数理解析研究所講究録 1412 巻 2005 年 67-79

Symbolic construction of the fundamental solution and local index

姫路工業大学大学院理学研究科　岩崎 千里 (Chisato Iwasaki)
Himeji Institute of Technology

1 Introduction

M を n 次元のコンパクトな複素多様体とし, $L_q=\bar{\partial}_{q-1}\bar{\partial}_{q-1}^*+\bar{\partial}_q^*\bar{\partial}_q$ を $(0,q)$-微分形式 $A^{(0,q)}(M)=\Gamma(\wedge^{(0,q)}T^*(M))$ に作用する Laplacian とする. このとき、Riemann-Roch の定理と呼ばれる次の定理について考察する:

Riemann-Roch の定理

$$\sum_{q=0}^{n}(-1)^q\dim H_q=\int_M(2\pi i)^{-n}[Td(TM)]_{2n}, \tag{1.1}$$

ここで, H_q は L_q に対する $(0,q)$-次調和形式, $Td(TM)$ は Todd class とし, 曲率形式 Ω を使って次式で定義される.

$$Td(TM)=\det(\frac{\Omega}{e^{\Omega}-1}) \tag{1.2}$$

Riemann-Roch の定理の解析的証明は次の等式が出発点となる.

$$\sum_{q=0}^{n}(-1)^q\dim H_q=\int_M\sum_{q=0}^{n}(-1)^q\operatorname{tr}e_q(t,x,x)dv_x, \tag{1.3}$$

ここで $\operatorname{tr}e_q(t,x,x)$ は 次の熱方程式の初期値問題に対する基本解 $E_q(t)$ の核関数 $e_q(t,x,y)$ の trace である:

$$\begin{cases}(\frac{\partial}{\partial t}+L_q)E_q(t) & =0 \quad \text{in } (0,T)\times M\\ E_q(0) & =I \quad \text{in } M.\end{cases}$$

従って, 次の等式が証明されると, (1.3) により Riemann-Roch の定理の解析的証明は完成する:

$$\int_M \operatorname{str}e(t,x,x)dv=\int_M(2\pi i)^{-n}[Td(TM)]_{2n}, \tag{1.4}$$

ここで $\operatorname{str}e(t,x,x)$ は $\operatorname{str}e(t,x,x)=\sum_{q=0}^{n}(-1)^q\operatorname{tr}e_q(t,x,x)$ で定義されるものであり, 以下 supertrace と呼ぶ.

ここでは (1.4) の局所版である以下の等式を「局所的 Riemann-Roch の定理」と呼ぶことにする.

$$\text{str}\, e(t,x,x)dv_x = (2\pi i)^{-n}[Td(TM)]_{2n} + O(t^{\frac{1}{2}}) \tag{1.5}$$

この原稿の目的のひとつは, 退化した熱方程式の基本解の表象計算による構成方法を応用してこの熱方程式の基本解 $E_q(t)$ を構成することにより, 公式 (1.5) を証明する粗筋を説明することである. 即ち M が Kaehler 多様体であれば, 擬微分作用素の表象に新しい weight を導入することにより, 表象計算で得られる基本解の擬微分作用素としての主要部分を計算することによって公式 (1.5) を証明することができる (C.Iwasaki[11]). もう一つの目的は, M がコンパクトな複素多様体というだけの条件のもとで,「局所的 Riemann-Roch の定理」が成り立つかどうかについて考察する. これに対する答えは否定的である (P.B.Gilkey[5]). 従って問題は「局所的 Riemann-Roch の定理」が成立する複素多様体の特徴付けである. その特徴付けは Φ を M の Kaehler 形式とすると, $\partial\bar{\partial}\Phi = 0$ で与えらるというのが主要な結果である. さらに $\partial\bar{\partial}\Phi \neq 0$ なら $\text{str}\, e(t,x,x)dv_x$ は $t=0$ で特異性を持つが, その主要部も正確な形で得ることができた.

M が Kaehler 多様体のもとでは, 上記の公式 (1.5) は多くの人達によって証明されている. 複素 1 次元の多様体に対しては T.Kotake[7] が証明を与え, V.K.Patodi[14] は任意の次元の Kaehler 多様体について証明した. P.B.Gilkey[6] は invariant theory を使って証明し, E.Getzler[4] は別の証明方法を使って示した.

第 2 節では C.Iwasaki[10] による放物型方程式の基本解の構成による Reimann 多様体に対する Gauss-Bonnet-Chern の証明方法の粗筋を解説する. 第 3 節では Kaehler 多様体上での L の Bochner-Kodaira 公式と呼ばれる表示を与える. 第 4 節において, 基本解の supertrace を計算するときに重要となる Berezin-Patodi による代数的な補題を述べる. 第 6 節では第 5 節で述べる退化した放物型方程式に対する基本解の表象計算による構成方法を,Kaehler 多様体に対する「局所的 Riemann-Roch の定理」の証明に応用する方法について述べる. さらに最終節では多様体が Kaehler 多様体でなく, 一般の複素多様体の場合を取り扱う. Bochner-Kodaira の結果に代わる L の表示を得ることにより証明されるもう一つの結論である定理 5 を述べる.

