alpha) = e_k - \frac{(E - 3e_k)(E + 6e_k)^2}{9(E^2 - 3g_2)} \quad (k = 1, 2, 3), \quad \kappa = \frac{2\sqrt{-Q(E)}}{3(E^2 - 3g_2)}, \tag{6.22}$$

と計算される。ここで定まった α, κ を用いることにより、モノドロミーは、$k = 1, 3$ に対して

$$f(x + 2\omega_k, E) = (-2\eta_k\alpha + 2\omega_k\zeta(\alpha) + 2\kappa\omega_k)f(x) \tag{6.23}$$

と表示できる。モノドロミーの2つの表示式に付随して、

$$\xi = e_1 - \frac{(E - 3e_1)(E + 6e_1)^2}{9(E^2 - 3g_2)} \tag{6.24}$$

という変数変換により、超楕円積分を楕円積分に帰着する式

$$\int_{\infty}^{\xi} \frac{d\tilde{\xi}}{\sqrt{4\tilde{\xi}^3 - g_2\tilde{\xi} - g_3}} = -\frac{1}{2}\int_{\infty}^{E} \frac{a(\tilde{E})}{\sqrt{-Q(\tilde{E})}} d\tilde{E}, \tag{6.25}$$

$$\frac{1}{2}\int_{3e_1}^{E} \frac{c(\tilde{E})}{\sqrt{-Q(\tilde{E})}} d\tilde{E} = -\kappa + \int_{e_1}^{\xi} \frac{\tilde{\xi}d\tilde{\xi}}{\sqrt{4\tilde{\xi}^3 - g_2\tilde{\xi} - g_3}}, \tag{6.26}$$

が得られる。

$\xi = -y/6$, $E = z$, $g_2 = a/3$, $g_3 = b/54$, とおくことにより、式 (6.25) より式 (1.1) が、式 (6.26) より式 (1.7) が導き出される。

6.4. $(l_0,l_1,l_2,l_3)=(0,1,1,1)$ の場合.

二重周期関数 $\Xi(x,E)$ と多項式 $Q(E)$ は

$$\Xi(x,E)=E^2-3g_2/2+\sum_{i=1}^{3}(E-3e_i)\wp(x+\omega_i), \tag{6.27}$$

$$Q(E)=(E^2-3g_2)\prod_{i=1}^{3}(E-3e_i), \tag{6.28}$$

と計算される。微分方程式 (1.5) の解

$$\Lambda(x,E)=\sqrt{\Xi(x,E)}\exp\int\frac{\sqrt{-Q(E)}dx}{\Xi(x,E)} \tag{6.29}$$

の超楕円積分によるモノドロミーの表示式は、

$$a(E)=3E,\quad c(E)=E^2-\tfrac{3}{2}g_2, \tag{6.30}$$

とおくことにより、$k=1,3$ において

$$\Lambda(x+2\omega_k,E)=\Lambda(x,E)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{\sqrt{3g_2}}^{E}\frac{-2\eta_k a(\tilde{E})+2\omega_k c(\tilde{E})}{\sqrt{-Q(\tilde{E})}}d\tilde{E}\right) \tag{6.31}$$

となり、$(l_0,l_1,l_2,l_3)=(2,0,0,0)$ の場合と同じになっている。

また、Hermite-Krichever 仮設法による解を求めるということは、

$$f(x)=\exp(\kappa x)\left(\tilde{b}_0^{(1)}\Phi_1(x,\alpha)+\tilde{b}_0^{(2)}\Phi_2(x,\alpha)+\tilde{b}_0^{(3)}\Phi_3(x,\alpha)\right) \tag{6.32}$$

の形の解を求めることに対応し、$\wp(\alpha)$, κ は

$$\wp(\alpha)=e_k-\frac{(E-3e_k)(E+6e_k)^2}{9(E^2-3g_2)}\quad(k=1,2,3),\quad \kappa=\frac{2\sqrt{-Q(E)}}{3(E^2-3g_2)}, \tag{6.33}$$

と計算される。よって、Hermite-Krichever 仮設法による解のモノドロミーの式も $(l_0,l_1,l_2,l_3)=(2,0,0,0)$ の場合と同じになっている。超楕円積分を楕円積分に帰着する式も $(l_0,l_1,l_2,l_3)=(2,0,0,0)$ の場合と同じとなる。

6.5. $(l_0,l_1,l_2,l_3)=(3,0,0,0)$ の場合.

