数理解析研究所講究録 1417 巻 2005 年 1-7

Global solutions of the wave-Schrödinger system with rough data

東北大学大学院理学研究科数学専攻　赤堀　公史 (Takafumi Akahori)

Mathematical Institute, Tohoku University *
Sendai 980-8578 Japan

1　導入

次の湯川型相互作用を持つ波動方程式とシュレディンガー方程式の連立系を考える.

$$\begin{cases} (i\partial_t+\Delta)u(x,t) &= 2v(x,t)u(x,t), \quad x\in\mathbb{R}^d, \quad t\geq 0, \\ (\partial_t^2-\Delta)v(x,t) &= -|u(x,t)|^2, \quad x\in\mathbb{R}^d, \quad t\geq 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで, u と v はそれぞれ複素数値と実数値であり、$d=3,4$ とする. この方程式は, $d=3$ の時, 超伝導現象を記述するモデルを単純化することによって得られるほか, 核力場のモデルであるクライン-ゴールドン-シュレディンガー方程式系の質量項がない場合に対応する. ここでは, この方程式の初期値問題の大域適切性について議論する.

(1.1) は, 次の時間 1 階の連立系に変換できる.

$$(\mathrm{WS})\begin{cases} (i\partial_t+\Delta)\psi(x,t) &= (\phi(x,t)+\bar{\phi}(x,t))\psi(x,t), \quad x\in\mathbb{R}^d, \quad t\geq 0, \\ (i\partial_t-|\nabla|)\phi(x,t) &= |\nabla|^{-1}|\psi(x,t)|^2, \quad x\in\mathbb{R}^d, \quad t\geq 0. \end{cases}$$

ここで, ψ も ϕ も複素数値であり, $|\nabla|:=\mathcal{F}_\xi^{-1}|\xi|\mathcal{F}_x$ である ($\mathcal{F}$ はフーリエ変換を表す).

(ψ,ϕ) が (WS) の解なら、$(u,v)=(\psi,\Re\phi)$ は (1.1) を満たす.

(WS) のハミルトニアンは、

$$H(\psi,\phi):=\|\psi\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^d)}^2+\|\phi\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^d)}^2+\int_{\mathbb{R}^d}(\phi+\bar{\phi})|\psi|^2\,dx \tag{1.2}$$

であり、粒子数は

$$\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \tag{1.3}$$

で表される. これらの量は保存量である. 初期値としては

$$(\mathrm{ID})\begin{cases} \psi(0) &= \psi_0\in H^{s_1}(\mathbb{R}^d)=(1-\Delta)^{-s_1/2}L^2(\mathbb{R}^d), \\ \phi(0) &= \phi_0\in\dot{H}^{s_2}(\mathbb{R}^d)=|\nabla|^{-s_2}L^2(\mathbb{R}^d). \end{cases}$$

を取る.$d=3,4$ の時は, $s_1=s_2=1$ とすれば、(1.2) と (1.3) は意味を持つ.

*Current address: Department of Mathematics Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan

以下では, どんな s_1, s_2 に対して初期問題 (WS)-(ID) が大域的適切になるかを考える. 特に $d=3$ の場合と, $d=4$ でかつ $\|\psi_0\|_{L^2}$ が

$$\|\psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \frac{(S_4)^{\frac{1}{2}}}{(G_{\frac{1}{3},4})^{\frac{3}{4}}}, \tag{1.4}$$

を満たす場合は, (1.2) と (1.3) の保存量から大域可解性が直ちに従うため, ここでの興味は $s_1, s_2 < 1$ の場合である. ここで S_d と $G_{\sigma,d}$ はそれぞれ次のソボレフの不等式とガリアルド-ニレンバーグの不等式の最良定数である:

$$S_d\|f\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{R}^d)} \le \|\nabla f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \quad (d \ge 3),$$

$$\|f\|^{2\sigma+2}_{L^{2\sigma+2}(\mathbb{R}^d)} \le G_{\sigma,d}\|\nabla f\|^{\sigma d}_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|f\|^{2\sigma+2-\sigma d}_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad 0<\sigma<\frac{2}{d-2} \quad (d \ge 2).$$

2 主結果 1

この節では, $d=3,4$ の場合の初期値問題 (WS)-(ID) に対する大域適切性の結果を述べる.

