数理解析研究所講究録 1411 巻 2005 年 1-14

波動方程式の局所エネルギー減衰

広島大学大学院教育学研究科　池畠　良 (Ryo IKEHATA)*
Department of Mathematics, Graduate School of Education, Hiroshima University

1　問題と結果

$\Omega \subset \mathbf{R}^N$ $(N \geq 3)$ をその境界 $\partial\Omega$ が十分滑らかでコンパクトな外部領域とする。$0 \notin \bar{\Omega}$ 及び $\partial\Omega \subset B_{\rho_0}(0) \equiv \{x \in R^N : |x| < \rho_0\}$ for some $\rho_0 > 0$ として一般性を失わない。ただし、$|\cdot|$ は、$\mathbf{R}^N$ の通常のノルムである。もちろん $N = 1, 2$ も扱えるが、本質的には変わらないので $N \geq 3$ の場合にのみ集中する。

この概説では、原型的な以下の波動方程式の混合問題

$$u_{tt}(t,x) - \Delta u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \Omega, \tag{1.1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.2}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in (0,\infty), \tag{1.3}$$

ただし、

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad x = (x_1, \cdots, x_N)$$

について、新しい局所エネルギー減衰率の導出方法について報告したい。もちろん、もっと複雑な変数係数の双曲型方程式も扱えるが、アイデアの核心を掴むためには上記問題で十分である。

まずは、記号を導入しよう。$\|\cdot\|$ で $L^2(\Omega)$-norm を表し、L^2-内積は

$$(f,g) = \int_\Omega f(x)g(x)\,dx \quad \text{for } f,\ g \in L^2(\Omega).$$

で書く。

(1.1) の全エネルギー $E(t)$ を

$$E(t) = \frac{1}{2}\{\|u_t(t,\cdot)\|^2 + \|\nabla u(t,\cdot)\|^2\}$$

で表し、他方、各 $R > 0$ について領域 $\Omega(R)$ での局所エネルギーは

$$E_R(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega(R)} \{|u_t(t,x)|^2 + |\nabla u(t,x)|^2\}\,dx,$$

*Partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C)(2)(No.14540208), Japan Society for the Promotion of Science.

で定義する。ただし、$\Omega(R) \equiv \Omega \cap B_R(0)$ for $R > \rho_0$ である。

まずは、弱解のクラスで考えるのが本質の1つであるので、(1.1)-(1.3) の次の well-posedness に注意して議論を進める。(cf. Brezis [1, Théorem X.14] or Ikawa [6, Theorem 2.25]).

Proposition 1.1 *Let $N \geq 1$. For each $[u_0, u_1] \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, there exists a unique solution $u \in C([0,\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,\infty); L^2(\Omega))$ to problem* (1.1)-(1.3) *satisfying*

$$E(t) = E(0), \quad t \geq 0. \tag{1.4}$$

Multiplier method で局所エネルギーの一様減衰を得るための1つの十分条件として、領域 Ω についての次の幾何的な仮定は C. Morawetz [18] 以来標準的である。

(A-1): the obstacle $\mathbf{R}^N \setminus \Omega$ $(N \geq 2)$ is star-shaped relative to the origin.

まずは問題の背景について概観しよう。1961年（偶然にも、著者の生まれた年である！）に C. Morawetz [18] は、仮定 (A-1) のもと次を導出した。

$R > \rho_0$ を任意に固定する。初期値が命題1.1の条件の下、更に

$$supp\, u_0 \cup supp\, u_1 \subset \Omega(R) \tag{1.5}$$

を満たすならば、$E_R(t) = O(t^{-1})$ (as $t \to +\infty$) が成り立つ。

波の全エネルギーは保存するが障害物の周りの局所エネルギーは、代数オーダーで減衰するのである。十分時間が経つと障害物の周りの波動は空間遠方に逃げてゆく（これらの結果の紹介は井川氏 [6] の本の第4章にも詳しく書かれている)。

彼女は、今日 Morawetz identity と言われている次の等式からその結果を得ている。

$$\begin{aligned} tE(t) &= (x \cdot \nabla u_0, u_1) + \frac{N-1}{2}(u_0, u_1) - (x \cdot \nabla u(t,\cdot), u_t(t,\cdot)) \\ &- \frac{N-1}{2}(u(t,\cdot), u_t(t,\cdot)) + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \{x \cdot \nu(x)\} \left| \frac{\partial u(s,x)}{\partial \nu} \right|^2 dS_x ds. \end{aligned} \tag{1.6}$$

