数理解析研究所講究録 1415 巻 2005 年 96-104

ON NONLINEAR ERGODIC THEOREMS FOR NONEXPANSIVE SEMIGROUPS IN BANACH SPACES

芝浦工業大学 厚芝 幸子 (Sachiko Atsushiba)
Department of Mathematics
Shibaura Institute of Technology

1. 序

C を実 Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とする. C から C への写像 T が C から C への nonexpansive であるとは任意の $x, y \in C$ に対して

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

をみたすときである. $F(T)$ で集合 $\{x \in C : x = Tx\}$ を表す. 最初の非線形エルゴード定理は Hilbert 空間において Baillon [5] が確立した: C を Hilbert 空間 H の空でない有界閉凸部分集合とする. T を C から C への nonexpansive mapping とする. x を C の元とする. このとき, $S_n(x) = (1/n)\sum_{k=0}^{n-1} T^k x$ は T の不動点に弱収束する. Bruck [6] は Baillon の定理 [5] を一様凸で Fréchet 微分可能なノルムをもつ Banach 空間へ一般化した (実数パラメータの写像族に対する定理は [17, 19] を参照). また, 同じ空間において, Hirano, Kido and Takahashi [11, 12] が可換な非拡大半群に対する非線形エルゴード定理を示し, さらに Lau, Shioji and Takahashi [15] は非可換な非拡大半群に対する定理を示した. 一方, Opial 条件をみたす Banach 空間はノルムに滑らかさを仮定しない空間であるが, Opial 条件をみたす一様凸な Banach 空間で, Hirano [10] が nonexpansive mappings に対する非線形エルゴード定理を示し, Miyadera and Kobayasi [17] が実数パラメータの写像族に対する定理を示した. [1] ではこの空間において可換な非拡大半群に対する非線形エルゴード定理を示した. このような流れを受けて, 最近 Kaczor, Kuczumow and Reich [14] が, 一様凸で Fréchet 微分可能なノルムをもつ Banach 空間より一般的な Banach 空間である, 一様凸でその共役空間が Kadec-Klee 条件をみたす Banach 空間において nonexpansive mappings に対する非線形エルゴード定理を示したし, 実数パラメータの写像族に対する定理 [13] も示された.

本研究では, 一様凸でその共役空間が Kadec-Klee 条件をみたす Banach 空間において得られた可換な非拡大半群に対する非線形エルゴード定理を報告する. また, Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間における非線形エルゴード定理と Opial

---

Key words and phrases. Fixed point, nonexpansive mapping, nonexpansive semigroup, weak convergence, nonlinear ergodic theorem.

条件をみたす一様凸な Banach 空間における非線形エルゴード定理が統一的な考えで証明されることに関しても報告する.

2. 準備

本論文では以後, E は実 Banach 空間を表し, E^* は E の共役空間とし, $\langle y, x^* \rangle$ は $x^* \in E^*$ の $y \in E$ での値を表す. $x_n \rightharpoonup x$ は点列 $\{x_n\}$ が x に弱収束することを表し, また $\text{w-}\lim_{n\to\infty} x_n = x$ も x_n が x に弱収束することを表す. $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^+$ はそれぞれ, すべての実数からなる集合, すべての非負の実数からなる集合とする. さらに, $\mathbb{N}$ はすべての非負の整数からなる集合を表す.

Banach 空間 E が狭義凸であるとは $\|x\| = \|y\| = 1, x \neq y$ をみたす任意の $x, y \in E$ について $\|x+y\|/2 < 1$ が成立するときをいう. 狭義凸な Banach 空間 E では, 任意の $x, y \in E$, $\lambda \in (0,1)$ に対して $\|x\| = \|y\| = \|(1-\lambda)x + \lambda y\|$ が成立するならば, $x = y$ となる.