定理 2.1 $d=3,4$ とし, さらに $d=4$ の場合には, (1.4) を仮定する. この時,

$$1 \ge s_1, s_2 > \frac{4}{8+2s_2-d} \tag{2.1}$$

ならば, 初期値問題 *(WS)-(ID)* は大域的適切である.

$d=4$ の場合は, 現在知られている最良の結果であるが, まだ改善の余地はある (初期値の大きさを十分小さく取れば,$s_1=s_2=0$ に対して、大域適切性が言える). 一方, $d=3$ の場合, 定理 2.1 は, $s_1, s_2 > (\sqrt{57}-5)/4 \sim 0.64$ ならば大域的適切であることを言っているが, 最近の著者の研究により, ある $0>s$ があり, $s_1, s_2 > s$ ならば大域的適切であることが示されている (Global well-posedness below L^2).

3 Fourier restriction norm, I-method

この節では, 定理 2.1 の証明の鍵となる Fourier restriction norm(以後, F.R.N と略す) と I-method を紹介する.

3.1 F.R.N

ここでは, F.R.N の簡単な導入のため, 作用素の定義域や, 等式の意味などの詳細には必要のない限り触れない.

$h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ に対し, 作用素 H を $\mathcal{F}_x[Hf](\xi) := h(\xi)\mathcal{F}_x[f](\xi)$ で定義する. また, $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ とする. この時, 次の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} (i\partial_t - H)u &= F(u), \quad u : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \\ u(0) &= u_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

(3.1) において, $H=-\Delta$ $(h=|\xi|^2)$ ならばシュレディンガー方程式であり, $H=\pm|\nabla|$ $(h=\pm|\xi|)$ ならば波動方程式となる.

u が (3.1) の時間区間 L 上の解なら,

$$u(t) = e^{-itH}u_0 + i\int_0^t e^{-i(t-s)H}F(u)(s)\,ds, \quad t \in L$$

を満たす. よって,

$$\widetilde{u}(t) := e^{itH}u(t) = u_0 + i\int_0^t e^{isH}F(u)(s)\,ds, \quad t \in L$$

を満たす. この $\widetilde{u}$ を空間 $H_t^\alpha H_x^s(L\times\mathbb{R}^d)$ のノルムで測れば,

$$\begin{aligned}\|\widetilde{u}\|_{H_t^\alpha H_x^s(L\times\mathbb{R}^d)} &= \|e^{itH}u\|_{H_t^\alpha H_x^s(L\times\mathbb{R}^d)}\\ &= \|e^{itH}u|_L\|_{H_t^\alpha H_x^s(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)}\\ &= \|\langle\xi\rangle^s\langle\tau+h(\xi)\rangle^\alpha\mathcal{F}_{x,t}[u|_L]\|_{L_\tau^2L_\xi^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

これより, F.R.N を

$$\|u\|_{X_h^{s,\alpha}} := \|\langle\xi\rangle^s\langle\tau+h(\xi)\rangle^\alpha\mathcal{F}_{x,t}[u]\|_{L_\tau^2L_\xi^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)} \tag{3.2}$$

で定義し, (3.2) の右辺の $\langle\xi\rangle$ を $|\xi|$ で置き換えたものを添え字 $\dot{X}_h^{s,\alpha}$ で表す. この時,

$$X_h^{s,\alpha} := \left\{u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)\,\middle|\,\|u\|_{X_h^{s,\alpha}}<\infty\right\},$$

$$\dot{X}_h^{s,\alpha} := \left\{u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)/\mathcal{P}\,\middle|\,\|u\|_{\dot{X}_h^{s,\alpha}}<\infty\right\}$$

とする. ここで, $\mathcal{P}$ は $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ 上の多項式全体を表す.