2 Gauss-Bonnet-Chern の定理の証明

M を n 次元の滑らかな境界のない Reimann 多様体とする . この節では [10] に従って 次の局所的 Gauss-Bonnet-Chern の定理の証明の概略を述べる.

局所的 Gauss-Bonnet-Chern の定理

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p \,\text{tr}\, e_p(t,x,x)dv_x = \begin{cases} \text{the Euler form} + O(\sqrt{t}) & \text{as } t \to 0, \quad \text{if } n \text{ is even;} \\ 0 + O(\sqrt{t}) & \text{as } t \to 0, \quad \text{if } n \text{ is odd,} \end{cases}$$

ここで $e_p(t,x,y)$ は $A^p(M) = \Gamma(\Lambda^p T^*(M))$ 上の熱方程式の Cauchy 問題に対する基本解 $E_p(t)$ の核とする:

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_p)E_p(t) & = 0 \quad \text{in } (0,T) \times M, \\ E_p(0) & = I \quad \text{in } M. \end{cases} \tag{2.1}$$

M の Riemannian metric を g とし、∇ をその Levi-Civita 接続とする. 即ち $\nabla g = 0, \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ で特徴付けられる接続とする.

U を M の局所座標とする. U での $T(M)$ の局所正規直交基を $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を選び, $\omega^1, \omega^2, \cdots, \omega^n$ をその双対基とする.

この節では以下の記号を使う:

Notations.

$$e(\omega^j)\omega = \omega^j \wedge \omega = a_j^* \omega, \ \imath(X_j)\omega(Y_1, \cdots, Y_{p-1}) = \omega(X_j, Y_1, \cdots, Y_{p-1}) = a_j \omega.$$

Weitzenböck's formula として知られている次の $\Delta = d\vartheta + \vartheta d$ に対する微分形式の次数に依らない表現がある.

Lemma 1. *$A^*(M) = \sum_{p=0}^n A^p(M)$ 上の Laplacian Δ は次の表現を持つ.*

$$\Delta = -\{\sum_{j=1}^n \nabla_{X_j} \nabla_{X_j} - \nabla_D + \sum_{i,j=1}^n e(\omega^i)\imath(X_j) R(X_i, X_j)\},$$

ここで

$$D = \sum_{j=1}^n \nabla_{X_j} X_j$$

であり, $R(X, Y)$ は *curvature transformation* である.

connection の係数 $c_{i,j}^\ell$ と curvature tranformation の係数 $R^m_{\ell ij}$

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_{\ell=1}^n c_{i,j}^\ell X_\ell, \quad R(X_i, X_j) X_\ell = \sum_{m:=1}^n R^m_{\ell ij} X_m$$

を使って, 上記の補題より U 上で

$$\Delta = -\{\sum_{j=1}^n (X_j I - G_j)^2 - \sum_{i,j=1}^n c_{i,i}^j (X_j I - G_j) - \sum_{i,j,\ell,m=1}^n R^m_{\ell ij} a_i^* a_j a_\ell^* a_m\}$$

と書ける. ここで

$$G_j = \sum_{\ell,m=1}^n c_{j,\ell}^m a_\ell^* a_m$$

であり, I は $\wedge^*(T^*(M))$ の恒等写像とする.

次に $\mathbf{R}^n$ 上での Cauchy 問題について考察する:

$$(2.2) \qquad \begin{cases} (\frac{\partial}{\partial t} + R(x, D)) U(t) & = 0 \quad \text{in } (0, T) \times \mathbf{R}^n, \\ U(0) & = I \quad \text{in } \mathbf{R}^n, \end{cases}$$

ここで $R(x,D)$ はその表象を $r(x,\xi) = p_2(x,\xi)I + p_1(x,\xi)$ とする偏微分作用素, I は単位行列, $p_1(x,\xi)$ は各成分が $S^1_{1,0}$ に属する行列, $p_2(x,\xi)$ はスカラー関数で $p_2 \geq \delta|\xi|^2$ $(\delta > 0)$ を満たすものとする.

行列 Π を以下で定義する. $\Pi = (\Pi_{ij})$, $\quad \Pi_{ij} = a_i^* a_j \quad 1 \leq i,j \leq n.$

Definition 1. K^m を $S^m_{1,0}$ の部分集合であって $K^m = \{p(x,\xi:\Pi); B(\mathbf{R}^n)$ を係数とする ξ と $\Pi_{i,j}, (i,j=1,2,\cdots,n)$ の m 次多項式 $\}$ と定義する. 表象 $p(x,\xi:\Pi) = \sum_{I,J} p_{I,J}(x,\xi)a_I^* a_J \in K^m$ に対して $A^*(M)$ に作用する擬微分作用素 $P = p(x,D:\Pi)$ を以下のように定義する:

$$p(x,D:\Pi)(\varphi_K \omega^K) = \sum_{I,J} p_{I,J}(x,D)\varphi_K a_I^* a_J(\omega^K).$$

今の場合, Lemma 1 の結果から $\alpha_j = \sigma(X_j)$ とおくと, (2.1) に対応する $r(x,\xi)$ は次の形をしている:

$r(x,\xi) = r_2(x,\xi:\Pi) + r_1(x,\xi:\Pi)$, ここで $r_j(x,\xi:\Pi) \in K^j$ であり,

$$r_2(x,\xi:\Pi) = -\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j I - G_j)^2 + R, \quad R = \sum_{i,j,\ell,m=1}^{n} R^m_{\ell ij} a_i^* a_j a_\ell^* a_m$$

となる. 我々の場合は (2.2) における p_2 は $p_2 = -\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j)^2 I$ である. (2.2) の基本解 $U(t)$ は助変数 t を持つ擬微分作用素として構成できる. 更に その表象の主要部分は

$$u_0(t,x,\xi) = e^{-r_2(x,\xi:\Pi)t}$$

である. これによって擬微分作用素 $U_0(t)$ の核の trace は

$$\tilde{u}_0(t,x,x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n} u_0(t,x,\xi)d\xi = (\frac{1}{2\sqrt{\pi t}})^n \sqrt{\det g}\{1 + O(\sqrt{t})\}e^{-tR}$$

として得られる.

第4節で述べる Berezin-Patodi の定理を適用することにより,

$$\operatorname{str}\tilde{u}_0(t,x,x) = \begin{cases} (\frac{1}{2\sqrt{\pi t}})^n \sqrt{\det g}\operatorname{str}\{\frac{(-1)^m}{m!}R^m t^m\} + O(t), & \text{if } n = 2m\ ; \\ O(\sqrt{t}), & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

を得る. 更に $t \to 0$ のとき

$$\operatorname{str} e(t,x,x)dv_x - \operatorname{str}\tilde{u}_0(t,x,x)dx = \begin{cases} O(t), & \text{if } n \text{ is even}\ ; \\ O(\sqrt{t}), & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

となる. 従って局所的 Gauss-Bonnet-Chern の定理は $n = 2m$ のとき,

$$(\frac{1}{2\sqrt{\pi}})^n \operatorname{str}\{\frac{(-1)^m}{m!}R^m\} = (\frac{1}{2\sqrt{\pi}})^n \frac{1}{m!}\sum_{\pi,\sigma\in S_n}(\frac{1}{2})^m sign(\pi)sign(\sigma)$$
$$\times R_{\pi(1)\pi(2)\sigma(1)\sigma(2)}\cdots R_{\pi(n-1)\pi(n)\sigma(n-1)\sigma(n)}$$

が成り立つことにより証明できる.

3 The representation of L

M を滑らかな Kaehler 多様体でその hermitian metric を g とする. $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ を局所座標 U での $T^{1,0}(M)$ の局所正規直交基とする. 即ち $g(Z_i, Z_j) = 0, g(\bar{Z}_i, \bar{Z}_j) = 0, g(Z_i, \bar{Z}_j) = \delta_{i,j}$ を満たすものとし, さらに $\omega^1, \omega^2, \cdots, \omega^n$ をその双対基とする. Levi-Civita connection ∇ を使って,$A^{0,q}(M)$ に作用する $\bar{\partial}$ とその dual $\bar{\partial}^*$ は以下のように書ける:

$$\bar{\partial} = \sum_{j=1}^{n} e(\bar{\omega}^j)\nabla_{\bar{Z}_j}, \qquad \bar{\partial}^* = -\sum_{j=1}^{n} \imath(\bar{Z}_j)\nabla_{Z_j},$$

ここで次の記号を使った.

$$e(\eta)\omega = \eta \wedge \omega, \ (\imath(Z)\omega)(Y_1, \cdots, Y_{p-1}) = \omega(Z, Y_1, \cdots, Y_{p-1}).$$

$R(Z_\alpha, Z_\beta)$ を curvature transformation とする. 即ち

$$R(Z_\alpha, Z_\beta) = [\nabla_{Z_\alpha}, \nabla_{Z_\beta}] - \nabla_{[Z_\alpha, Z_\beta]}, \quad \alpha, \beta \in \Lambda = \{1, \cdots, n, \bar{1}, \cdots, \bar{n}\}$$

とする. $\{Z_j, \bar{Z}_j\}_{j=1,\cdots,n}$ が正規直交基であるので, 次の等式が成り立つ.

$$R^{\bar{i}}_{\bar{j}k\bar{\ell}} = R_{i\bar{j}k\bar{\ell}} = g(R(Z_k, \bar{Z}_\ell)\bar{Z}_j, Z_i) = R(Z_i, \bar{Z}_j, Z_k, \bar{Z}_\ell)$$

.

M が Kaehler manifold である仮定より ∇ がベクトル場の type を保つので, curvature transformation は

$$R(Z_i, Z_j) = 0, \ \ R(\bar{Z}_i, \bar{Z}_j) = 0$$

を満たす.

以下の記号を使う.