$B_r = \{v \in E : \|v\| \leq r\}$ とする. Banach 空間 E が一様凸であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $x, y \in B_1$ かつ $\|x-y\| \leq \varepsilon$ ならば, $\|x+y\|/2 \leq 1 - \delta$ となる $\delta > 0$ が存在することである. 一様凸な Banach 空間は回帰的であり, 狭義凸であることが知られている ([21] 参照). また, Banach 空間 E のノルムが Gâteaux 微分可能であるとは任意の $x, y \in S_E$ に対して

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t} \tag{1}$$

が存在するときにいう. ただし, $S_E = \{v \in E : \|v\| = 1\}$ とする. $x \in S_E$ に対して, 極限 (1) が $y \in S_E$ に関して一様に存在するとき, Banach 空間 E のノルムが Fréchet 微分可能であるという. Banach 空間 E が Opial 条件をみたすとは, E の点列 $\{x_n\}$ が $\text{w-}\lim_{n\to\infty} x_n = x$ をみたすならば

$$\varliminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \varliminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|$$

が $y \neq x$ なる任意の $y \in C$ に対して成立するときにいう ([18]). 回帰的な Banach 空間においては、この条件は E の $\text{net}\{x_\alpha\}$ が $\text{w-}\varliminf_{\alpha} x_\alpha = x$ をみたすならば g

$$\varliminf_{\alpha} \|x_\alpha - x\| < \varliminf_{\alpha} \|x_\alpha - y\|$$

が $y \neq x$ なる任意の $y \in C$ に対して成立するという条件と同値である ([1] 参照). Banach 空間 E が Kadec-Klee 条件をみたすとは, E の点列 $\{x_n\}$ が $\text{w-}\lim_{n\to\infty} x_n = x$ かつ $\|x_n\| \to \|x\|$ をみたすならば $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ となるときにいう.

Remark 2.1. Fréchet 微分可能なノルムをもつ回帰的な Banach 空間の共役空間は Kadec-Klee 条件をみたす ([8, 21] などを参照). また, Fréchet 微分可能なノルムももたないし, Opial 条件もみたさない一様凸な Banach 空間であるが, 共役空間が Kadec-Klee 条件をみたす一様凸な Banach 空間が存在する ([8, 18] 参照).

以後, S は単位元をもつ commutative semigroup とする. $(S,\leq)$ は binary relation が次のように定義されているとき directed system になる. 以後, この論文では S にこの binary relation が入っているものとする: $a\leq b$ であることの必要十分条件は $a+c=b$ をみたす $c\in S$ が存在することである.

C から C への写像の族 $\mathcal{S}=\{T(s):s\in S\}$ が次の (i), (ii) をみたすとき, $\mathcal{S}=\{T(s):s\in S\}$ は C 上の nonexpansive semigroup であるという.

(i) $T(s+t)=T(s)T(t)$ が任意の $t,s\in S$ に対して成立する;
(ii) $\|T(s)x-T(s)y\|\leq\|x-y\|$ が任意の $x,y\in C$ と $s\in S$ に対して成立する.

$F(\mathcal{S})$ は $\mathcal{S}=\{T(s):s\in S\}$ の共通不動点, すなわち $F(\mathcal{S})=\bigcap_{s\in S}F(T(s))$ を表す.

以後, $B(S)$ は S 上の有界実数値関数全体からなる Banach 空間とし, そのノルムは supremum-norm とする. また, X は $B(S)$ の部分空間を表す. $\mu\in X^*$ に対して, $\mu(f)$ は μ の $f\in X$ での値を表すが, $\mu(f)$ は $\mu_t(f(t))$ とかくこともある. X が 1 を含むとき, X 上の線形汎関数 μ が $\|\mu\|=\mu(1)=1$ をみたすならば X 上の mean という. 任意の $s\in S$ と $f\in B(S)$ に対して, $r_sf\in B(S)$ を

$$(r_sf)(t)=f(ts),\qquad t\in S$$

で定義する. また r_s^* で r_s の共役作用素を表す. X は r_s-invariant であるとする, つまり $r_s(X)\subset X$ がすべての $s\in S$ に対して成り立つとする. このとき, 任意の $s\in S$ と $f\in X$ に対して $\mu(r_sf)=\mu(f)$ が成立するならば, X 上の mean μ は invariant という. $s\in S$ に対して, point evaluation δ_s を $\delta_s(f)=f(s)$ をすべての $f\in B(S)$ に対して成立させるものと定義する. point evaluations の凸結合を S 上の finite mean という. S 上の finite mean は $B(S)$ の部分空間で 1 を含む任意の部分空間 X 上の mean でもある.