$X_H^{s,\alpha}$ は時間大域的な空間のため, 初期値問題を考える際には, 次の時間局所的な空間が必要となる. $L\subset\mathbb{R}$ を時間の区間とする.

$$X_h^{s,\alpha}(L) := \left\{u:\mathbb{R}^d\times L\to\mathbb{C}\mid \exists\widetilde{u}\in X_h^{s,\alpha}\ \text{s.t.}\ \widetilde{u}|_L = u\right\}. \tag{3.3}$$

さらに, この空間のノルムを次で定義する.

$$\|u\|_{X_h^{s,\alpha}(L)} := \inf\left\{\|\widetilde{u}\|_{X_h^{s,\alpha}}\mid \widetilde{u}\in X_h^{s,\alpha}\ \text{s.t}\ \widetilde{u}|_L = u\right\}. \tag{3.4}$$

同様に $\dot{X}_h^{s,\alpha}(L)$ も定義する.

3.2 I-method

$1 > s, s_1, s_2 > 0$, $N \gg 1$ とし, $m_N^s \in C^\infty(\mathbb{R}^d;[0,1])$ を球対称, 非増加でさらに次を満たすものとする:

$$m_N^s(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad |\xi|\le N \\ \left(\frac{N}{|\xi|}\right)^{1-s} & \text{if} \quad |\xi|\ge 2N\end{cases}. \tag{3.5}$$

この時, 作用素 I_N^s を

$$\mathcal{F}_x[I_N^s f](\xi) := m_N^s(\xi)\mathcal{F}_x[f](\xi)$$

で定義する.

さらに, 修正エネルギー $\widetilde{E}(\psi,\phi)$ を次で定義する.

$$\widetilde{E}(\psi,\phi) := H(I_N^{s_1}\psi, I_N^{s_2}\phi).$$

作用素 I_N^s の性質は次の命題で述べられる.

命題 3.1 $0<s<1$, $2\leq N$, $s'\in\mathbb{R}$ とする. この時, 次が成立する.

$$\|I_N^s f\|_{H^{s'}(\mathbb{R}^d)}\leq\|f\|_{H^{s'}(\mathbb{R}^d)}, \tag{3.6}$$

$$\|I_N^s f\|_{\dot H^1(\mathbb{R}^d)}\leq 2N^{1-s}\|f\|_{\dot H^s(\mathbb{R}^d)}, \tag{3.7}$$

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\leq\|I_N^s f\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\ . \tag{3.8}$$

注 1 *(i) (3.7)* により, I_N^s は $1-s$ 次の平滑化作用素であることが分かる. よって $(\psi,\phi)\in H^{s_1}\times\dot H^{s_2}$ に対して, $H(\psi,\phi)$ は意味を持たないが, $\widetilde{E}(\psi,\phi)$ は意味を持つ.
(ii) $\|f\|_{\dot H^s}\lesssim\|I_N^s f\|_{\dot H^1}$ は一般には成立しない.

4 修正エネルギーの時間増大と定理 2.1 の証明の概略

修正エネルギーに対し, その時間増大を次のように評価できる.

命題 4.1 $d=3,4$, $N\geq 32$, $L:=[t_0,t_1]$ かつ $|L|\leq 1$, $\alpha,\beta>1/2$, $\varepsilon>0$ とする. また, (ψ,ϕ) を *(WS)-(ID)* の時間区間 L 上の解とする. この時, $1\geq s_1>1/2$, $1\geq s_2>0$ かつ $s_1+s_2>1$ ならば, 次が成立する.

$$\begin{aligned}&\widetilde{E}(\psi,\phi)(t_1)-\widetilde{E}(\psi,\phi)(t_0)\\ \leq\ & C_*\left\{\frac{1}{N^{1-\varepsilon}}\left(\|I_1\psi\|_{X^{1,\alpha}_{|\xi|^2}(L)}+\|I_2\phi\|_{X^{1,\beta}_{|\xi|}(L)}\right)^3+\frac{1}{N^{\frac{3}{2}-\varepsilon}}\left(\|I_1\psi\|_{X^{1,\alpha}_{|\xi|^2}(L)}+\|I_2\phi\|_{\dot X^{1,\beta}_{|\xi|}(L)}\right)^4\right\}.\end{aligned}$$

ここで, C_* は $L=[t_0,t_1]$ と N に無関係な正定数である.

