

## On the limit from Zakharov systems to nonlinear Schrödinger equations

名古屋大学大学院多元数理科学研究科  
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

中西賢次  
Kenji Nakanishi

### 1. 要旨

Klein-Gordon-Zakharov 系および (通常の) Zakharov 系から非線形 Schrödinger 方程式への極限移行について、Nader Masmoudi (Courant Institute) との共同研究 [5] の概要を報告する。

非線形 Schrödinger 方程式は様々な物理現象を記述するモデルとして使われているが、プラズマ物理における Langmuir 擾乱はその一例である。この場合、プラズマを構成する電子とイオンの流体方程式とその生成する電磁場の Maxwell 方程式からなる系を近似して Klein-Gordon-Zakharov 方程式系、更に Zakharov 方程式系を経て最終的に非線形 Schrödinger 方程式が導出される。ここで問題とするのはこの最終段階の近似における、解自体の収束である。

この問題は、この種の特異極限において典型的と思われる二つの困難を含んでいる。一つ目は共鳴周波数の発散であり、これは線形方程式からの摂動による解析に対する障害となる。二つ目はエネルギーの発散であり、これは非線形先験評価による解析に対する障害となる。

我々はこれら二つの困難が本質的に異なる周波数帯で起こる点に着目し、解を Fourier 空間で二つに分けて、一方には非共鳴性を利用した双線形評価、他方には周波数を局在化し発散成分を除去した修正エネルギーを適用して、これらを統合する事で望ましい評価、そして収束の結果を得た。

### 2. 問題の導入と主結果

次の Klein-Gordon-Zakharov 方程式系を考える。

$$(KGZ) \quad \begin{cases} c^{-2}\ddot{E} - \Delta E + c^2 E = nE, \\ \alpha^{-2}\ddot{n} - \Delta n = -\Delta|E|^2, \end{cases}$$

ここで  $E : \mathbb{R}^{1+3} \rightarrow \mathbb{R}^3$  は電場、 $n : \mathbb{R}^{1+3} \rightarrow \mathbb{R}$  はイオン密度 (の平衡状態からのずれ) を近似的に記述する未知関数。 $c, \alpha$  は正定数で、 $c^2$  はプラズマ周波数、 $\alpha$  はイオン音速を表し、 $c \gg \alpha \gg 1$  である。そこで  $E = e^{ic^2 t} u$  とおいて、形式的に  $c \rightarrow \infty$  とすれば Zakharov 方程式系

$$(Z) \quad \begin{cases} 2i\dot{u} - \Delta u = nu, \\ \alpha^{-2}\ddot{n} - \Delta n = -\Delta|u|^2. \end{cases}$$

を得る。更に  $\alpha \rightarrow \infty$  とすれば非線形 Schrödinger 方程式

$$(NLS) \quad 2i\dot{u} - \Delta u = |u|^2 u, \quad n = |u|^2.$$

が得られる。

これらの方程式はそれぞれ以下のようなエネルギーを保存量として持つ。

$$\begin{aligned}
 (KGZ) &: \int_{\mathbb{R}^3} |c^{-1}\dot{E}|^2 + |\nabla E|^2 + |cE|^2 + \frac{1}{2}(|\alpha^{-1}|\nabla|^{-1}\dot{n}|^2 + |n|^2) - n|E|^2 dx, \\
 (2.1) \quad (Z) &: \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2}(|\alpha^{-1}|\nabla|^{-1}\dot{n}|^2 + |n|^2) - n|u|^2 dx, \\
 (NLS) &: \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 - \frac{|u|^4}{2} dx.
 \end{aligned}$$