二重周期関数 $\Xi(x,E)$ と多項式 $Q(E)$ は

$$\Xi(x,E)=225\wp(x)^3+45E\wp(x)^2+6(E^2-\tfrac{75}{8}g_2)\wp(x)+E^3-15g_2E-\tfrac{225}{4}g_3, \tag{6.34}$$

$$Q(E)=E\prod_{i=1}^{3}(E^2+6e_iE+45e_i^2-15g_2), \tag{6.35}$$

と計算される。微分方程式 (1.5) の解

$$\Lambda(x,E)=\sqrt{\Xi(x,E)}\exp\int\frac{\sqrt{-Q(E)}dx}{\Xi(x,E)} \tag{6.36}$$

の超楕円積分によるモノドロミーの表示式は、

$$a(E)=6(E^2-\tfrac{15}{4}g_2),\quad c(E)=E^3-\tfrac{45}{4}g_2E-\tfrac{135}{4}g_3, \tag{6.37}$$

とおくことにより、$k=1,3$ において

$$\Lambda(x+2\omega_k,E)=\Lambda(x,E)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^E\frac{-2\eta_k a(\tilde{E})+2\omega_k c(\tilde{E})}{\sqrt{-Q(\tilde{E})}}d\tilde{E}\right) \tag{6.38}$$

となる。

また、Hermite-Krichever 仮設法による解を求めるということは、

$$f(x)=\exp(\kappa x)\left(\sum_{j=0}^{3}\tilde{b}_j^{(0)}\left(\frac{d}{dx}\right)^j\Phi_0(x,\alpha)\right) \tag{6.39}$$

の形の解を求めることに対応し、$\wp(\alpha)$, κ は以下の多項式たち

$$\begin{aligned} &H^{(0)}(E)=E,\quad H^{(k)}(E)=E^2+6e_kE+45e_k^2-15g_2\ (k=1,2,3), \\ &Ht^{(0)}(E)=E^2-\tfrac{75}{4}g_2,\quad Ht^{(k)}(E)=E^2+15e_kE+\tfrac{75}{4}(g_2-12e_k^2), \end{aligned} \tag{6.40}$$

を用いることによって

$$\wp(\alpha)=e_k-\frac{H^{(k)}(E)Ht^{(k)}(E)^2}{36H^{(0)}(E)Ht^{(0)}(E)^2}\quad(k=1,2,3),\quad \kappa=\frac{5\sqrt{-Q(E)}}{6H^{(0)}(E)Ht^{(0)}(E)}, \tag{6.41}$$

と計算される。ここで定まった α,κ を用いることにより、モノドロミーは、$k=1,3$ に対して

$$f(x+2\omega_k,E)=(-2\eta_k\alpha+2\omega_k\zeta(\alpha)+2\kappa\omega_k)f(x) \tag{6.42}$$

と表示できる。モノドロミーの２つの表示式に付随して、

$$\xi=e_1-\frac{H^{(1)}(E)Ht^{(1)}(E)^2}{36H^{(0)}(E)Ht^{(0)}(E)^2} \tag{6.43}$$

という変数変換により、超楕円積分を楕円積分に帰着する式

$$\int_\infty^\xi\frac{d\tilde{\xi}}{\sqrt{4\tilde{\xi}^3-g_2\tilde{\xi}-g_3}}=-\frac{1}{2}\int_\infty^E\frac{a(\tilde{E})}{\sqrt{-Q(\tilde{E})}}d\tilde{E}, \tag{6.44}$$

$$\frac{1}{2}\int_{E_0}^E\frac{c(\tilde{E})}{\sqrt{-Q(\tilde{E})}}d\tilde{E}=-\kappa+\int_{e_1}^\xi\frac{\tilde{\xi}d\tilde{\xi}}{\sqrt{4\tilde{\xi}^3-g_2\tilde{\xi}-g_3}}, \tag{6.45}$$

が得られる。ここで E_0 は $H^{(1)}(E_0)=0$ をみたす数である。

6.6. $(l_0,l_1,l_2,l_3)=(3,1,0,0)$ の場合.