C を Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とする. $\mathcal{S}=\{T(t):t\in S\}$ を C 上の nonexpansive semigroup で $F(\mathcal{S})$ が空でないとする. さらに任意の $x\in C$ に対して $\{T(t)x:t\in S\}$ の弱閉包が弱コンパクトであることを仮定する. X を $B(S)$ の部分空間で $1\in X$ で任意の $s\in S$ に対して r_s-invariant であり, また任意の $x\in C$ と $x^*\in E^*$ に対して, $t\mapsto\langle T(t)x,x^*\rangle$ は X の元とする. x を C の元とする. このとき, X 上の任意の mean μ に対して $\langle T_\mu x,y\rangle=\mu_s\langle T(s)x,y\rangle$ が任意の $y\in E^*$ に対して成立する $T_\mu:C\to C$ が考えられる ([20, 12]). また, T_μ は C から C への nonexpansive mapping になることや $x\in F(\mathcal{S})$ に対して $T_\mu x=x$ が成立することも知られている.

3. 補題

この節では主結果の非線形エルゴード定理の証明に使われる補題を記述する. 次の補題は Hirano, Kido and Takahashi [11] によって証明された.

Lemma 3.1. C を一様凸な Banach 空間 E の空でない有界閉凸部分集合とし, $\mathcal{S}=\{T(t):t\in S\}$ は C 上の nonexpansive semigroup とする. X は $B(S)$ の部分空間で $1\in X$ で任意の $s\in S$ に対して r_s-invariant であり, また任意の $x\in C$ と $x^*\in E^*$ に対して, $t\mapsto\langle T(t)x,x^*\rangle$ は X の元とする. x を C の元とする. このとき, S の任意の finite mean μ と $\varepsilon > 0$ に対してある $w_0 = w_0(\mu, \varepsilon) \in S$ が存在して,

$$\left\| \int T(h+s+w)x d\mu(s) - T(h)\left(\int T(s+w)x d\mu(s)\right)\right\| < \varepsilon$$

がすべての $h \in S$, $w \geq w_0$ について成立する.

Lemma 3.1 を用いることで, Opial 条件をみたす一様凸な Banach 空間における非線形エルゴード定理の証明で重要な役割を担う補題 [1, Lemma 3.2], [10, Lemma 2.5] , [17, Lemma 3.2] および狭義凸な Banach 空間のコンパクト凸集合における非線形エルゴード定理の証明で重要な役割を担う補題 [2, Lemma 3.1] , [3, Lemma 3.3], [4, Lemma 3.3] と同様の証明方法で次の補題を証明できる.

Lemma 3.2. C を一様凸な Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし, $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ は C 上の nonexpansive semigroup で $F(\mathcal{S})$ が空でないとする. X は $B(S)$ の部分空間で $1 \in X$ で任意の $s \in S$ に対して r_s-invariant であり, また 任意の $x \in C$ と $x^* \in E^*$ に対して, $t \mapsto \langle T(t)x, x^*\rangle$ は X の元とする. x は C の元とする. $\{\mu_\alpha : \alpha \in I\}$ と $\{\lambda_\beta : \beta \in J\}$ を S 上の finite means の net で

$$\lim_\alpha \|\mu_\alpha - r_t^* \mu_\alpha\| = 0 \quad \text{and} \quad \lim_\beta \|\lambda_\beta - r_t^* \lambda_\beta\| = 0 \quad (t \in S)$$

をみたすとする. このとき, S のある net$\{p_\alpha : \alpha \in I\}$ と $\{q_\beta : \beta \in J\}$ が存在して

$$\lim_\alpha \left\| a\int T(t+p_\alpha)x d\mu_\alpha(t) + (1-a)w_1 - w_2\right\| = \lim_\beta \left\| a\int T(q_\beta + t)x d\lambda_\beta(t) + (1-a)w_1 - w_2\right\|$$

が全ての $w_1, w_2 \in F(\mathcal{S})$ と $a \in [0,1]$ に対して成立する.

Remark 3.3. Lemma 3.2 において $p_\alpha' \geq p_\alpha$, $q_\beta' \geq q_\beta$ をみたす S の nets $\{p_\alpha'\}$, $\{q_\beta'\}$ をとる. このとき,

$$\lim_\alpha \left\| a\int T(t+p_\alpha')x d\mu_\alpha(t) + (1-a)w_1 - w_2\right\| = \lim_\beta \left\| a\int T(q_\beta' + t)x d\lambda_\beta(t) + (1-a)w_1 - w_2\right\|$$

が全ての $w_1, w_2 \in F(\mathcal{S})$ と $a \in [0,1]$ に対して成立する.