ただし、$\nu(x)$ は境界上の外向き単位法線ヴェクトルである。

しばし、彼女の仕事を概観しよう。条件 (A-1) を使うと上記等式の境界積分からの情報を落とすことが出来て (本当は、落とさないほうが良いのでしょうが！)、次の不等式を計算することに帰着される。

$$\begin{aligned} tE(t) &\leq (x \cdot \nabla u_0, u_1) + \frac{N-1}{2}(u_0, u_1) - (x \cdot \nabla u(t,\cdot), u_t(t,\cdot)) \\ &- \frac{N-1}{2}(u(t,\cdot), u_t(t,\cdot)). \end{aligned} \tag{1.7}$$

(1.7) 式の2つの部分の評価が計算の本質である。

第1段：$(u(t,\cdot), u_t(t,\cdot))$ の評価について

この部分は Schwarz の不等式と命題1.1のエネルギー等式より、

$$|(u(t,\cdot), u_t(t,\cdot))| \leq \frac{1}{2}(\|u(t)\|^2 + \|u_t(t)\|^2)$$

$$\leq \frac{1}{2}\|u(t)\|^2 + E(0) \tag{1.8}$$

となるので、結局解の L^2 有界性を確認すれば良いが、非有界領域での当座の問題の場合、もちろん Poincaré の不等式など使えないのでその点が大きな問題になってくる。Morawetz のアイデアはこうである。まず、初期速度 $u_1(x)$ に対して、楕円型方程式の外部問題：

$$\Delta h(x) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.9}$$

$$h|_{\partial\Omega} = 0 \tag{1.10}$$

の解 $h(x)$ を持ってくる。u_1 の **Support がコンパクト**ならば、その可解性については Meyers-Serrin [16] や Meyers [15] などで研究されている。ちなみにその解 $h(x)$ は $\|\nabla h\| < +\infty$ を満たすように取れる。この時点ですでに初期値のサポートのコンパクト性が本質的に使われていることに注意する。

$$w(t,x) = \int_0^t u(s,x)\,ds + h(x). \tag{1.11}$$

により、新しい関数 $w(t,x)$ を導入すると $w(t,x)$ は変換された混合問題の解になる：

$$w_{tt} - \Delta w = 0, \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \Omega, \tag{1.12}$$

$$w(0,x) = h(x), \quad w_t(0,x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.13}$$

$$w|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in (0,\infty). \tag{1.14}$$

これに対するエネルギー等式から

$$\frac{1}{2}\|w_t(t,\cdot)\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla w(t,\cdot)\|^2 = \frac{1}{2}\|u_0\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla h\|^2$$

$w_t = u$ が成り立っているので目的の L^2 有界性を得る。

評価の本質は楕円型方程式の可解性にあったのである。これと同じような状況は、たとえば Vainberg [27] の方法により局所エネルギーの精密な減衰評価を得る際にも登場するようである。Laplace 変換を通じて発展問題 (1.1)-(1.3) の解析を対応する定常問題の resolvent の**小さい**パラメータに対する評価に持ち込むときにも、結局は (1.9)-(1.10) のような楕円型の問題に遭遇するようであるので、ここを巧く処理する、あるいはこのような定常問題を「経由しない方法」の開発が著者の問題意識の始まりである。つまり、この論説の目的は**初期値の support のコンパクト性を仮定することなしに、弱解の枠組みで局所エネルギーの一様減衰を導出できるか**という技術的な問題にある。そこに強い仮定の下で得られた結果があるとき、その強い仮定を取り除きたいという問題意識は極めて自然である（たとえその Community のなかでマイナーな行為であっても！）。ただし、ここで1つ注意が必要で、たとえ初期値の support のコンパクト性をはずせても、それの代償としてたとえば初期値の regularity を十分高くする、などを科すのでは Morawetz を本質的に超えたことにはならないということである。

次に (1.7) の右辺第3項の評価についての Morawetz のアイデアを観る。

第2段:$(x \cdot \nabla u(t), u_t(t))$ の評価について

まず仮定 (1.5) より方程式の解の**有限伝播速度性**を使うと、

$$supp\, u(t,\cdot) \subset \Omega(R+t), \quad t \geq 0, \tag{1.15}$$

が成り立つ。そうすると、

$$\begin{aligned}
|(x\cdot\nabla u(t), u_t(t))| &\leq \int_{\Omega(R)} + \int_{R+t\geq|x|\geq R} |x||\nabla u||u_t|dx \\
&\leq R\int_{\Omega(R)} E(t,x)dx + (R+t)\int_{R+t\geq|x|\geq R} E(t,x)dx \\
&\leq RE_R(t) + R\int_{\Omega} E(t,x)dx + t\int_{|x|\geq R} E(t,x)dx \\
&= RE_R(t) + RE(t) + t\int_{|x|\geq R} E(t,x)dx,
\end{aligned} \tag{1.16}$$