(ただし記号として、 $\varphi(\nabla)f := \mathcal{F}^{-1}\varphi(i\xi)\mathcal{F}f(\xi)$ ,  $\mathcal{F}f = \tilde{f}$  は  $\mathbb{R}^n$  上の Fourier 変換) 従って、これらが意味を持つエネルギークラスでの解が重要性を持つ。初期値問題の時間局所的な適切性はエネルギークラスより広い空間で成り立つ事が知られている。[6, 4, 3] 参照：

$$\begin{aligned}
 (2.2) \quad (KGZ) &: (E(t), \dot{E}(t), n(t), |\nabla|^{-1}\dot{n}(t)) \in H^1 \times L^2 \times L^2 \times L^2 \quad (c \neq \alpha), \\
 (Z) &: (u(t), n(t), |\nabla|^{-1}\dot{n}(t)) \in H^{1/2} \times L^2 \times L^2 \\
 (NLS) &: u(t) \in H^{1/2}.
 \end{aligned}$$

ところが極限移行に際する解の収束については、エネルギーよりずっと高い指数の Sobolev 空間での初期収束を仮定した場合しか得られていない。これは、極限移行するパラメーターにおいて特徴的な振動数のエネルギーが、極限と共に非常に早く減衰することを要請するので、望ましくない仮定である。(Z) から (NLS) の収束については、[7] は  $(u, n, \dot{n}) \in H^5 \times H^4 \times H^3$  での収束と、 $n = |u|^2$  を初期状態で仮定して、時間局所一様な解の収束を同じ位相で示した。他方 [1] では  $H^6 \times H^5 \times H^4$  での収束と  $H^1$  におけるデータの小ささを仮定したが、 $n = |u|^2$  は仮定せずに解の収束を示した。(KGZ) から (Z) の収束は [2] で  $(E, \dot{E}, n, \dot{n}) \in H^s \times H^{s-1} \times H^{s-2} \times H^{s-3}$ ,  $s > 7/2$  で証明されているが、(KGZ) から直接 (NLS) への収束は、次に紹介する我々の結果以外は無いうである。なお、ここでは  $E$  は任意の有限次元複素ベクトル値を取れる。

**Theorem 2.1.**  $s > 3/2$ ,  $0 < \gamma < 1$  として、 $\alpha/c < \gamma$  の条件下で  $(c, \alpha) \rightarrow \infty$  の極限を考える。 $E$  と  $n$  は (KGZ) の時間局所解で、存在時間は  $[0, T)$ 、 $t = 0$  において

$$\begin{aligned}
 (2.3) \quad & (E(0), c^{-1}|\nabla/c|^{-1}\dot{E}(0)) \rightarrow (\psi_0, \psi_1) \text{ in } H^s, \\
 & (n(0), \alpha^{-1}|\nabla|^{-1}\dot{n}(0)) \text{ } H^{s-1} \text{ で有界}
 \end{aligned}$$

とする。このとき、 $\mathbb{E}^\infty = (E_+^\infty, E_-^\infty)$  を非線形 Schrödinger 方程式系

$$(2.4) \quad \begin{cases} 2i\mathbb{E}^\infty - \Delta\mathbb{E}^\infty - |\mathbb{E}^\infty|^2\mathbb{E}^\infty = 0, \\ E^\infty(0) = \frac{1}{2}(\psi_0 - i\psi_1, \overline{\psi_0} - i\overline{\psi_1}) \end{cases}$$

の解として、その存在時間を  $[0, T^\infty)$  とすると、 $\liminf T \geq T^\infty$  であり、この区間で  $(E, n)$  は次の漸近挙動を示す：

$$\begin{aligned}
 (2.5) \quad & E - (\mathbb{E}_+^\infty e^{ic^2t} + \overline{\mathbb{E}_-^\infty} e^{-ic^2t}) \rightarrow 0 \text{ in } C([0, T^\infty); H^s), \\
 & n - n_f - |\mathbb{E}^\infty|^2 \rightarrow 0 \text{ in } C([0, T^\infty); H^{s-1}).
 \end{aligned}$$

ただし  $n_f$  は次の波動方程式の解である。

$$(2.6) \quad \begin{cases} \alpha^{-2} \ddot{n}_f - \Delta n_f = 0 \\ n(0) - n_f(0) = |\mathbb{E}^\infty(0)|^2, \quad \dot{n}(0) - \dot{n}_f(0) = -\Im[\overline{\mathbb{E}^\infty(0)} \cdot \Delta \mathbb{E}^\infty(0)] \end{cases}$$