つぎの補題は Hirano, Kido and Takahahi [12] によって示された.

Lemma 3.4. C を一様凸な Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし, $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ は C 上の nonexpansive semigroup で $F(\mathcal{S})$ が空でないとする. X は $B(S)$ の部分空間で $1 \in X$ で任意の $s \in S$ に対して r_s-invariant であり, また 任意の $x \in C$ と $x^* \in E^*$ に対して, $t \mapsto \langle T(t)x, x^*\rangle$ は X の元とする. x は C の元とする. $\{\mu_\alpha : \alpha \in I\}$ と $\{\lambda_\beta : \beta \in J\}$ を S 上の finite means の net で

$$\lim_\alpha \|\mu_\alpha - r_t^* \mu_\alpha\| = 0 \quad \text{and} \quad \lim_\beta \|\lambda_\beta - r_t^* \lambda_\beta\| = 0 \quad (t \in S)$$

をみたすとする. x を C の元とする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ と $t \in S$ に対してある $\alpha_0(\varepsilon, t) \in I$ が存在し,

$$\left\| \int T(s+p)x d\mu_\alpha(s) - T(t)\left(\int T(s+p)x d\mu_\alpha(s)\right)\right\| < \varepsilon$$

がすべての $\alpha \geq \alpha_0(\varepsilon, t)$ と $p \in S$ について成立する.

Banach 空間 E の net$\{z_\alpha\}$ の weak ω-limit set を

$$\omega_w(\{z_\alpha\}) = \{z \in C : \text{w-}\lim_\beta z_{\alpha_\beta} = z\}.$$

で定義する.

Remark 3.5. $E, C, \mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}, X, \{\mu_\alpha\}$ は Lemma 3.4と同様とする. $\{p_\alpha\}$ は S の net とする. このとき, Lemma 3.4より, $\omega_w(\{T_{\mu_\alpha}x\}) \subset F(\mathcal{S}), \omega_w\left(\left\{\int T(t+p_\alpha)xd\mu_\alpha\right\}\right) \subset F(\mathcal{S})$ が成立する.

次の補題は、本質的には Falset, Kaczor, Kuczumow and Reich [9] で示されている ([13, 14] も参照).

Lemma 3.6. E は一様凸でその共役空間 E^* が Kadec-Klee 条件みたす Banach 空間とする. $\{z_\alpha\}$ は E の有界な net で任意の $w_1, w_2 \in \omega_w(\{z_\alpha\})$ と $a \in [0,1]$ に対して

$$\lim_\alpha \|az_\alpha + (1-a)w_1 - w_2\|$$

が存在するならば, $\omega_w(\{z_\alpha\})$ は 1 点からなる, つまり, z_α は C の元に弱収束する.

4. 非線形エルゴード定理

この節では, 一様凸でその共役空間が Kadec-Klee 条件みたす Banach 空間における非線形エルゴード定理について記す. Lemmas 3.2,3.4,3.6 と Remarks 3.3,3.5 を用いて次の補題を証明できる. この補題は主定理 (Theorem 4.2) の証明で本質となっている.

Lemma 4.1. E は一様凸でその共役空間 E^* が Kadec-Klee 条件みたす Banach 空間とする. C を E の空でない閉凸部分集合とし, $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ は C 上の nonexpansive semigroup で $F(\mathcal{S})$ が空でないとする. X は $B(S)$ の部分空間で $1 \in X$ で任意の $s \in S$ に対して r_s-invariant であり, また 任意の $x \in C$ と $x^* \in E^*$ に対して, $t \mapsto \langle T(t)x, x^*\rangle$ は X の元とする. x は C の元とする. $\{\mu_\alpha : \alpha \in I\}$ は

$$\lim_\alpha \|\mu_\alpha - r_s^*\mu_\alpha\| = 0 \qquad (*)$$

が任意の $s \in S$ について成立する S 上の finite mean の net とする. x を C の元とする. $\int T(h+t)xd\mu_\alpha(t)$ は $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$ の共通不動点 y_0 に $h \in S$ に関して一様に弱収束する. さらに, y_0 は $(*)$ をみたす finite mean の net $\{\mu_\alpha : \alpha \in I\}$ に依存しないし, また X 上の任意の invariant mean μ に対して $y_0 = T_\mu x = \int T(t)xd\mu(t)$ が成立する.