記号.

$$Z_{\bar{j}} = \bar{Z}_j, \qquad \omega^{\bar{j}} = \bar{\omega}^j \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

$$e(\omega^\alpha) = a^*_\alpha, \qquad \iota(Z_\beta) = a_\beta, \qquad (\alpha, \beta \in \Lambda)$$

$$\bar{a}_I = a_{\bar{i}_1} a_{\bar{i}_2} \cdots a_{\bar{i}_p}, \qquad \bar{a}^*_I = a^*_{\bar{i}_p} \cdots a^*_{\bar{i}_1} \qquad \text{for } I = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_p\},$$

$$\bar{\omega}^I = \bar{\omega}^{i_1} \wedge \bar{\omega}^{i_2} \wedge \cdots \wedge \bar{\omega}^{i_p} \qquad \text{for } I = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_p\}.$$

$c^\gamma_{\alpha,\beta}, (\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda)$ と $R^\gamma{}_{\beta i\bar{j}}(\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Lambda)$ を次式の係数とする:

$$\nabla_{Z_\alpha} Z_\beta = \sum_{\gamma \in \Lambda} c^\gamma_{\alpha,\beta} Z_\gamma, \quad R(Z_i, Z_{\bar{j}})Z_\beta = \sum_{\gamma \in \Lambda} R^\gamma{}_{\beta i\bar{j}} Z_\gamma.$$

Proposition 1. 係数 $c^{\gamma}_{\alpha,\beta}$ は以下の等式を満たす.

$$c^{\bar{i}}_{\alpha j} = c^{i}_{\alpha,\bar{j}} = 0, \quad c^{i}_{\alpha,j} = -c^{\bar{j}}_{\alpha,\bar{i}}, \quad (\alpha \in \Lambda, i, j \in \{1, \cdots, n\})$$

$$[Z_\alpha, Z_\beta] = \sum_{\gamma\in\Lambda}(c^{\gamma}_{\alpha,\beta} - c^{\gamma}_{\beta,\alpha})Z_\gamma \quad (\alpha, \beta \in \Lambda).$$

a_α, a^*_β に対する次の命題は 基本的である.

Proposition 2. 任意の $\alpha, \beta \in \Lambda$ に対して

$$a_\alpha a_\beta + a_\beta a_\alpha = 0, \ a^*_\alpha a^*_\beta + a^*_\beta a^*_\alpha = 0, \ a_\alpha a^*_\beta + a^*_\beta a_\alpha = \delta_{\alpha\beta},$$

が成り立つ.

上の命題より $L = \bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial$ に対して Böchner-Kodaira formula として知られている次の表現が導ける.

Theorem 1. L は $A^{0,*}(M) = \sum_{q=0}^{n} A^{0,q}(M)$ 上で次の表現を持つ;

$$L = -\frac{1}{2}\{\sum_{j=1}^{n}(\nabla_{Z_j}\nabla_{\bar{Z}_j} + \nabla_{\bar{Z}_j}\nabla_{Z_j}) - \nabla_D - \sum_{j=1}^{n} R(Z_j, \bar{Z}_j)\}.$$

ただしベクトル場 D は

$$D = \sum_{j=1}^{n}(\nabla_{\bar{Z}_j} Z_j + \nabla_{Z_j}\bar{Z}_j)$$

である.

$$G_\alpha = \sum_{\ell,m=1}^{n} c^{m}_{\alpha,\ell} a^*_{\bar\ell} a_{\bar m} \quad (\alpha \in \Lambda)$$

と $\wedge^*(T^{0,*}(M))$ 上の恒等写像 I を使って Theorem 1 と Proposition 1 により

$$L = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\{(Z_j I - G_j)(\bar{Z}_j I - G_{\bar{j}}) + (\bar{Z}_j I - G_{\bar{j}})(Z_j I - G_j)\}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\{c^{\bar{j}}_{i,\bar{i}}(\bar{Z}_j I - G_{\bar{j}}) + c^{j}_{\bar{i},i}(Z_j I - G_j)\} - \frac{1}{2}\sum_{j,k,\ell=1}^{n} R_{\ell\bar{k}j\bar{j}} a^*_{\bar{k}} a_{\bar{\ell}}$$

と 局所的に書ける.

4 Berezin-Patodi's formula

V を内積のある n 次元ベクトル空間とし, $\wedge^p(V)$ を その anti-symmetric な p 次 tensor 空間とし, $\wedge^*(V) = \sum_{p=0}^{n} \wedge^p(V)$ とおく. $\{v_1, \cdots, v_n\}$ を V の正規直交基とする. $\wedge^*(V)$ 上の線形変換 a^*_i を $a^*_i v = v_i \wedge v$ で定義し, その adjoint operator を a_i とする . このとき, これらの線形作用

素 $\{a_i^*, a_j\}$ は Proposition 2 の等式を満たす．以上の仮定のもとで，次の代数的な定理とその系は H.l.Cycon,R.G.Froese,W.Kirsch and B.Simon[3] において証明されている．

Theorem 2. *(Berezin-Patodi)* $\wedge^*(V)$ 上の任意の線形写像 A は，一意的に $A=\sum_{I,J}\alpha_{I,J}a_I^*a_J$ と書けて $A_p=A|_{\wedge^p(V)}$ とおくと，その *supertrace* は

$$\sum_{p=0}^{n}\mathrm{tr}[(-1)^pA_p]=(-1)^n\alpha_{\{1,2,\cdots,n\}\{1,2,\cdots,n\}}$$