(Z) から (NLS) の収束についても同様の結果が成り立つ。また、(KGZ) から (Z) への収束についてはエネルギー空間でも成り立つ。

残念ながら今のところ、エネルギー空間での (KGZ) または (Z) から (NLS) への収束は得られていない。このように初期値問題と極限移行でその結果に大きな差が出るのは、次のような本質的な困難があるためである。

### 3. 第一の困難：共鳴周波数の発散

非線形波動の評価では、異なる時空周波数の波が振動積分によって相殺する効果が中心的な役割を果たす。逆に言えば、同一波形で相殺せずに共鳴増幅する成分が、相互作用評価の成否を決める事になる。Zakharov 系は異なる種類の波動が相互作用しているため、そのような共鳴成分の周波数はごく限られており、この事が上の適切性の証明でも重要な役割を果たしている。より詳しく言えば、共鳴成分は周波数がある範囲で任意の高階 Sobolev ノルムで評価する事ができ、他方、高周波帯では非共鳴性から相互作用の小ささを得る事ができる。今の場合の共鳴周波数は、解が線型方程式の解で十分近似できると考えれば、その時空 Fourier 空間における特性曲面の交叉部分で与えられる。

ところがパラメータの極限移行を考えると、この共鳴周波数も共に発散してしまうので、上のような単純な論法では制御できなくなる。実際、通常の初期値問題を解く場合のように、二次の非線形項を単純に積の外力項として扱う方法では、決して望ましい評価は得られない事が、次の結果から分かる。(Z) に対して反復法による解の構成を考える：

$$(3.1) \quad \begin{cases} 2i\dot{E}_k - \Delta E_k = n_{k-1} E_{k-1}, \\ \alpha^{-2} \ddot{n}_k - \Delta n_k = -\Delta |E_{k-1}|^2. \end{cases}$$

[4] より、この関数列は例えば  $E(0) \in H^{1/2}$ ,  $n(0) \in L^2$ ,  $\dot{n}(0) \in \dot{H}^{-1}$  とすれば同じ空間で解に収束する事が分かっている。しかしこの収束はパラメータ  $\alpha$  については一様でない：

**Theorem 3.1.** 任意の  $s \in \mathbb{R}$  に対して、ある  $\varphi \in H^s$  が存在して、上の (3.1) と初期条件

$$(3.2) \quad E_k(0) = \varphi, \quad n_k(0) = \dot{n}_k(0) = 0,$$

の第2反復で与えられる  $E_2$  に対して任意の十分小さな  $t > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  に対して

$$(3.3) \quad \limsup_{\alpha \rightarrow \infty} \|E_2(t)\|_{H^{s-1+\varepsilon}} = \infty,$$

が成り立つ。

この結果は、共鳴周波数周辺に局在化された初期値を考える事で容易に示すことができる。上で挙げた解の局所存在定理では非線形項を上のような形で取り扱っているため、そのままでは極限移行における一様評価を与える事はできない。

## 4. 第2の困難：エネルギーの発散

上の発散結果にも拘らず実際の解が収束するのは、より高次の非線形相殺効果が働いているからで、それがエネルギー保存則に現れている。上で挙げた (Z) から (NLS) への収束結果では、保存則が本質的な役割を果たしている。しかし (KGZ) においてはここで新たな問題が生ずる。すなわち、エネルギーに  $\|cE\|_{L^2}^2$  の項があるため  $c \rightarrow \infty$  で発散してしまう事である。形式的には、 $E = e^{ic^2t}u$  とおき、 $u$  の方程式を考えると見た目に有限なエネルギー

$$(4.1) \quad \int |c^{-1}\dot{u}|^2 + |\nabla u|^2 + \frac{1}{2}(|\alpha^{-1}|\nabla|^{-1}\dot{n}|^2 + |n|^2) - n|E|^2 dx$$