ただし、

$$E(t,x) = \frac{1}{2}(|u_t(t,x)|^2 + |\nabla u(t,x)|^2)$$

である。

Morawetz の評価式の導出: 第1段と第2段の考察から、$E_R(t) = O(t^{-1})$ (as $t \to +\infty$) を得ることが出来る。実際に、(1.4), (1.7), (1.8) と (1.16) より

$$\begin{aligned}
tE_R(t) + t\int_{|x|\geq R} E(t,x)dx &= tE(t) \\
&\leq J_0 + |(x\cdot\nabla u(t,\cdot), u_t(t,\cdot))| + \frac{N-1}{2}|(u(t,\cdot), u_t(t,\cdot))|, \\
&\leq J_0 + \frac{N-1}{2}(\frac{1}{2}\|u(t,\cdot)\|^2 + E(0)) + RE_R(t) + RE(0) + t\int_{|x|\geq R} E(t,x)dx \\
&\leq J_0 + \frac{N-1}{2}E(0) + \frac{N-1}{2}(\frac{1}{2}\|u_0\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla h\|^2) \\
&\quad + RE_R(t) + RE(0) + t\int_{|x|\geq R} E(t,x)dx
\end{aligned}$$

ただし、

$$J_0 = (x\cdot\nabla u_0, u_1) + \frac{N-1}{2}(u_0, u_1),$$

が成り立つので Morawetz の評価式を得る:

$$(t-R)E_R(t) \leq J_0 + \frac{N-1}{2}E(0) + \frac{N-1}{4}\|u_0\|^2 + \frac{N-1}{4}\|\nabla h\|^2 + RE(0).$$

∎

ここでは、波の重要な性質 (1.15) が本質的な役割を担っていた。初期値の support のコンパクト性の条件を除くという技術的な問題は、局所エネルギーの減衰という性質が、上記の波の有限伝播速度性とは（基本的に）独立な問題であるか、ということを予言しており興味深い問題である。

我々の結果は次のように要約される。

Theorem 1.1 (I.-Nishihara [11]) *Let* $N \geq 3$ *and assume* (A-1). *If the initial data* $[u_0, u_1] \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ *further satisfy*

$$\int_\Omega (|x|^2 |u_1(x)|^2 + |x||\nabla u_0(x)|^2) dx < +\infty, \tag{1.17}$$

then the unique solution $u(t,x)$ *to problem* (1.1)-(1.3) *has a uniform local energy decay property: for each* $R > \rho_0$ *and* $t > R$ *it is true that*

$$E_R(t) \leq \frac{C}{t-R},$$

with some constant $C > 0$*, which is independent of* R*.*

実は、初期値の support のコンパクト性の除去という結果は、これが始めて報告されたというわけではなく、実際に Muraveĭ [21] により次が証明なしに報告されている：初期値が

$$\int_\Omega |x|^2 (|\nabla u_0|^2 + |u_1|^2) dx < +\infty.$$

を満たせば

$$E_R(t) = O(t^{-1}) \quad (t \to +\infty), \quad \int_{T(R)}^\infty t^{1-\sigma} E_R(t) dt \leq C J_0, \quad \sigma > 0,$$

with a quantity J_0 depending on the initial data and a time $T(R) > 0$、が成り立つ。我々の初期値の条件の方がいくらか弱いようである。また、初期値に正巾の exponential の重みをつけた場合の Morawetz の結果の一般化は、定理 1.1 より前に 2003 年に Ikehata [7] によってすでに報告されており、定理 1.1 はその [7] の結果の初期値の重みの強さについての改良である。

2 ふたつの工夫

この章では、初期値の support の compactness の除去を達成するための新しい簡便な方法について概説する。直接的な定常問題の解析を経ることなく、Multiplier method のみで Morawetz の結果を一般化できることが利点である。

まず、次を準備する。

Lemma 2.1 (Hardy-Sobolev) *Let* $N \geq 3$*. Then for each* $u \in H_0^1(\Omega)$*, it is true that*

$$\left\| \frac{u}{|x|} \right\| \leq C \|\nabla u\|$$

with some constant $C > 0$*.*

次の補題は、1 章の第 1 段の初期値の support についての制限を克服するものである。ここで展開されている（ささやかな、しかしながら本質的な）工夫は、1999 年 2 月初旬に T.Matsuyama 氏との共同研究によって発見された（Ikehata-Matsuyama [10]）ものである。新しい工夫は既存の知識のなかに隠れていた。

Lemma 2.2 *Let $N \geq 3$, and $[u_0, u_1] \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Then the unique solution $u(t,x)$ to problem* (1.1)-(1.3) *as in Proposition* 1.1 *satisfies*

$$\|u(t,\cdot)\| \leq C(\|u_0\| + \||x|u_1\|),$$

provided that the quantity $\||x|u_1\|$ is finite.