となる．

Corollary (1) もし multi index I と J が $\sharp(I)<n$ または $\sharp(J)<n$ を満たすならば，

$$\sum_{p=0}^{n}\mathrm{tr}[(-1)^pa_I^*a_J]=0$$

が成り立つ．

(2)π と σ を n 次置換群の元とすると，

$$\sum_{p=0}^{n}\mathrm{tr}[(-1)^pa_{\pi(1)}^*a_{\sigma(1)}a_{\pi(2)}^*a_{\sigma(2)}\cdots a_{\pi(n)}^*a_{\sigma(n)}]=(-1)^n sign(\pi)sign(\sigma)$$

が成り立つ．

5　退化した放物型方程式の基本解

この原稿では擬微分作用素は Weyl 表象を使うものとする．即ち表象 $p(x,\xi)\in S^m_{\rho,\delta}(\mathbf{R}^n)$ に対しそれに対応する擬微分作用素を

$$Pu(x)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}e^{i(x-y)\cdot\xi}p(\frac{x+y}{2},\xi)u(y)dyd\xi,\qquad u\in S(\mathbf{R}^n)$$

で定義する．

Definition 2. (1) 助変数 (x,ξ) をもつ線形変換 $p(x,\xi)$ に対し ∇p はベクトル

$$\nabla p=\binom{\nabla_x p}{\nabla_\xi p}={}^t(\frac{\partial}{\partial x_1}p,\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}p,\frac{\partial}{\partial \xi_1}p,\cdots,\frac{\partial}{\partial \xi_n}p)$$

を表すものとする．

(2) $\mathbf{C}^n\times\mathbf{C}^n$ の変換 J を $u,v\in\mathbf{C}^n$ に対し

$$J\binom{u}{v}=\binom{v}{-u}$$

とする．$u={}^t(u_1,\cdots,u_n), u_j$ がベクトル空間の線形変換の場合にも同じ記号 J を使う．

(3) ベクトル $t={}^t(t_1,\cdots,t_k), s={}^t(s_1,\cdots,s_k)$ に対して $<t,s>=\sum_{j=1}^k t_js_j$ ．

次の退化した放物型方程式系の初期値問題に対する基本解 $U(t)$ について考察する;

$$\begin{cases} (\frac{d}{dt}+P)U(t) &= 0 \quad \text{in } (0,T)\times\mathbf{R}^m, \\ U(0) &= I \quad \text{on } \mathbf{R}^m \end{cases}$$

(See I-Iwasaki [8], C.Iwasaki[9]). ここで 偏微分作用素 P であって，その表象を $p(x,\xi)=p_2(x,\xi)+p_1(x,\xi)+p_0(x,\xi)$ とする. ($p_j(x,\xi)$ は ξ に関して j 次同次多項式). [8] においては A.Melin[13] で特徴付けられた退化した楕円型作用素に対応する退化した放物型方程式の基本解の構成について考察されているが, ここではその議論を下記のように特別な形の方程式に適用する.

仮定 (A).

$$(A)-(1) \qquad p_2(x,\xi)=\sum_{j=1}^{d} b_j(x,\xi)c_j(x,\xi) \quad (c_j=\bar{b}_j),$$

ここでは $b_j(\in S^1_{1,0})$ はスカラー表象とし, 低階は特性集合 $\Sigma=\{(x,\xi)\in\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^m; b_j(x,\xi)=0, j=1,\cdots,d\}$ の上である正数 c が存在して

$$(A)-(2) \qquad p_1+\mathrm{tr}_+(\frac{Q}{2})\geq c|\xi|$$

が成り立つ. ただし,Ξ は $2n\times 2n$ の行列 $\Xi=(\nabla c_1,\cdots,\nabla c_d,\nabla b_1,\cdots,\nabla b_d)$ とし, $\mathrm{tr}_+ Q$ は行列

$$Q=i\Xi^* J\Xi$$

の正の固有値の和とする.

$\mathbf{b}={}^t(b_1,\cdots,b_d)$, $\mathbf{c}={}^t(c_1,\cdots,c_d)$ と定義すると初期値問題の基本解について次の定理を得る.

Theorem 3. $p(x,\xi)$ が 仮定 (A) を満たすならば, 基本解 $U(t)$ は助変数 t を持つ $S^0_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ に属する表象 $u(t)$ を持つ擬微分作用素として構成できる. 更に $u(t)$ は任意の N に対して次の展開を持つ:

$$u(t)-\sum_{j=0}^{N-1}u_j(t)\in S^{-\frac{N}{2}}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}},$$

$$u_0(t)=\exp\varphi,\quad u_j(t)=f_j(t)u_0(t)\in S^{-\frac{j}{2}}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}},$$

ここで

$$\varphi=-\frac{t}{2}\left\langle\binom{\mathbf{c}}{\mathbf{b}},F(\frac{Qt}{2})\binom{\mathbf{b}}{\mathbf{c}}\right\rangle-\frac{1}{2}\mathrm{tr}[\log\{\cosh(\frac{\mathrm{Q}t}{2})\}]-\mathrm{p}_1\mathrm{t},$$
$$F(s)=s^{-1}\tanh s.$$

6 Kaehler 多様体の場合の証明の概略

複体の長さが多様体の次元の半分であるので, 第 2 節の方法では (1.4) の主張を得ることができない. Definiton 1 に代わる次の Definition 3 に述べるような新しい表象のクラスを導入する必要がある.