二重周期関数 $\Xi(x,E)$ と多項式 $Q(E)$ は

$$\begin{aligned} \Xi(x,E)=&225\wp(x)^3+45(E-2e_1)\wp(x)^2+(6E^2-24Ee_1-201e_1^2-\tfrac{75}{2}g_2)\wp(x) \\ &+(E-8e_2-3e_3)(E-3e_2-8e_3)\wp(x+\omega_1) \\ &+E^3-7e_1E^2-104e_1^2E-\tfrac{25}{4}g_2E-72e_1^3-\tfrac{225}{2}g_3, \end{aligned} \tag{6.46}$$

$$\begin{aligned} Q(E)=&(E^2-16e_1E-32e_1^2+5g_2)(E-3e_2-8e_3)(E-8e_2-3e_3) \\ &(E^3-9e_1E^2-(117e_1^2+4g_2)E+69e_1^3-188g_3), \end{aligned} \tag{6.47}$$

と計算される。微分方程式 (1.5) の解

$$\Lambda(x,E)=\sqrt{\Xi(x,E)}\exp\int\frac{\sqrt{-Q(E)}dx}{\Xi(x,E)} \tag{6.48}$$

の超楕円積分によるモノドロミーの表示式は、

$$a(E)=7E^2-13e_1E-152e_1^2-10g_2, \tag{6.49}$$

$$c(E)=E^3-7e_1E^2-(104e_1^2+\tfrac{5}{2}g_2)E-102e_1^3-\tfrac{165}{2}g_3, \tag{6.50}$$

とおくことにより、$k=1,3$ において

$$\Lambda(x+2\omega_k,E)=-\Lambda(x,E)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{3e_2+8e_3}^{E}\frac{-2\eta_k a(\tilde{E})+2\omega_k c(\tilde{E})}{\sqrt{-Q(\tilde{E})}}d\tilde{E}\right) \tag{6.51}$$

となる。

また、Hermite-Krichever 仮設法による解を求めるということは、

$$f(x)=\exp(\kappa x)\left(\tilde{b}_0^{(1)}\Phi_1(x,\alpha)+\sum_{j=0}^{2}\tilde{b}_j^{(0)}\left(\frac{d}{dx}\right)^j\Phi_0(x,\alpha)\right) \tag{6.52}$$

の形の解を求めることに対応し、$\wp(\alpha)$, κ は以下の多項式たち

$$\begin{aligned}
&H^{(0)}(E)=E^2-16e_1E-32e_1^2+5g_2, \quad H\theta(E)=E-17e_1,\\
&H^{(1)}(E)=E^3-9e_1E^2-(117e_1^2+4g_2)E+69e_1^3-188g_3,\\
&H^{(2)}(E)=E-3e_2-8e_3, \quad H^{(3)}(E)=E-8e_2-3e_3,\\
&Ht^{(0)}(E)=E^2-\tfrac{58}{7}e_1E-\tfrac{737}{7}e_1^2-\tfrac{100}{7}g_2, \quad Ht^{(1)}(E)=E^2+11e_1E-626e_1^2+50g_2,
\end{aligned} \tag{6.53}$$

を用いることによって

$$\wp(\alpha)=e_1-\frac{H^{(1)}(E)Ht^{(1)}(E)^2}{49H^{(0)}(E)Ht^{(0)}(E)^2}, \quad \kappa=\frac{6H\theta(E)\sqrt{-Q(E)}}{7H^{(0)}(E)Ht^{(0)}(E)}, \tag{6.54}$$

と計算される。ここで定まった α, κ を用いることにより、モノドロミーは、$k=1,3$ に対して

$$f(x+2\omega_k,E)=(-2\eta_k\alpha+2\omega_k\zeta(\alpha)+2\kappa\omega_k)f(x) \tag{6.55}$$