命題 4.1 は, $\|I_N^{s_1}\psi(t)\|_{\dot H^1}$, $\|I_N^{s_2}\phi(t)\|_{\dot H^1}$ に対する時間増大の評価を得るために重要な役割を果たすが, 注 1 (ii) で触れたように, それらから $\|\psi(t)\|_{\dot H^{s_1}}$, $\|\phi(t)\|_{\dot H^{s_2}}$ の評価は直接には出ない. 実際,

$$\|\phi\|_{\dot H^s}^2=\int_{|\xi|\leq 1}|\xi|^{2s}|\mathcal{F}_x[\phi](\xi)|^2+\int_{|\xi|\geq 1}|\xi|^{2s}|\mathcal{F}_x[\phi](\xi)|^2, \tag{4.1}$$

$$\|I_N^s\phi\|_{\dot H^1}^2\sim\int_{|\xi|\leq 1}|\xi|^{2}|\mathcal{F}_x[\phi](\xi)|^2+\int_{|\xi|\geq 1}|\xi|^{2s}|\mathcal{F}_x[\phi](\xi)|^2, \tag{4.2}$$

より, 低周波部分にその原因があることが分かる. シュレディンガー方程式の場合は, 粒子数保存 (L^2-ノルム保存) と組み合わせると, 低周波を制御できるため, 命題 4.1 から $\|\psi\|_{H^{s_2}}$ の先験評価が得られる. 一方, 波動方程式の場合には工夫が必要である. そのために, 低周波部分を制御した空間を導入する ([7] の 6 節も参照). まず,

$$\omega^{s,b}(\xi):=\begin{cases}|\xi|^b: & |\xi|\leq 1,\\ |\xi|^s: & |\xi|\geq 1\end{cases}$$

とし, 空間 $\Omega^{s,b}$ を

$$\Omega^{s,b}:=\left\{f\in S'(\mathbb{R}^d)/\mathcal{P}\ \middle|\ \|f\|_{\Omega^{s,b}}:=\|\omega^{s,b}\mathcal{F}_x[f]\|_{L^2}<\infty\right\}$$

で定義する. この時,

$$\|\phi\|_{\Omega^{s,1}}\leq\|I_N^s\phi\|_{\dot H^1}$$

が従うため, 解の延長が $H^{s_1} \times \Omega^{s_2,1}$-ノルムで決まるなら, 命題 4.1 から大域可解性が導かれる (命題 4.1 から解の延長が可能なことは [6]-[9] に依るが, (WS) はスケール不変でないため証明は少し複雑である [1]). しかし, 解の延長が $H^{s_1} \times \Omega^{s_2,1}$-ノルムによって決まることは, 縮小写像の原理による, $H^{s_1} \times H^{s_2}$ と $H^{s_1} \times \dot{H}^1$ での局所適切性の証明から分かるので, 定理 2.1 が従う. さらにこのような考え方を発展させると, より広い初期値のクラスに対して, 大域適切性がいえる. これについては, 次節で紹介する.

5 主結果 2

I-method は高周波部分に注目した方法であると言えるが, 低周波部分にも注目すると定理 2.1 をさらに拡張することができる. そのために, 考える初期値 (ID) を次の (ID2) にする.

$$\text{(ID2)} \begin{cases} \psi(0) &= \psi_0 \in H^{s_1}(\mathbb{R}^d), \\ \phi(0) &= \phi_0 \in \Omega^{s_2,b}(\mathbb{R}^d). \end{cases}$$

この時, 次のような結果が従う.