Definition 3.

$$K^m = \{\sum_{I,J} p_{I,J}(x,\xi)\bar{a}_I^* \bar{a}_J : p_{I,J}(x,\xi) \in S_{1,0}^k,\ k + \frac{|I|+|J|}{2} \leq m\}.$$

一点 $\hat{z} \in M$ を固定して, その supertrace を求めることとする. U を $\hat{z}$ を含む局所座標系とする. U での局所座標 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ を以下の条件を満たすように選ぶ.

$$\hat{z} = 0, \qquad Z_j = \frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{k=1}^{n} \kappa_{jk}(z,\bar{z}) \frac{\partial}{\partial z_k}, \qquad \kappa_{jk}(z,\bar{z})|_{z=\hat{z}} = 0.$$

記述を簡単にする為に以下の記号を使う.

$$z_{\bar{j}} = \bar{z}_j, \qquad \hat{G}_j = G_j|_{z=0}.$$

$W(z,\bar{z})$ を

$$W(z,\bar{z}) = \sum_{j=1}^{n} (z_j \hat{G}_j + \bar{z}_j \hat{G}_{\bar{j}}) = \sum_{\alpha \in \Lambda} z_\alpha \hat{G}_\alpha \tag{6.1}$$

と定義する. このとき次の補題を得る.

Lemma 2. *(6.1)* で定義した $W(z,\bar{z})$ に対して

$$Le^W = e^W \tilde{L}$$

を得る. ここで

$$\tilde{L} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \{(Z_j I - F_j)(\bar{Z}_j I - F_{\bar{j}}) + (\bar{Z}_j I - F_{\bar{j}})(Z_j I - F_j)\} \tag{6.2}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \{c_{i,\bar{i}}^{\bar{j}} (\bar{Z}_j I - F_{\bar{j}}) + c_{\bar{i},i}^{j} (Z_j I - F_j)\} - \frac{1}{2} R,$$

ただし

$$R = e^{-W} (\sum_{j,k,\ell=1}^{n} R_{\ell\bar{k}j\bar{j}} a_k^* a_{\bar{\ell}}) e^W, \quad F_\alpha \in K^2,\ F_\alpha|_{z=0} \in K^1$$

である.

$(\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{L})$ の基本解を構成する為に表象のクラス K^m で Theorem 3 を適用すると, 基本解が構成できてその主要部分は $u_0(t) = e^\varphi$ であり, φ は (5.1) において

$$Q = -\begin{pmatrix} Q_0 & 0 \\ 0 & \bar{Q}_0 \end{pmatrix} \mod K^1$$

としたものである. ただし $(Q_0)_{ij} = R(Z_i, \bar{Z}_j)$ であることが示される. 従って表象 $u_0(t,x,\xi)$ を持つ擬微分作用素の核 $\tilde{u}_0(t,x,x)$ は

$$\tilde{u}_0(t,x,x) = (2\pi t)^{-n} \det(\frac{tQ_0}{\exp(tQ_0) - 1}) \sqrt{\det g}$$

である. その supertrace は

$$\mathrm{str}\,\tilde{u}_0(t,x,x) = (2\pi t)^{-n}\mathrm{str}\ [\det(\frac{\mathrm{tQ_0}}{\exp(\mathrm{tQ_0})-1})]\sqrt{\mathrm{detg}}$$

となる. Theorem 2 を適用することにより,

$$\mathrm{str}\,\tilde{u}_0(t,x,x)dx = (2\pi i)^{-n}[Td(TM)]_{2n}$$

を得る. ただし右辺は curvature form Ω

$$\Omega = (\Omega^k_\ell),\quad \Omega^k_\ell = \sum_{\mathrm{i,j=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{R}_{\bar{\mathrm{k}},\ell,\mathrm{i},\bar{\mathrm{j}}}\omega^{\mathrm{i}}\wedge\bar{\omega}^{\mathrm{j}}$$

を使って

$$Td(T(M)) = \det(\frac{\Omega}{e^{\Omega}-1})$$

と定義されるものである.

$$\mathrm{str}\,e(t,x,x)dv = \mathrm{str}\,\tilde{u}_0(t,x,x)dx + 0(t^{\frac{1}{2}}),\quad t\to 0$$

に注意すると, (1.5) を得る.

7 複素多様体における L の表現と supertrace の計算

M を Hermitian metric g を持つ複素多様体とする. 第3節と同様に局所座標系を選ぶ. Levi-Civita connection ∇ を使って $A^{p,q}(M)$ 上に作用する differential d とその adjoint ϑ は次のように書ける.

$$d = \sum_{j=1}^{n} e(\omega^j)\nabla_{Z_j} + \sum_{j=1}^{n} e(\bar{\omega}^j)\nabla_{\bar{Z}_j},\quad \vartheta = -\sum_{j=1}^{n}\imath(Z_j)\nabla_{\bar{Z}_j} - \sum_{j=1}^{n}\imath(\bar{Z}_j)\nabla_{Z_j}.$$

connection が the Levi-Civita connection であることより、$\nabla g = 0$ と torsion T が消えている. しかし、∇ はベクトルの type を保存しない. 即ち、複素構造 I に対し $\nabla I \neq 0$. 従って $R(Z_i,Z_j)\neq 0,\quad R(\bar{Z}_i,\bar{Z}_j)\neq 0$ である.