Proof of Lemma 2.2. Morawetz は (1.9)-(1.10) を経由して、(1.11) を使ったが、我々はいきなり

$$w(t,x) = \int_0^t u(s,x)\,ds. \tag{2.1}$$

と置く。この変換された関数

$$w(t,x) \in C([0,+\infty); H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap C^1([0,+\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0,+\infty); L^2(\Omega))$$

は、次の混合問題を満たす：

$$w_{tt} - \Delta w = u_1, \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \Omega, \tag{2.2}$$

$$w(0,x) = 0, \quad w_t(0,x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.3}$$

$$w|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in (0,\infty). \tag{2.4}$$

これに multiplier $w_t(t,x)$ を掛けて時空積分すると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|w_t(t,\cdot)\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla w(t,\cdot)\|^2 &= \frac{1}{2}\|u_0\|^2 + \int_0^t \frac{d}{ds}(u_1, w(s,\cdot))ds \\ &= \frac{1}{2}\|u_0\|^2 + (u_1, w(t,\cdot)) \end{aligned} \tag{2.5}$$

を得る。ここで Schwarz の不等式と Lemma 2.1 により

$$(u_1, w(t,\cdot)) \leq \int_\Omega |x||u_1(x)|\frac{|w(t,x)|}{|x|}dx \leq C\||x|u_1\|\|\nabla w(t,\cdot)\|. \tag{2.6}$$

が成り立つ。(2.5) と (2.6) より

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\{\|w_t(t,\cdot)\|^2 + \|\nabla w(t,\cdot)\|^2\} &\leq \frac{1}{2}\|u_0\|^2 + C\||x|u_1\|\,\|\nabla w(t,\cdot)\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|u_0\|^2 + \frac{C}{2\varepsilon}\||x|u_1\|^2 + \frac{C\varepsilon}{2}\|\nabla w(t,\cdot)\|^2\end{aligned}$$

を任意の $\varepsilon > 0$ について得るので

$$\frac{1}{2}\|w_t(t,\cdot)\|^2 + \frac{1-C\varepsilon}{2}\|\nabla w(t,\cdot)\|^2 \leq \frac{1}{2}\|u_0\|^2 + \frac{C}{2\varepsilon}\||x|u_1\|^2.$$

が成り立つが、最後に $\varepsilon \in (0, 1/C)$ 位に ϵ を小さくとると $w_t = u$ に注意して目的の評価式を得る。 ∎

一旦補題2.2が得られれば、(1.8)式に代入して、前章第1段の計算の改良が得られる。ここでのアイデアは、単に変換(2.1)を考えたことではなく（これだけなら、偉大な先人達もあちこちで気付いている！）その変換した方程式にHardy-Sobolev型の不等式と組み合わせてエネルギー評価を展開したという総合的な点にあり、楕円型方程式の直接的な解析から我々を**解放した**点にある。その意味では、MorawetzはもちろんVainbergなどの方法とは、根本的に異なる。**波動のことは波動で解決！**である。ちなみにこのアイデアは、(1.1)-(1.3)の解$u(t,x)$に対して

$$v(x,k) = -\int_0^\infty e^{-kt}u(t,x)dt, \quad x \in \Omega, \quad k > 0,$$

と置くと、vはHelmholtz方程式：

$$\Delta v + k^2 v = (u_1 + ku_0), \quad x \in \Omega \tag{2.7}$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0 \tag{2.8}$$

を満たす。(2.7)で形式的に$k=0$とすると$v(x,0)$は(1.9)-(1.10)の解になっている。もちろんこの議論は正当化できないが、(2.1)の$w(t,x)$は、時間$t\to\infty$での$-v(x,0)$のある種の**近似**と考えると、補題2.2の工夫はあながち的外れではないと言えよう。

次になすべきは、前章第2段の部分の改良である。そこでは、解の有限伝播速度性を使っていたので、これの克服が望まれる。アイデアの源泉は、2001年に出版されたTodorova-Yordanov [25]による重みつきエネルギー評価の巧みな適用にあった。彼らの方法は、もともとDamped Wave Equationについてなされたが、それを通常の波動方程式にあうようにいくらかの修正をして適用する。今から考えると、彼らの方法はむしろ波動方程式にこそ相応しい。1つ注意しておくが、大事なのは彼らの方法で得た不等式を**どう使うか**であって、それを**どう導くか**にあるのでは**ない**。このような議論をすると、これはCalremanのエネルギー法だ云々の声が聞こえてきそうなので敢えてこの場で一言。

さて、Weight関数$\psi \in C^1([0,+\infty)\times\bar{\Omega})$を次のように定義する。

$$\psi(t,x) = \begin{cases} (1+|x|-t), & |x| \geq t, \quad x \in \bar{\Omega}, \\ (1+t-|x|)^{-1}, & |x| < t, \quad x \in \bar{\Omega}. \end{cases}$$