定理 5.1 *$d = 3, 4$ とし, さらに $d = 4$ の場合には (1.4) を仮定する. また,*

$$q_d := \frac{\sqrt{(8-d)^2 + 32} - (8-d)}{4}$$

とし,

$$p_d := \begin{cases} q_d & \text{if} \quad s_1 \geq \frac{4}{8+2q_d-d}, \\ \frac{4}{s_1} + \frac{d}{2} - 4 & \text{if} \quad \frac{4}{8+2q_d-d} > s_1 > \frac{4}{10-d} \end{cases}$$

とする. この時, s_1, s_2, b が, $s_2 \leq b$,

$$1 \geq s_1, s_2 > \frac{4}{8+2s_2-d} \tag{5.1}$$

かつ

$$b < \frac{1}{3}(4 - p_d) \ (d = 3), \quad b < \frac{1}{3}(5 - 2p_d) \ (d = 4), \tag{5.2}$$

ならば, 初期値問題 (WS)-(ID2) は大域的適切である.

s_1

1 globally well-posed

$\frac{4}{8-d}$

$s_1 = \frac{4}{8+2s_2-d}$

s_2

O q_d 1

初期値問題 (WD)-(ID2) を考えるために, (3.2) で定義した F.R.N を少し修正する. (3.2) において $\langle \xi \rangle$ を $\omega^{s,b}(\xi)$ で置き換えたノルムを $\|\cdot\|_{Y^{s,b,\alpha}}$ で表し, 対応する空間を $Y^{s,b,\alpha}$ とする. (3.3),

(3.4) と同様に時間局所的な空間 $Y^{s,b,\alpha}(L)$ とそのノルムを定義する. 4 節の最後でも触れたように, 局所適切性は, $H^{s_1} \times \dot{H}^{s_2}$ と $H^{s_1} \times \dot{H}^{b}$ での局所適切性の証明から簡単に従う. そのため問題は解の大域存在を示すことである. 定理 5.1 の証明にも I-method の考え方を応用する. 特に, 低周波部分を考慮する必要があるため, 次のような修正をする. まず, $m_{N,M}^{s,b} \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}; \mathbb{R})$ を球対称かつ非増加で

$$m_{N,M}^{s,b}(\xi) = \begin{cases} (M|\xi|)^{b-1} & \text{if} \quad |\xi| \le 1/M, \\ 1 & \text{if} \quad 1/M \le |\xi| \le N, \\ (N/|\xi|)^{1-s} & \text{if} \quad 2N \le |\xi| \end{cases} \tag{5.3}$$

を満たすものとする. (3.5) と比べると, パラメータ M によって決まる低周波部分が修正されている. この時, 作用素 $I_{N,M}^{s,b}$ を

$$\mathcal{F}_x[I_{N,M}^{s,b} f](\xi) := m_{N,M}^{s,b}(\xi) \mathcal{F}_x[f](\xi). \tag{5.4}$$

と定義する. この作用素の性質は次の命題で述べられる.

命題 5.2 $N \ge 2$, $M \ge 1$, $0 \le s < 1$ かつ $s \le b$ とする. この時次が成立する.

$$\|I_{N,M}^{s,b} f\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^d)} \le 2 \max\{M^{b-1}, N^{1-s}\} \|f\|_{\Omega^{s,b}(\mathbb{R}^d)}, \tag{5.5}$$

$$\|f\|_{\Omega^{s,b}(\mathbb{R}^d)} \le \max\{M^{1-b}, 1\} \|I_{N,M}^{s,b} f\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^d)}. \tag{5.6}$$

記号の簡単化のために, 与えられた s_1, N に対し, $I_1 := I_N^{s_1}$ とし, そのマルチプライヤーを $m_1 := m_N^{s_1}$ とする. 同様に, 与えられた s_2, b, N, M に対して, $I_2 := I_{N,M}^{s_2,b,\alpha}$, $m_2 := m_{N,M}^{s_2,b}$ とする. また, 修正エネルギーを

$$E_{1,2}(\psi, \phi) := H(I_1\psi, I_2\phi)$$

で定義する. この修正エネルギーの時間増大は, 次で述べられる.