X は $B(S)$ の部分空間で $1 \in X$ であり, 任意の $s \in S$ に対して r_s-invariant であるとする. このとき, X 上の線形汎関数 $\{\mu_\alpha : \alpha \in I\}$ が次の性質をみたすとき strongly regular であるという ([12] 参照).

(a) $\sup_{\alpha}\|\mu_\alpha\| < +\infty$;
(b) $\lim_{\alpha}\mu_\alpha(1) = 1$;
(c) $\lim_{\alpha}\|\mu_\alpha - r_s^*\mu_\alpha\| = 0,\ s \in S$.

Lemma 4.1を用いて, [1, 4]と同様の証明で次の非線形エルゴード定理を得る([13, 14]参照).

Theorem 4.2. Eは一様凸でその共役空間E^*がKadec-Klee条件みたすBanach空間とする. CをEの空でない閉凸部分集合とし, $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$は$C$上のnonexpansive semigroupで$F(\mathcal{S})$が空でないとする. Xは$B(S)$の部分空間で$1 \in X$で任意の$s \in S$に対してr_s-invariantであり, また任意の$x \in C$と$x^* \in E^*$に対して, $t \mapsto \langle T(t)x, x^*\rangle$は$X$の元とする. xをCの元とする. $\{\lambda_\alpha : \alpha \in I\}$は$X$上の線形汎関数のstrongly regular netとする. このとき, $\int T(h+t)xd\lambda_\alpha(t)$は$\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$の共通不動点$y_0$に$h \in S$に関して一様に弱収束する. y_0はX上の線形汎関数のstrongly regular net $\{\lambda_\alpha : \alpha \in I\}$に依存しないし, また$X$上の任意のinvariant mean μに対して$y_0 = T_\mu x = \int T(t)xd\mu(t)$が成立する. さらに, 任意の$x \in C$に対し, $Qx = \lim_\alpha \int T(t)xd\lambda_\alpha(t)$とおくと, この$Q$は$C$上から$F(\mathcal{S})$の上へのnonexpansive mappingになり, $QT(t) = T(t)Q = Q$がすべての$t \in S$に対して成立し, かつ$Qx \in \overline{co}\{T(s)x : s \in S\}$がすべての$x \in X$に対して成立する.

Remark 4.3. 主定理(Theorem 4.2)の証明で本質となるLemma 4.1の証明は, Lemmas 3.2, 3.4を使い, [1, 4]と同様の証明である. 従って, Opial条件をみたす一様凸なBanach空間における非線形エルゴード定理と主定理(Theorem 4.2)の証明は同様の証明となる.

次の結果がTheorem 4.2の系として得られる.

Theorem 4.4. E, C, Xと$\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$はTheorem 4.2と同様とし, xをCの元とする. このとき, $\{T(t)x : t \in S\}$が強収束するための必要十分条件は任意の$s \in S$に対して

$$T(s+t)x - T(t)x \to 0$$

が成立することである. このとき, $\{T(t)x : t \in S\}$の極限点は$\{T(t) : t \in S\}$の共通不動点になる.

Remark 2.1から, 次の結果が定理4.2の系になる.

Theorem 4.5. ([12]) EはFréchet微分可能なノルムをもつ一様凸なBanach空間とする. CをEの空でない閉凸部分集合とし, $\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$は$C$上のnonexpansive semigroupで$F(\mathcal{S})$が空でないとする. Xは$B(S)$の部分空間で$1 \in X$で任意の$s \in S$に対してr_s-invariantであり, また任意の$x \in C$と$x^* \in E^*$に対して, $t \mapsto \langle T(t)x, x^*\rangle$は$X$の元とする. xをCの元とする. $\{\lambda_\alpha : \alpha \in I\}$は$X$上の線形汎関数のstrongly regular netとする. このとき, $\int T(h+t)xd\lambda_\alpha(t)$は$\mathcal{S} = \{T(t) : t \in S\}$の共通不動点$y_0$に$h \in S$に関して一様に弱収束する. y_0はX上の線形汎関数のstrongly regular net $\{\lambda_\alpha : \alpha \in I\}$に依存しないし, また$X$上の任意のinvariant mean μに対して$y_0 = T_\mu x = \int T(t)xd\mu(t)$

が成立する. さらに, 任意の $x \in C$ に対し, $Qx = \lim_\alpha \int T(t)x d\lambda_\alpha(t)$ とおくと, この Q は C 上から $F(S)$ の上への nonexpansive mapping になり, $QT(t) = T(t)Q = Q$ がすべての $t \in S$ に対して成立し, かつ $Qx \in \overline{\mathrm{co}}\{T(s)x : s \in S\}$ がすべての $x \in X$ に対して成立する.