この関数が

$$\psi_t(t,x) < 0, \tag{2.9}$$

を満たし、更に所謂Eikonal equation

$$\psi_t(t,x)^2 - |\nabla\psi(t,x)|^2 = 0 \tag{2.10}$$

を$[0,+\infty)\times\bar{\Omega}$上で満たすことはすぐに確認できる。波動方程式の解析がEikonal equationの解析に置き換えられるのである。次の不等式を得る。

Lemma 2.3 *Let $N \geq 2$. The unique solution $u(t,x)$ to problem* (1.1)-(1.3) *as in Proposition* 1.1 *satisfies*

$$\int_\Omega \psi(t,x)(|u_t(t,x)|^2 + |\nabla u(t,x)|^2)dx \leq \int_\Omega (1+|x|)(|u_1(x)|^2 + |\nabla u_0(x)|^2)dx = I_0$$

provided that the quantity $I_0 < +\infty$.

Proof of Lemma 2.3. Multiplier として $\psi(t,x)u_t(t,x)$ をとると次の恒等式を得る。

$$0 = \psi u_t(u_{tt} - \Delta u) = \frac{d}{dt}(\psi E(t,x)) - \mathrm{div}(\psi u_t \nabla u)$$

$$-\frac{1}{2\psi_t}|\psi_t \nabla u - u_t \nabla \psi|^2 + \frac{u_t^2}{2\psi_t}(|\nabla\psi|^2 - \psi_t^2). \tag{2.11}$$

従って (2.9), (2.10) と (2.11) より

$$0 \geq \frac{d}{dt}(\psi E(t,x)) - \mathrm{div}(\psi u_t \nabla u)$$

が成り立つ。$[0,t] \times \Omega$ 上積分して、

$$\int_0^t \int_\Omega \mathrm{div}(\psi u_t \nabla u)dxdt \geq \int_\Omega \psi(t,x)E(t,x)dx - \int_\Omega \psi(0,x)E(0,x)dx \tag{2.12}$$

を得る。divergence formula から

$$\int_0^t \int_\Omega \mathrm{div}(\psi u_t \nabla u)dxds = \int_0^t ds \int_{\partial\Omega} \psi(s,\sigma)u_s(s,x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(s,\sigma)d\sigma = 0,$$

を得るので所与の式を得る。 ∎

補題 2.3 を使うと次が成り立つ。これは、いわば前章第 2 段の部分の改良である。

Lemma 2.4 *Under the same assumption as in Lemma* 2.3 *it is true that*

$$|(x \cdot \nabla u(t,\cdot), u_t(t,\cdot))| \leq RE_R(t) + \frac{I_0}{2} + t\int_{|x|\geq R} E(t,x)dx$$

for all $t > R$.

Proof. $R > \rho_0$ を任意に固定し $t > R$ とする。このとき、

$$|(x \cdot \nabla u(t,\cdot), u_t(t,\cdot))|$$

$$\leq R\int_{\Omega(R)} |\nabla u(t,x)||u_t(t,x)|dx + \int_{|x|\geq R} |x||\nabla u(t,x)||u_t(t,x)|dx$$

$$\leq RE_R(t) + \int_{|x|\geq t} |x||\nabla u(t,x)||u_t(t,x)|dx + \int_{t\geq|x|\geq R} |x||\nabla u(t,x)||u_t(t,x)|dx$$

$$\leq RE_R(t) + \int_{|x|\geq t}(|x| - t)|\nabla u(t,x)||u_t(t,x)|dx$$

$$+t\int_{|x|\geq t} |\nabla u(t,x)||u_t(t,x)|dx + t\int_{t\geq|x|\geq R} |\nabla u(t,x)||u_t(t,x)|dx$$

$$\leq RE_R(t) + \frac{1}{2}\int_{|x|\geq t}(1 + |x| - t)(|\nabla u(t,x)|^2 + |u_t(t,x)|^2)dx + t\int_{|x|\geq R}|\nabla u(t,x)||u_t(t,x)|dx$$

$$\leq RE_R(t) + t\int_{|x|\geq R} E(t,x)dx + \int_\Omega \psi(t,x)E(t,x)dx$$

と計算されるので Lemma 2.3 を適用して終わる。 ∎

以上の準備（補題 2.2 と 2.4）のもと、定理 1.1 を証明することが出来る。

Proof of Theorem 1.1. Morawetz identity と境界の Star-shapedness により (1.7) を得る：

$$tE(t) \le (x\cdot\nabla u_0, u_1) + \frac{N-1}{2}(u_0,u_1) - (x\cdot\nabla u(t,\cdot), u_t(t,\cdot)) - \frac{N-1}{2}(u(t,\cdot), u_t(t,\cdot)). \quad (2.13)$$

左辺の分解：

$$tE(t) = tE_R(t) + \frac{t}{2}\int_{|x|\ge R}\{|\nabla u(t,x)|^2 + |u_t(t,x)|^2\}\,dx, \quad (2.14)$$