作用素 L の表現の為に新しい connection ∇^S と $\nabla^{\tilde{S}}$ を導入し, その特徴付けをする.

Definition 4.
(1) $\nabla^{\tilde{S}}$ を M の Hermitian connection とする. 即ち以下を満たす唯一の connection である.

$$\nabla^{\tilde{S}}g = 0,\quad \nabla^{\tilde{S}}I = 0,\quad T^{\tilde{S}}(V,\bar{W}) = 0,\ V\in T^{(1,0)}(M), \bar{W}\in T^{(0,1)}(M).$$

$\tilde{S}^{\gamma}_{\alpha\beta}$ を connection $\nabla^{\tilde{S}}$ の係数とする:

$$\nabla^{\tilde{S}}_{Z_\alpha}Z_j = \sum_{k=1}^{n}\tilde{S}^k_{\alpha j}Z_k,\quad \nabla^{\tilde{S}}_{Z_\alpha}Z_{\bar{j}} = \sum_{k=1}^{n}\tilde{S}^{\bar{k}}_{\alpha\bar{j}}\bar{Z}_k.$$

(2) ∇^S を以下を満たす唯一の M の connection とする:

$$\nabla^S g = 0,\quad \nabla^S I = 0,$$

および

$$g(\bar{W}, T^S(U,V)) + g(U, T^S(\bar{W}, V)) = 0 \qquad \text{for } U, V \in T^{(1,0)}(M), \bar{W} \in T^{(0,1)}(M).$$

Proposition 3. 上記の *connections* を使って,

$$\bar{\partial} = \sum_{r=1}^{n} a_{\bar{r}}^* D_{\bar{r}}, \qquad \bar{\partial}^* = -\sum_{r=1}^{n} a_{\bar{r}}(D_r + \sum_{j=1}^{n} c_{\bar{j}r}^{\bar{j}})$$

と表示できる. ただし D_α は以下の作用素である.

$$D_\alpha = Z_\alpha - \sum_{j,k=1}^{n} c_{\alpha\bar{j}}^{\bar{k}} a_{\bar{j}}^* a_{\bar{k}} - \sum_{j,k=1}^{n} \tilde{S}_{\alpha j}^{k} a_j^* a_k.$$

Kaehler form $\Phi(u,v) = g(Iu,v)$ は $\Phi = i\sum_{j=1}^{n} \omega^j \wedge \bar{\omega}^j$ と局所的に書けるが, $i\partial\bar{\partial}\Phi$ については次の命題が成立する.

Proposition 4.

$$i\partial\bar{\partial}\Phi = \sum_{j,k,\ell,m=1}^{n} \omega_{\bar{\ell}\bar{m}jk}\bar{\omega}^\ell \wedge \bar{\omega}^m \wedge \omega^j \wedge \bar{\omega}^k,$$

ここで

(7.1)
$$\omega_{\bar{\ell}\bar{m}jk} = -\frac{1}{2}R_{\bar{\ell}\bar{m}jk} + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\{c_{\bar{m}j}^{\bar{r}}c_{k\bar{\ell}}^{r} + c_{\bar{\ell}k}^{\bar{r}}c_{j\bar{m}}^{r} - c_{\bar{m}k}^{\bar{r}}c_{j\bar{\ell}}^{r} - c_{\bar{\ell}j}^{\bar{r}}c_{k\bar{m}}^{r}\}$$

である.

Bochner-Kodaira の公式の代わりに (7.1) を使って, 複素多様体上の L に対する次の表現定理を得る.

Theorem 4. $A^{0,*}(M) = \sum_{q=0}^{n} A^{0,q}(M)$ 上で

$$L = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial} = -\frac{1}{2}\{\sum_{j=1}^{n}(\nabla_{Z_j}^S\nabla_{\bar{Z}_j}^S + \nabla_{\bar{Z}_j}^S\nabla_{Z_j}^S) - \nabla_D^S$$

$$+ \sum_{j,k,r=1}^{n} e(\bar{\omega}^j)\iota(\bar{Z}_k)g(R^{\bar{S}}(\bar{Z}_j, Z_k)Z_r, \bar{Z}_r)\}$$

$$- \sum_{\ell,m,j,k=1}^{n} \omega_{\bar{\ell}\bar{m}jk}\bar{a}_\ell^*\bar{a}_m^*\bar{a}_j\bar{a}_k - 2\sum_{r,\ell,k=1}^{n} \omega_{\bar{r}\bar{\ell}rk}\bar{a}_\ell^*\bar{a}_k$$

が成り立つ. ただし,

$$D = \sum_{r=1}^{n}\{\nabla_{\bar{Z}_r}^S Z_r + \nabla_{Z_r}^S \bar{Z}_r + T^S(Z_r, \bar{Z}_r)\}$$

とする.