と表示できる。モノドロミーの２つの表示式に付随して、

$$\xi=e_1-\frac{H^{(1)}(E)Ht^{(1)}(E)^2}{49H^{(0)}(E)Ht^{(0)}(E)^2} \tag{6.56}$$

という変数変換により、超楕円積分を楕円積分に帰着する式

$$\int_{\infty}^{\xi}\frac{d\tilde{\xi}}{\sqrt{4\tilde{\xi}^3-g_2\tilde{\xi}-g_3}}=-\frac{1}{2}\int_{\infty}^{E}\frac{a(\tilde{E})}{\sqrt{-Q(\tilde{E})}}d\tilde{E}, \tag{6.57}$$

$$\frac{1}{2}\int_{3e_2+8e_3}^{E}\frac{c(\tilde{E})}{\sqrt{-Q(\tilde{E})}}d\tilde{E}=-\kappa+\int_{e_2}^{\xi}\frac{\tilde{\xi}d\tilde{\xi}}{\sqrt{4\tilde{\xi}^3-g_2\tilde{\xi}-g_3}}, \tag{6.58}$$

が得られる。

6.7. $(l_0, l_1, l_2, l_3) = (3, 1, 1, 1)$ の場合.
二重周期関数 $\Xi(x, E)$ と多項式 $Q(E)$ は

$$\begin{aligned}\Xi(x,E) &= 225\wp(x)^3 + 45E\wp(x)^2 + 6(E^2 - \tfrac{75}{4}g_2)\wp(x) + E^3 - \tfrac{195}{4}g_2E - \tfrac{1125}{2}g_3 \\ &+ (E-15e_2)(E-15e_3)\wp(x+\omega_1) + (E-15e_1)(E-15e_3)\wp(x+\omega_2) \\ &+ (E-15e_1)(E-15e_2)\wp(x+\omega_3),\end{aligned} \tag{6.59}$$

$$Q(E) = (E^4 - 54g_2E^2 - 864g_3E - 135g_2^2)\prod_{i=1}^{3}(E - 15e_i), \tag{6.60}$$

と計算される。微分方程式 (1.5) の解

$$\Lambda(x,E) = \sqrt{\Xi(x,E)}\exp\int\frac{\sqrt{-Q(E)}dx}{\Xi(x,E)} \tag{6.61}$$

の超楕円積分によるモノドロミーの表示式は、

$$a(E) = 9(E^2 - 15g_2), \quad c(E) = E^3 - 45g_2E - 540g_3, \tag{6.62}$$

とおくことにより、$k = 1, 3$ において

$$\Lambda(x+2\omega_k, E) = -\Lambda(x,E)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{15e_2}^{E}\frac{-2\eta_k a(\tilde{E}) + 2\omega_k c(\tilde{E})}{\sqrt{-Q(\tilde{E})}}d\tilde{E}\right) \tag{6.63}$$

となる。
また、Hermite-Krichever 仮設法による解を求めるということは、

$$f(x) = \exp(\kappa x)\left(\sum_{j=0}^{2}\tilde{b}_j^{(0)}\left(\frac{d}{dx}\right)^j\Phi_0(x,\alpha) + \sum_{i=1}^{3}\tilde{b}_0^{(i)}\Phi_i(x,\alpha)\right) \tag{6.64}$$

の形の解を求めることに対応し、$\wp(\alpha)$, κ は以下の多項式たち

$$\begin{aligned}&H^{(0)}(E) = E^4 - 54g_2E^2 - 864g_3E - 135g_2^2, \quad Ht^{(0)}(E) = E^2 - 75g_2, \\ &H^{(k)}(E) = E - 15e_k \ (k = 1,2,3), \\ &Ht^{(k)}(E) = E^4 + 48e_kE^3 + 54(g_2 - 8e_k^2)E^2 - 8640e_k^3E - 2025(3g_2^2 + 48g_3e_k - 64e_k^4), \\ &H\theta(E) = E^3 - 63g_2E - 540g_3,\end{aligned} \tag{6.65}$$

を用いることによって

$$\wp(\alpha) = e_k - \frac{H^{(k)}(E)Ht^{(k)}(E)^2}{81H^{(0)}(E)Ht^{(0)}(E)^2} \quad (k = 1,2,3), \quad \kappa = \frac{8H\theta(E)\sqrt{-Q(E)}}{9H^{(0)}(E)Ht^{(0)}(E)}, \tag{6.66}$$