を考えると、(2.13), (2.14) と Lemma 2.4 から

$$(t-R)E_R(t) \le (x\cdot\nabla u_0, u_1) + \frac{N-1}{2}(u_0,u_1) + \frac{I_0}{2} + \frac{N-1}{2}|(u(t,\cdot), u_t(t,\cdot))| \quad (2.15)$$

が導出される。また、(1.8) と補題 2.2 より上記の右辺第 4 項の有界性が言える。従って、目的の式を得る ∎

3 関連する話題など

我々の扱ったモデル (1.1) は、原型的であるためかあまりにも「簡単」すぎはしないか、というお叱りをうけるやも知れませんので、一連の方法がもっと複雑な変数係数の方程式についても適応可能であることを観て、その威力を示したいと思う。誤解されるといけないので一言述べておくと、取り扱いが易しい方程式を扱っているのではなくて、取り扱いが易しくなるような「工夫を見つけた」から易しくなった、というのが正しい評価であるということです。この一連の方法によって、敷居の高かった（と、少なくとも筆者には思われた）外部問題に少しでも参入してみよう、という意識を呼び起こせたら幸いです。

「今のところ」一連の方法の適用可能性は、「線形」の双曲型方程式に限定されているが、以下の具体的な方程式で確かめられている。

$$u_{tt}(t,x) - c(x)^2\Delta u = 0, \quad (3.1)$$

$$u_{tt}(t,x) - \nabla\cdot(K(x)\nabla u) = 0, \quad (3.2)$$

and

$$u_{tt}(t,x) - \Delta u + a(x)u_t = 0. \quad (3.3)$$

(3.1) は、論文 Ikehata-Sobukawa [12] で研究されていて、初期値に空間遠方での多項式オーダーの重みを仮定してその局所エネルギー減衰が導出されている。Ikehata [9] では (3.2) を扱い、初期値に空間遠方での指数オーダーの強い（しかし、support compact よりは確実に弱い）重みを仮定して同様の結果が得られている。(3.1) と (3.2) に若干の違いが見られるのは、方や $c(x)^2$ で割った (3.1) の主要部が Laplacian であることから、巧い weight 関数を掛けて出来る Todorova-Yordanov の恒等式が成立するからである。障害物の周りの「補捉的」な部分にのみ局在化された摩擦係数を持つ方程式 (3.3) についても、Ikehata [8] において同様の結果が得られている。これらの研究と (1.1) という原型的波動

方程式についてのそれとの大きな違いあるいはそこに横たわる困難は、それぞれに関する **Eikonal 方程式**それ自身の (局所エネルギー減衰に見合うような) 解の構成の難しさにあり、ある場合にはその Eikonal 方程式の解のある種の**不連続性**に我々が遭遇し、それ等の克服がアイデアの出しどころとなる。詳しくは、巻末の論文等を参照していただくとして、一番新しい (3.1) についての 3 次元以上の場合の結果についてのみ記録しておく。

$c \in C^1(\bar{\Omega}) \cap L^\infty(\Omega)$ かつ $0 < c_0 \leq c(x) (x \in \Omega)$ がさらに次を満たすとする。

(A-2): $c(x) = c_0 > 0$ for $x \in \Omega$ satisfying $|x| > r_0$ with some constant $r_0 > \rho_0$.

つまり、空間遠方で $c(x)$ は、定数になる、ということ。

また、$c(x)$ の領域 $\Omega(r_0)$ 上での**増大度**についての制限を次のように仮定する。

(A-3): $2x \cdot \nabla c(x) \leq \gamma_0 c(x)$ for $x \in \Omega$ with some constant $\gamma_0 \in [0, 1)$.

この条件のもと、次が成り立つ。

Theorem 3.1 (I.-Sobukawa [12]) *Let $N \geq 3$ and assume* (A-1), (A-2) *and* (A-3). *If the initial data $[u_0, u_1] \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ further satisfy*

$$\int_\Omega (|x|^2 |u_1(x)|^2 + |x||\nabla u_0(x)|^2) dx < +\infty,$$

then the unique solution $u(t, x)$ to problem (3.1), (1.2) *and* (1.3) *has a uniform local energy decay property: for each $R > \rho_0$ and $t > R/c_0$ it is true that*

$$E_R(t) \leq \frac{C}{(t - (R/c_0))^{1-\gamma_0}},$$

with some constant $C > 0$, which is independent of R.