を得るが、これは  $E$  が実数値である場合には元の  $(E, n)$  のエネルギーと等しいので、この量を有界と仮定するのは不適切である。この事は、一般に非線形波動の記述においてエネルギーには明確な意味があっても、非線形 Schrödinger 方程式のチャージ ( $L^2$  ノルム) にあたる明確な物理量が無い事に起因する。今の場合、元の系の総電荷は 0 であり、電子とイオンそれぞれの総電荷は保存されているが、これらは極限の Schrödinger 方程式のチャージとは直接関係のない量である。

## 5. 主要な評価

収束を示すために重要となるのは、解を制御できるようなノルムの一様有界性を得る事である。それを定式化するために先ず、時間 2 階の方程式を 1 階に帰着させる。  $\mathbb{E} := (E_+, E_-)$  と  $N$  を次で定義し、

$$(5.1) \quad \begin{aligned} e^{ic^2t}E_+ &:= \frac{1}{2}(E - ic^{-1}\langle \nabla / c \rangle^{-1}\partial_t E), & e^{ic^2t}E_- &= \frac{1}{2}(\bar{E} - ic^{-1}\langle \nabla / c \rangle^{-1}\partial_t \bar{E}), \\ N &:= n - i\alpha^{-1}|\nabla|^{-1}\partial_t n \end{aligned}$$

$\mathbb{E}^* := e^{-2ic^2t}(\bar{E}_-, \bar{E}_+)$  とおく。このとき (KGZ) は次の方程式系と同値である。

$$(5.2) \quad \begin{cases} 2i\dot{\mathbb{E}} - \Delta_c \mathbb{E} = \langle \nabla / c \rangle^{-1}n(\mathbb{E} + \mathbb{E}^*), \\ i\dot{N} + \alpha|\nabla|N = \alpha|\nabla|\langle \mathbb{E}, \mathbb{E} + \mathbb{E}^* \rangle, \end{cases}$$

ただし  $\Delta_c = 2c^2(1 - \langle \nabla / c \rangle)$  は  $c \rightarrow \infty$  で  $\Delta$  へ収束する。元の関数は  $E = e^{ic^2t}E_+ + e^{-ic^2t}\bar{E}_-$ ,  $n = \Re N$  で復元され、定理の結果は次と同値になる。

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \mathbb{E} &\rightarrow \mathbb{E}^\infty \text{ in } C([0, T]; H^s), \\ N - N_f - |\mathbb{E}^\infty|^2 &\rightarrow 0 \text{ in } C([0, T]; H^{s-1}), \end{aligned}$$

ここで  $N_f = e^{i\alpha|\nabla|t}(N(0) - |\mathbb{E}^\infty(0)|^2)$ 。

次に解を共鳴・非共鳴周波数へ分解する。 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  は  $2/3 < |\xi| < 3/2$  で  $\varphi(\xi) = 1$ ,  $|\xi| < 1/2$  と  $|\xi| > 2$  で  $\varphi(\xi) = 0$  を満たすとする。共鳴周波数  $M$ , 共鳴成分  $\mathbb{E}_M$ , 非共鳴成分  $\mathbb{E}_X$  を

$$(5.4) \quad M := 2\alpha c^2/(c^2 - \alpha^2), \quad \widetilde{\mathbb{E}}_M := \varphi(\xi/M)\widetilde{\mathbb{E}}, \quad \mathbb{E}_X := \mathbb{E} - \mathbb{E}_M.$$

で定義し、同様に  $N_M$  と  $N_X$  も定義する。

我々の一様評価は全成分に対する Fourier 制限型の時空ノルムと、非共鳴成分に対する Strichartz 型の時空ノルムで与えられる。具体的には、Fourier 制限ノルムは

$$(5.5) \quad X^{s,1}(0, T) := e^{i\Delta_c t/2}H^1(0, T; H_x^s), \quad Y^{s,1}(0, T) := e^{i\alpha|\nabla|t}H^1(0, T; H_x^s).$$

で定義し、Strichartz ノルムは  $\kappa > 0$  を  $s - 3\kappa > 3/2$  となるよう固定して  $2+ := 1/(1/2 - \kappa)$  とおき、