Remark 4.6. Remark 4.3 から, Opial 条件をみたす一様凸な Banach 空間における非線形エルゴード定理と Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間における非線形エルゴード定理が統一的な考えで示せるということも意味している.

5. 応用

Theorem 4.2 の系として得られる非線形強エルゴード定理を記す ([12, 21] など参照).

Theorem 5.1. E, C は Theorem 4.2 と同様とする. T は C からそれ自身への nonexpansive mapping で $F(T)$ は空でないとする. x は C の元とする. このとき, $(1/n)\sum_{i=0}^{n-1} T^{i+k}x$ は T の不動点に $k \in \mathbb{N}$ に関して一様に弱収束する.

Theorem 5.2. E, C, T は Theorem 5.1 と同様とする. x は C の元とする. このとき, $(1-s)\sum_{i=0}^{\infty} s^i T^{i+k}x$ は $s \uparrow 1$ のとき, T の不動点に $k \in \mathbb{N}$ に関して一様に弱収束する.

$Q = \{q_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ は次の条件をみたす matrix とする:

(a) $\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m=0}^{\infty} |q_{n,m}| < \infty$;

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} q_{n,m} = 1$;

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |q_{n,m+1} - q_{n,m}| = 0$.

このとき Q は strongly regular matrix という ([16]). もし Q が strongly regular matrix であれば, 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して, $n \to \infty$ のときに $|q_{n,m}| \to 0$ が成立する ([12] も参照).

Theorem 5.3. E, C, T は Theorem 5.1 と同様とする. $Q = \{q_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ は strongly regular matrix とする. x は C の元とする. このとき, $\sum_{m=0}^{\infty} q_{n,m}T^{m+k}x$ は T の不動点に $k \in \mathbb{N}$ に関して一様に弱収束する.

Theorem 5.4. E, C は Theorem 5.1 と同様とする. T と U は C からそれ自身への nonexpansive mapping で $UT = TU$ であり, $F(U) \cap F(T)$ が空でないとする. x は C の元とする. このとき, $(1/n^2)\sum_{i,j=0}^{n-1} U^{i+k}T^{j+h}x$ は T と U の共通不動点に $k, h \in \mathbb{N}$ に関して一様に弱収束する.

C を Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし, $S = \{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ を C から C への写像の族とする. このとき, S が次の条件をみたすならば C 上の one-parameter nonexpansive semigroup という:

(i) 任意の $t \in \mathbb{R}^+$ に対して $T(t)$ は nonexpansive である;

(ii) $T(0)=I$;
(iii) $T(t+s)=T(t)T(s)$ が任意の $t,s\in\mathbb{R}^+$ に対して成立する;
(iv) 任意の $x\in C$ に対して $t\mapsto T(t)x$ は連続である.

Theorem 5.5. E,C は Theorem 5.1 と同様とする. $\mathcal{S}=\{T(t):t\in\mathbb{R}^+\}$ は C 上の one-parameter nonexpansive semigroup で $F(\mathcal{S})$ が空でないとする. x は C の元とする. このとき $(1/s)\int_0^s T(t+k)xdt$ は $\mathcal{S}$ の共通不動点に $k\in\mathbb{R}^+$ に関して一様に弱収束する.

Theorem 5.6. $E,C,\mathcal{S}=\{T(t):t\in\mathbb{R}^+\}$ は Theorem 5.5 と同様とする. x は C の元とする. このとき $r\int_0^\infty e^{-rt}T(t+k)xdt$ は $r\downarrow 0$ のとき, $\mathcal{S}$ の共通不動点に $k\in\mathbb{R}^+$ に関して一様に弱収束する.