障害物近くの媒質における波の伝播速度の変化が局所エネルギーの減衰速度に影響するのである。

最後に、関連する先行結果について言及しよう。

まず、Lax-Phillips [13] においては、一般の外部領域において局所エネルギーが

$$\lim_{t \to +\infty} E_R(t) = 0$$

を満たすことが知られている (溝畑氏 [17] の本の第 8 章定理 8.8 も参照せよ)。Vainberg [27] は、スペクトル解析の立場から局所エネルギーの一様減衰を研究した (Tsutsumi [26] の論文には、難解な Vainberg の仕事についての分かりやすい要約が Shrödinger 方程式を通して書かれている)。Melrose [14] や Shibata-Tsutsumi [23, 24] においては、局所エネルギーの精密な一様減衰率が障害物についての Vainberg [27] の意味での non-trapping 条件のもと詳しく研究されている。Ralston [22] は、障害物が trapping するときには、局所エネルギーの**一様**な減衰が "起こらない" ことを研究した。また、Burq [2] の結果は注目に値し、たとえば (1.1)-(1.3) の H^2-solution を考えると、障害物についての幾何的な条件なしに log-order で一様減衰することが報告されている (この結果の原型である Ikawa [5] も参照せよ)。また、Filinovskii [4] は、障害物の境界 $\partial\Omega$ が**非有界**で星型な場合を、対応する Helmholtz 方程式の解析を通して考察し、その局所エネルギーの時間可積分性を導出している。Morawetz の仕事の変数係数の双曲型方程式の局所エネルギー減衰への直接的な

拡張に関する文献としては、Zachmanoglou [30] が挙げられるだろう。ただし、すべてこれらは初期値のサポートについてのコンパクト性の条件のもと導出されていることを注意する。著者の知る限り、前掲の Muraveĭ [21] の結果報告のみが、non-compactly supported solution の枠組みで、局所エネルギーの一様減衰を扱っているようである。

今後の考えられる問題としては、Morawetz [19] や Morawetz-Ralston-Strauss [20] で研究されているように、解の有限伝播性を使うと、空間3次元の場合は Huygens の原理が使えて局所エネルギーの exponential-order の減衰率を導出できるが、当座の問題の場合はもちろんその有限伝播性を使えない。同様の結果を得ることは未解決である。もっと言うと、すべての空間次元の場合に初期値の support の compactness を**仮定しないで**、(1.1)-(1.3) の**弱解**の optimal な減衰率を決めることが問題となる。

また, Vodev [29] などで扱われているように、(1.1) の代わりに potential term を考えた波動方程式：

$$u_{tt} - \Delta u + V(x)u = 0,$$

などの外部混合問題での同様な扱いの可能性を議論するのもおもしろい（[29] でも support compact の枠組みで議論されている）。

4 付録

ここでは、identity (2.11) の導出について確認しておこう。その本質は中学校数学で学ぶ巧い「**平方完成**」にある。まず、

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}(\psi u_t \nabla u)\\
&= u_t \nabla\psi\cdot\nabla u + \frac{\psi}{2}\frac{\partial}{\partial t}|\nabla u|^2 + \psi u_t \Delta u\\
&= -\frac{1}{2\psi_t}|\psi_t \nabla u - u_t \nabla\psi|^2 + \frac{1}{2\psi_t}\psi_t^2|\nabla u|^2\\
&\quad + \frac{u_t^2}{2\psi_t}|\nabla\psi|^2 + \frac{\psi}{2}\frac{\partial}{\partial t}|\nabla u|^2 + \psi u_t\Delta u,
\end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned}
&-\psi u_t \Delta u\\
&= -\mathrm{div}(\psi u_t \nabla u) - \frac{1}{2\psi_t}|\psi_t\nabla u - u_t\nabla\psi|^2\\
&\quad + \frac{u_t^2}{2\psi_t}|\nabla\psi|^2 + \frac{\psi}{2}\frac{\partial}{\partial t}|\nabla u|^2 + \frac{\psi_t}{2}|\nabla u|^2
\end{aligned}$$

が成り立つ。一方、

$$\begin{aligned}
\psi u_t u_{tt} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\{\psi(|u_t|^2 + |\nabla u|^2)\}\\
&\quad -\frac{\psi_t}{2}u_t^2 - \frac{\psi}{2}\frac{\partial}{\partial t}|\nabla u|^2 - \frac{\psi_t}{2}|\nabla u|^2
\end{aligned}$$

も計算できる。上記2つの等式を加えると巧い cancellation が見つかって identity が成り立つ。 ∎

Acknowledgement. 三重大学の肥田野氏には、これらの結果の初期の段階から格別の興味をもっていただき、いくつかのアドヴァイスをいただきました。群馬大学の池畠優氏には、日頃の励ましはもちろんのこと、これらの結果が出る度に議論をさせていただきました。これらのささやかな一連の結果が少しずつ日の目を見る様になったのも彼らの励ましによるものであります。早稲田大学の西原氏、東海大学の松山氏及び広島大学の川下美潮氏には、貴重なご意見・情報等を提供していただきました。またこの場を借りまして、大阪大学の鈴木貴氏には日頃の私に対する暖かい励ましに心より感謝させていただきます。

参考文献

[1] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, Théorie at applications* Dunod, Paris, 1999.