命題 5.3 $d = 3, 4$, $N \ge 32$ とし, $d = 3$ の時は $M = N^3$ とし, $d = 4$ の時は $M = N^{3/2}$ とする. さらに, $L := [t_0, t_1]$ かつ $|L| \le 1$, $\alpha, \beta > 1/2$, $\varepsilon > 0$ とし, (ψ, ϕ) を *(WS)-(ID2)* の時間区間 L 上の解とする. この時, $1 < b < d/2$, $1 \ge s_1 > 1/2$, $1 \ge s_2 > 0$ かつ $s_1 + s_2 > 1$ ならば, 次が成立する.

$$\begin{aligned} & E_{1,2}(\psi,\phi)(t_1) - E_{1,2}(\psi,\phi)(t_0) \\ \le \quad & C_{**} \left\{ \frac{1}{N^{1-\varepsilon}} \left(\|I_1\psi\|_{X^{1,\alpha}(L)} + \|I_2\phi\|_{Y^{1,1,\beta}(L)} \right)^3 + \frac{1}{N^{\frac{3}{2}-\varepsilon}} \left(\|I_1\psi\|_{X^{1,\alpha}(L)} + \|I_2\phi\|_{Y^{1,1,\beta}(L)} \right)^4 \right\} . \end{aligned}$$

ここで C_{**} は $L = [t_0, t_1]$ と N には依存しない正定数である.

命題 5.3 から定理 5.1 が従う [1]. 特に (5.2) に現れる b の条件は, 定理 5.1 の条件を満たす s_2 と命題 5.3 を満たす M に対し, $M^{b-1} \le N^{1-s_2}$ が成立するための条件である.

References

[1] T. Akahori, "Global solutions of the wave-Schrödinger system with rough data", preprint (2004)

[2] J. Bergh, J. Löfström, "Interpolation spaces. An introduction," Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[3] J. Bourgain, Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations, part I: Schrödinger equations, part II: the KdV-equation, Geom. Funct. Anal. (3) 2,3 (1993) 107-156, 209-262

[4] J. Bourgain, Refinements of Strichartz' inequality and applications to 2D-NLS with critical nonlinearity, Int. Math. Res Not. (5) 3 (1998), 253-283.

[5] J. Bourgain, Scattering in the energy space and below for 3D NLS, J. Anal. Math. (75) (1998), 267-297.

[6] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, Almost conservation laws and global rough solutions to a nonlinear Schrödinger equation, Math. Res. Lett. (9) 5-6 (2002), 659-682.

[7] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, Sharp global well-posedness for KdV and modified KdV on the line and torus, J. Amer. Math. Soc. (16) 3 (2003), 705-749.

[8] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, A refined global well-posedness result for Schrödinger equations with derivative, SIAM J. Math. Anal. (34) 1 (2002), 64-86.

[9] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, Multilinear estimates for periodic KdV equations, and applications, to appear in J. Funct. Anal.

[10] I. Fukuda and M. Tsutsumi, On coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations II, J. Math. Anal. Appl. (66) 2 (1978) 358-378.

[11] J. Ginibre and G. Velo, Long Range Scattering and Modified Wave Operators for the Wave-Schrödinger system, Ann. Henri Poincaré (3) 3 (2002) 537-612.

[12] J. Ginibre, Y. Tsutsumi and G. Velo, On the Cauchy Problem for the Zakharov System, J. Funct. Anal. (151) 2 (1997) 384-436.

[13] T. Kato, Nonlinear Schrödinger equations, Lecture Notes in Phys., 345, Springer, Berlin (1989) 218-263.

[14] M. Keel and T. Tao, Endpoint Strichartz estimate, Amer. J. Math. (120) 5 (1998) 955-980.

[15] C. Kenig, G. Ponce and L. Vega, The Cauchy Problem for the Korteweg-De Vries Equation in Sobolev Spaces of Negative Indices, Duke Math. J. (71) 1 (1993) 1-21.

[16] C. Kenig, G. Ponce and L. Vega, Global Well-Posedness for Semi-Linear Wave Equations, Comm. Partial Differential Equations (25) 9-10 (2000) 1741-1752.

[17] H. Pecher, Global solutions of the Klein-Gordon-Schrödinger system with rough data, preprint (2002).

[18] H. Triebel, "Theory of Function Spaces," Monographs in Mathematics, 78, Birkhäuser Verlag, Basel, 1983.

[19] H. Yukawa, On the interaction of elementary particles I, Proceedings of the Physico-Mathematical society of Japan (17) (1935), 48-57.

E-mail: sa3d01@math.tohoku.ac.jp , akahori@math.kyoto-u.ac.jp