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \text{Str}^E(0, T) &:= L^\infty(0, T; H^s) \cap \langle \nabla / c \rangle^{1/2 - \kappa} L^{2+}(0, T; B_{1/\kappa}^{s-1/2+\kappa}), \\ \text{Str}^n(0, T) &:= L^\infty(0, T; H^{s-1}) \cap \alpha^{-1/2+\kappa} L^{2+}(0, T; B_{1/\kappa}^{s-2+2\kappa}) \end{aligned}$$

と定義する。ただし  $B_p^s := B_{p,2}^s$  は  $\mathbb{R}^3$  上の Besov 空間である。一様評価は次のノルムに対して与えられる。

$$(5.7) \quad \begin{aligned} \|\mathbb{E}\|_{(0,T)} &:= \|\mathbb{E}\|_{L^\infty(0,T;H^s) \cap X^{s-1,1}(0,T)} + \|\mathbb{E}_X\|_{\text{Str}^E(0,T)}, \\ \|N\|_{(0,T)} &:= \|N\|_{L^\infty(0,T;H^{s-1}) \cap \alpha Y^{s-1,1}(0,T)} + \|N_X\|_{\text{Str}^n(0,T)}. \end{aligned}$$

証明のステップは次の通りである。

1.  $H^s$  有界性を仮定して、線形エネルギー評価で  $X^{s-1,1}$  型ノルムを抑える。
2. 非共鳴成分について、高・高周波相互作用は  $H^s$  有界性と Strichartz 評価、低・高周波相互作用は  $H^s$  有界性、 $X^{s-1,1}$  有界性と双線形評価を用いて、Strichartz ノルムを抑える。
3. 共鳴成分について、非線形修正エネルギー評価で  $H^s$  有界性を出す。誤差項の評価に上の評価法と有界性の全てを用いる。
4. これらを合わせると (5.7) のノルムに対して閉じた評価が得られ、時間区間を十分短く取れば望みの一様評価が得られる。

この議論の要である、非共鳴双線形評価と、非線形修正エネルギーについて以下でもう少し解説を加える。

## 6. 双線形評価

$\mathbb{E}^*$  を含まない非線形項の評価は、双対論法により、どちらの項についても次の形の三重線形形式に対する評価に帰着する。

$$(6.1) \quad \langle \Re(N)E \mid F \rangle_{t,x} = \int_{\mathbb{R}^{1+3}} \Re(N)E\bar{F} dt dx,$$

ここで  $E, F$  は共に  $\mathbb{E}$  の方程式の解を想定しているが、以下の議論で  $N, E, F$  は一般の関数である。

これらの時空共鳴性を調べるために、線型方程式の特性曲面からの距離が近い部分と遠い部分へ分解する。その境を  $\delta > 0$  とすると、

$$(6.2) \quad \begin{aligned} N &= N^C + N^F, \quad \widehat{N^C}(\tau, \xi) = \chi((\tau - |\xi|)/\delta) \widehat{N}(\tau, \xi), \\ E &= E^C + E^F, \quad \widehat{E^C}(\tau, \xi) = \chi((\tau - \omega(\xi))/\delta) \widehat{E}(\tau, \xi), \\ F &= F^C + F^F, \quad \widehat{F^C}(\tau, \xi) = \chi((\tau - \omega(\xi))/\delta) \widehat{F}(\tau, \xi), \end{aligned}$$

ここで  $\omega(\xi) := 2c^2(\langle \xi / c \rangle - 1)$ ,  $\widehat{u}$  は時空 Fourier 変換を表し、 $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  は  $|t| < 1$  で  $\chi(t) = 1$ ,  $|t| > 2$  で  $\chi(t) = 0$  とする。更に、それぞれの空間周波数を  $j, k, l$  へ制限する：

$$(6.3) \quad \widetilde{N}_j := \varphi(\xi/j) \widetilde{N}, \quad \widetilde{E}_k := \varphi(\xi/k) \widetilde{E}, \quad \widetilde{F}_l := \varphi(\xi/l) \widetilde{F}.$$

このとき非共鳴条件として  $k \ll j \sim l \not\sim M$  を仮定すると、

$$(6.4) \quad \delta \ll (\alpha + \min(c, l))l \Rightarrow \langle \Re(N_j^C)E_k^C \mid F_l^C \rangle_{t,x} = 0.$$