[2] N. Burq, *Décroissance de l'énergie locale de l'équation des ondes pour le problème extérieur et absence de résonance au voisinage du réel,* Acta Math. **180** (1998), 1–29.

[3] W. Dan and Y. Shibata, *On a local energy decay of solutions of a dissipative wave equation,* Funkcial. Ekvac. **38** (1995), 545–568.

[4] A. V. Filinovskii, *Stabilization of solutions of wave equation in domains with star-shaped boundaries,* Russian J. Math. Physics **8** (2001), 433–452.

[5] M. Ikawa, *Decay of solutions of the wave equation in the exterior of two convex bodies,* Osaka J. Math. **19** (1982), 459–509.

[6] M. Ikawa, *Hyperbolic Partial Differential Equations and Wave Phenomena,* Translations of Mathematical Monographs 189, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2000.

[7] R. Ikehata, *Local energy decay for linear wave equations with non-compactly supported initial data,* Math. Meth. Appl. Sci. **27** (2004), 1881–1892.

[8] R. Ikehata, *Local energy decay for linear wave equations with localized dissipation,* submitted (2004).

[9] R. Ikehata, *Local energy decay for linear wave equations with variable coefficients,* submitted (2004).

[10] R. Ikehata and T. Matsuyama, *L^2-behaviour of solutions to the linear heat and wave equations in exterior domains,* Sci. Math. Japonicae **55** (2002), 33–42.

[11] R. Ikehata and K. Nishihara, *Local energy decay for wave equations with initial data decaying slowly near infinity,* submitted (2004).

[12] R. Ikehata and G. Sobukawa, *Local energy decay for some hyperbolic equations with initial data decaying slowly near infinity,* in preparation (2004).

[13] P. D. Lax and R. S. Phillips, *Scattering theory, Revised Edition* Academic Press, New York, 1989.

[14] R. B. Melrose, *Singularities and energy decay in acoustical scattering,* Duke Math. J. **46** (1979), 43–59.

[15] N. Meyers, *An expansion about infinity for solutions of linear elliptic equations,* J. Math. Mech. **12** (1963), 247–264.

[16] N. Meyers and J. Serrin, *The exterior Dirichlet problem for second order elliptic partial differential equations,* J. Math. Mech. **9** (1960), 513–538.

[17] S. Mizohata, *The theory of partial differential equations,* Cambridge Univ. Press, 1973.

[18] C. Morawetz, *The decay of solutions of the exterior initial-boundary value problem for the wave equation,* Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 561–568.

[19] C. Morawetz, *Exponential decay of solutions of the wave equation,* Comm. Pure Appl. Math. **19** (1966), 439–444.

[20] C. Morawetz, J. Ralston and W. Strauss, *Decay of solutions of the wave equation outside nontrapping obstacles,* Comm. Pure Appl. Math. **30** (1977), 447–508.

[21] L. A. Muraveĭ, *The wave equation in an unbounded domain with a star-shaped boundary,* Soviet Math. Dokl. **38** (1989), 527–530.

[22] J. Ralston, *Solutions of the wave equationwith localized energy,* Comm. Pure Appl. Math. **22** (1969), 807–823.

[23] Y. Shibata and Y. Tsutsumi, *Global existence theorem of nonlinear wave equation in the exterior domain,* Lecture Notes in Num. Appl. Anal. **6** (1983), 155–196, Kinokuniya/North-Holland.

[24] Y. Shibata and Y. Tsutsumi, *On a global existence theorem of small amplitude solutions for nonlinear wave equations in an exterior domain,* Math. Z. **191** (1986), 165–199.

[25] G. Todorova and B. Yordanov, *Critical exponent for a nonlinear wave equation with damping,* J. Diff. Eqns **174** (2001), 464–489.

[26] Y. Tsutsumi, *Local energy decay of solutions to the free Schrödinger equation in exterior domains,* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math. **31** (1984), 97–108.

[27] B. R. Vainberg, *On the short wave asymptotic behaviour of solutions of stationary problems and the asymptotic behaviour as $t \to \infty$ of solutions of nonstationary problems,* Russian Math. Survey **30** (1975), 1–58.

[28] B. R. Vainberg, *Asymptotic Methods in Equations of Mathematical Physics,* Gordon and Breach, New York, 1989.

[29] G. Vodev, *Local energy decay of solutions to the wave equation for short-range potentials,* Asymptotic Anal. **37** (2004), 175–187.

[30] E. C. Zachmanoglou, *The decay of solutions of the initial-boundary value problem for hyperbolic equations,* J. Math. Anal. Appl. **13** (1966), 504–515.

Department of Mathematics
Graduate School of Education
Hiroshima University
Higashi-Hiroshima 739-8524
Japan
E-mail: ikehatar@hiroshima-u.ac.jp