$\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ から $\mathbb{R}$ への関数 Q が次の条件をみたすとする:

(a) $\displaystyle\sup_{s\in\mathbb{R}^+}\int_0^\infty |Q(s,t)|dt<\infty$;

(b) $\displaystyle\lim_{s\to\infty}\int_0^\infty Q(s,t)dt=1$;

(c) $\displaystyle\lim_{s\to\infty}\int_0^\infty |Q(s,t+h)-Q(s,t)|dt=0,\ h\in\mathbb{R}^+$

このとき Q は strongly regular kernel という.

Theorem 5.7. $E,C,\mathcal{S}=\{T(t):t\in\mathbb{R}^+\}$ は Theorem 5.5 と同様とする. Q:$\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ は strongly regular kernel とする. x は C の元とする. このとき $\int_0^\infty Q(s,t)T(t+h)xdt$ は $s\to\infty$ のとき, $\mathcal{S}$ の共通不動点に $h\in\mathbb{R}^+$ に関して一様に弱収束する.

References

[1] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Nonlinear ergodic theorems in a Banach space satisfying Opial's condition*, Tokyo J. Math. **21** (1998), 61–81.

[2] S. Atsushiba and W. Takahashi, *A nonlinear strong ergodic theorem for nonexpansive mappings with compact domains*, Math. Japon. **52** (2000), 183–195.

[3] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for one-parameter nonexpansive semigroups with compact domains*, Fixed Point Theory and Applications **3**, Nova Science Publishers, (2002), 15–31.

[4] S. Atsushiba, A.T.Lau and W. Takahashi, *Nonlinear strong ergodic theorems for commutative nonexpansive semigroups on strictly convex Banach spaces*, J. Nonlinear and Convex Anal. **1** (2000), 213–231.

[5] J. B. Baillon, *Quelques propriétés de convergence asymptotique pour les semigroups de contractions impaires*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **283** (1976), 75-78.

[6] R. E. Bruck, *A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces*, Israel J. Math. **32** (1979), 107-116.

[7] M. M. Day, *Amenable semigroups*, Illinois J. Math. **1** (1957), 509–544.

[8] K. Goebel and W.A. Kirk , *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[9] J. G. Falset, W. Kaczor, T. Kuczumow, S. Reich, *Weak convergence theorems for asymptotically nonexpansive mappings and semigroups*, Nonlinear Anal. **43** (2001), 377–401.

[10] N. Hirano, *Nonlinear ergodic theorems and weak convergence theorems*, J. Math. Soc. Japan **34** (1982), 35–46.

[11] N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *Asymptotic behavior of commutative semigroups of nonexpansive mappings in Banach Spaces*, Nonlinear Anal. **10** (1986), 229–249.

[12] N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *Nonexpansive retractions and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces*, Nonlinear Analysis, **12** (1988), 1269-1281.

[13] W. Kaczor, T. Kuczumow and S. Reich, *A mean ergodic theorem for nonlinear semigroups which are asymptotically nonexpansive in the intermediate sence,* J. Math. Anal. Appl. **246** (2000), 1-27.

[14] W. Kaczor, T. Kuczumow and S. Reich, *A mean ergodic theorem for mappings which are asymptotically nonexpansive in the intermediate sence,* Nonlinear Anal. **47** (2001), 2731-2742.

[15] A.T.Lau, N. Shioji and W. Takahashi, *Existence of nonexpansive retractions for amenable semigroups of nonexpansive mappings and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces,* J. Funct. Anal. **161** (1999),62–75.

[16] G. G. Lorentz, *A contribution to the theory of divergent series,* Acta Math. **80** (1948), 167-190.

[17] I. Miyadera and K. Kobayasi, *On the asymptotic behaviour of almost-orbits of nonlinear contraction semigroups in Banach spaces*, Nonlinear Anal. **6** (1982), 349–365.

[18] Z. Opial, *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings*, Bull. Amer. math. Soc. **73** (1967), 591–597.

[19] S. Reich, *A note on the mean ergodic theorem for nonlinear semigroups,* J. Math. Anal. Appl. **91** (1983), 547–551.

[20] W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space,* Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), 253-256.

[21] W. Takahashi, Nonlinear functional analysis, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

(S. Atsushiba) Department of Mathematics, Shibaura Institute of Technology, Fukasaku, Minuma-ku, Saitama-City, Saitama 337–8570, Japan

E-mail address: atusiba@sic.shibaura-it.ac.jp