つまり、3関数の一つは必ず  $\delta$  だけ特性曲面から離れていると考えて良い。その成分については  $X^{s-1,1}$  ノルムが適用できる。

$$(6.5) \quad \|E^F\|_{L^2 H^{s-1}} \lesssim \delta^{-1} \|E\|_{X^{s-1,1}},$$

これから荒く言って微分を二つ稼ぐ事ができ、ステップ 1, 2 における 2 回の微分喪失をちょうど埋め合わせる事ができる。

他方、 $\mathbb{E}^*$  を含む項では共鳴が起こらないので、空間周波数の条件なしで、 $\delta$  の上限  $c(c+j+k+l)$  で上と同様の事が成り立つ。ただし、 $\alpha \geq c$  となると  $\mathbb{E}^*$  が共鳴を起こすようになる。

## 7. 修正エネルギー

共鳴周波数の評価には次の修正エネルギーを使う。

$$(7.1) \quad \mathcal{E}_M := 2(\Delta_c \mathbb{E} | \langle \nabla / c \rangle \mathbb{E}_M)_x + (N | N_M)_x / 2 - (n_M \mathbb{E}_M | \mathbb{E}_M)_x,$$

ここで  $(f | g)_x$  は  $L^2(\mathbb{R}^3)$  内積である。 $\mathbb{E}^*$  を除く事で  $cE$  の発散部分が無くなっている。これは厳密な保存量ではないが、方程式を用いると次の等式が得られる。

$$(7.2) \quad \begin{aligned} \partial_t \mathcal{E}_M = & -2(n\mathbb{E} - n_M \mathbb{E}_M + n\mathbb{E}^* | i\Delta_c \mathbb{E}_M)_x \\ & + (n_M \mathbb{E}_M | iP_M \langle \nabla / c \rangle^{-1} n(\mathbb{E} + \mathbb{E}^*))_x \\ & + (i\alpha |\nabla| N_M | \langle \mathbb{E}, \mathbb{E} \rangle - \langle \mathbb{E}_M, \mathbb{E}_M \rangle + \langle \mathbb{E}, \mathbb{E}^* \rangle)_x. \end{aligned}$$

ここで右辺の三重線形形式では、3関数とも共鳴周波数である場合が除外されている事が重要である。これによって、Strichartz 評価と非共鳴双線形評価で誤差項を制御する事が可能になる。

## REFERENCES

- [1] H. Added and S. Added, *Equations of Langmuir turbulence and nonlinear Schrödinger equation: smoothness and approximation*. J. Funct. Anal. **79** (1988), no. 1, 183–210.
- [2] L. Bergé, B. Bidégaray and T. Colin, *A perturbative analysis of the time-envelope approximation in strong Langmuir turbulence*. Phys. D **95** (1996), no. 3-4, 351–379.
- [3] T. Cazenave and F. Weissler, *The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in  $H^s$* . Nonlinear Anal. **14** (1990), no. 10, 807–836.
- [4] J. Ginibre, Y. Tsutsumi and G. Velo, *On the Cauchy problem for the Zakharov system*. J. Funct. Anal. **151** (1997), no. 2, 384–436.
- [5] N. Masmoudi and K. Nakanishi, *From the Zakharov systems to nonlinear Schrödinger equations*, in preparation.
- [6] T. Ozawa, K. Tsutaya, and Y. Tsutsumi, *Well-posedness in energy space for the Cauchy problem of the Klein-Gordon-Zakharov equations with different propagation speeds in three space dimensions*. Math. Ann. **313** (1999), no. 1, 127–140.
- [7] S. Schochet and M. Weinstein, *The nonlinear Schrödinger limit of the Zakharov equations governing Langmuir turbulence*. Comm. Math. Phys. **106** (1986), no. 4, 569–580.
- [8] C. Sulem and P. L. Sulem, *The nonlinear Schrödinger equation. Self-focusing and wave collapse*. Applied Mathematical Sciences, 139. Springer-Verlag, New York, 1999.