と計算される。ここで定まった α, κ を用いることにより、モノドロミーは、$k = 1, 3$ に対して

$$f(x+2\omega_k, E) = (-2\eta_k\alpha + 2\omega_k\zeta(\alpha) + 2\kappa\omega_k)f(x) \tag{6.67}$$

と表示できる。モノドロミーの２つの表示式に付随して、

$$\xi = e_1 - \frac{H^{(1)}(E)Ht^{(1)}(E)^2}{81H^{(0)}(E)Ht^{(0)}(E)^2} \tag{6.68}$$

という変数変換により、超楕円積分を楕円積分に帰着する式

$$\int_{\infty}^{\xi} \frac{d\tilde{\xi}}{\sqrt{4\tilde{\xi}^3 - g_2\tilde{\xi} - g_3}} = -\frac{1}{2}\int_{\infty}^{E} \frac{a(\tilde{E})}{\sqrt{-Q(\tilde{E})}} d\tilde{E}, \tag{6.69}$$

$$\frac{1}{2}\int_{15e_1}^{E} \frac{c(\tilde{E})}{\sqrt{-Q(\tilde{E})}} d\tilde{E} = -\kappa + \int_{e_1}^{\xi} \frac{\tilde{\xi} d\tilde{\xi}}{\sqrt{4\tilde{\xi}^3 - g_2\tilde{\xi} - g_3}}, \tag{6.70}$$

が得られる。

References

[1] Belokolos, E. D. and Enolskii, V. Z., Reduction of Abelian functions and algebraically integrable systems. II. *J. Math. Sci. (New York)* **108** (2002), 295–374.

[2] Gesztesy F. and Weikard R., Treibich-Verdier potentials and the stationary (m)KdV hierarchy. *Math. Z.* **219** (1995), 451–476.

[3] Hermite C., Oeuvres de Charles Hermite, vol. III, Gauthier-Villars, Paris (1912).

[4] Inozemtsev V. I., Lax representation with spectral parameter on a torus for integrable particle systems, *Lett. Math. Phys.* **17** (1989), 11-17.

[5] Krichever I. M. Elliptic solutions of the Kadomcev-Petviasvili equations, and integrable systems of particles. (Russian) *Functional Anal. Appl.* **14** (1980), 282–290.

[6] Maier R. S., Lamé polynomials, hyperelliptic reductions and Lamé band structure. Preprint , math-ph/0309005, 2003.

[7] Ochiai H., Oshima T., and Sekiguchi H., Commuting families of symmetric differential operators, *Proc. Japan. Acad.* **70** (1994), 62–66.

[8] Ronveaux A.(ed.), *Heun's differential equations.* Oxford Science Publications, Oxford University Press, Oxford, 1995.

[9] Smirnov A. O., Elliptic solitons and Heun's equation, *The Kowalevski property,* 287–305, CRM Proc. Lecture Notes, 32, Amer. Math. Soc., Providence (2002).

[10] Takemura K., The Heun equation and the Calogero-Moser-Sutherland system I: the Bethe Ansatz method. *Comm. Math. Phys.* **235** (2003) 467–494.

[11] Takemura K., The Heun equation and the Calogero-Moser-Sutherland system II: the perturbation and the algebraic solution, *Electron. J. Differential Equations* **2004** no. 15 (2004) 1–30.

[12] Takemura K., The Heun equation and the Calogero-Moser-Sutherland system III: the finite gap property and the monodromy, *J. Nonlinear Math. Phys.* **11** (2004) 21–46.

[13] Takemura K., The Heun equation and the Calogero-Moser-Sutherland system IV: the Hermite-Krichever Ansatz. Preprint, math.CA/0406141, 2004.

[14] Treibich A. and Verdier J.-L., Revetements exceptionnels et sommes de 4 nombres triangulaires (French). *Duke Math. J.* **68** (1992), 217–236.

[15] Weikard R., On Hill's equation with a singular complex-valued potential. *Proc. London Math. Soc. 3* **76** (1998), 603–633.

Department of Mathematical Sciences, Yokohama City University, 22-2 Seto, Kanazawa-ku, Yokohama 236-0027, Japan.

E-mail address: `takemura@yokohama-cu.ac.jp`