もし M が Kaehler manifold であるならば, 次の等式が成り立つことに注意する.

$$\partial\bar{\partial}\Phi = 0,\ \nabla^S = \nabla^{\bar{S}} = \nabla,\ T^S = T^{\bar{S}} = 0.$$

$\partial\bar{\partial}\Phi \neq 0$ の場合には, Lemma 1 の代わりに上記の Theorem 4 を適用して複素多様体上の放物型作用素 $(\frac{\partial}{\partial t} + L)$ の基本解が表象計算により同様に構成できる. しかしこの場合には, 基本解の主要部分の supsertrace の計算結果は $t \to 0$ で特異性が表れる. 従って「局所的 Reimann-Roch の定理」は成り立たないと言える.

一方, $\partial\bar{\partial}\Phi = 0$ の場合には詳しい議論は省略するが, $\nabla^M = 2\nabla - \nabla^S$ で定義される新しい共変微分に対応する curvature transformation $R^M(\bar{Z}_j, Z_k)$ を導入して第6節と同様な議論をすると, (7.1) と Theorem 4 より次の定理の2番目の主張を得る. これは確率論の手法によって, J.M.Bismut[2] において示されているものと一致する.

Theorem 5.
(1) $\partial\bar{\partial}\Phi \neq 0$ かつ n が偶数ならば,

$$\mathrm{str}\, e(t,x,x)dv_x = (2\pi)^{-n}(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{(i\partial\bar{\partial}\Phi)^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!}t^{-\frac{n}{2}} + O(t^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}})$$

が成り立つ.

(2) $\partial\bar{\partial}\Phi = 0$ ならば

$$\mathrm{str}\, e(t,x,x)dv_x = (\frac{1}{2\pi i})^n\Big[\sqrt{\det(\frac{\frac{\Lambda}{2}}{\sinh(\frac{\Lambda}{2})})}\ e^{-\frac{1}{2}\,tr\Omega^S}\Big]_{2n} + 0(t)$$

が成立つ. ただし Λ は $2n \times 2n$ *real anti-symmetric* 行列でその成分は次の式で与えられる:

$$(\Lambda)_{pq} = \sum_{\ell,m=1}^{n} g(R^M(\bar{Z}_\ell, Z_m)X_q, X_p)\bar{\omega}^\ell \wedge \omega^m,$$

$$Z_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_j - iX_{n+j}), \bar{Z}_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_j + iX_{n+j}).$$

FERENCES

[1] N.Berline, E.Getzler and M.Vergne, *Heat Kernels and Dirac Operators,* 1992, Springer-Verlag.

[2] J.M.Bismut, *A local index theorem for non Kähler manifolds, Math.Ann.* **284** (1989), 681-699.

[3] H.l.Cycon,R.G.Froese,W.Kirsch and B.Simon, *Schrödinger operators,* Text and Monographics in Physics,1987, Springer-Verlag.

[4] E.Getzler, *The local Atiyah-Singer index theorem,* Critical phenomena, radom systems, gauge theories, K.sterwalder and R.Stora,eds. Les Houches, Sessin XLIII,(1984), 967-974, Noth-Holland.

[5] P.B.Gilkey, *Curvature and the eigenvalues of the Laplacian for geometrical elliptic complexes,* Ph.D.Dissertation, Harvard University, 1972.

[6] P.B.Gilkey, *Invariance Theory,the Heat Equation,and the Atiyah-Singer Index Theorem,* 1984, Publish or Perish, Inc..

[7] T.Kotake, *An analytic proof of the classical Riemann-Roch theorem,* Global Analyis, Proc.Symp.Pure Math. **XVI** Providence, 1970.

[8] C.Iwasaki and N.Iwasaki, *Parametrix for a Degenerate Parabolic Equation and its Application to the Asymptotic Behavior of Spectral Functions for Stationary Problems,* Publ.Res.Inst.Math.Sci.**17** (1981), 557-655.

[9] C.Iwasaki, *Construction of the fundamental solution for Degenerate parabolic system and its application to construction of a parametrix of* $\Box_b$, Osaka J.Math. **21** (1984), 931-954.

[10] C.Iwasaki, *A proof of the Gauss-Bonnet-Chern Theorem by the symbol calculus of pseudo-diffeerential operators,* Japanese J.Math. **21** (1995), 235-285.

[11] C.Iwasaki, *Symbolic calculus for construcion of the fundamental solution for a degenerate equation and a local version of Riemann-Roch theorem,* Geometry, Analysis and Applications, 2000, 83-92, World Scientific.

[12] S.Kobayashi-K.Nomizu, *Foundations of Differential Geometry* **I,II,** 1963, John Wiley & Sons.

[13] A.Mein, *Lower bounds for pseudo-differential operators,* Ark.Mat. **9** (1971), 117-140.

[14] V.K.Patodi, *An analytic proof of Riemann-Roch-Hirzebruch theorem for Kaehler manifold,* J.Differential Geometry **5** (1971), 251-283.