数理解析研究所講究録 1418 巻 2005 年 71-97

KMS states on C*-algebras associated with self similar sets and complex dynamical systems

九州大学・数理学研究院　綿谷安男 (Yasuo Watatani)*
岡山大学・環境理工学部　梶原 毅 (Tsuyoshi Kajiwara)**
* Department of Mathematical Sciences, Kyushu University
** Faculty of Environmental Science and Technology, Okayama University

1 序

リーマン球面上の有理関数によって与えられる複素力学系, また自己相似写像の族は拡大的な力学系の典型的かつ興味ある例である. 私達は以前から, これらの力学系に対して Hilbert C*-bimodule を構成し, それから作られる Pimsner 環を通してもとの力学系を調べることを行ってきた. 複素力学系をジュリア集合に制限してできた力学系, また開集合条件をみたす自己相似写像の場合に, 作られる C*-環が simple かつ purely infinite になることを, 以前の論文 [11], [12] で示した.

本稿においては, これらの環上のゲージ作用に関する KMS state の分類を行う. 複素力学系は $\hat{\mathbb{C}}$ 上で考えると常に分岐点をもっている. また, 自己相似写像についても, 分岐点をもつことが可能であり, ここでは主にその場合を考える. 分岐点のない場合, すなわち有限生成な Hilbert C*-bimodule の場合には, Pinzari-Watatani-Yonetani [20] において Pimsner 環の KMS state は係数環の tracial state で適当な条件をみたすものに帰着された. 分岐点がある場合は有限生成ではないので, 理論を可算生成の場合に拡張する必要が生じる.

可算生成 Hilbert C*-bimodule から作られる Pimsner 環の KMS state については, Laca-Neshveyev [17] においてすでに一般論が研究され, KMS state に対して, finite type, inifinite type などの分類も行っているが, そこでは具体例に関する言及はない. A を単位元をもつ C*-環, X を Hilbert A-A bimodule の場合, $\mathcal{O}_X$ の KMS state の分類は, A 上の tracial state で, Ruell-Perron-Frobenius 型の作用素 F に関する 1 つの等式, およびもう 1 つの不等式をみたすものをみつける問題に帰着される. X が有限生成でないとき, F は X の可算基底を用いて書かれており, あつかいが厄介で

ある．そこで，具体的に可算基底を構成することができれば，F をもっとわかりやすいことばで書くことができ，さらには KMS state を分類することが可能となる．

そこで，有理関数複素力学系，および自己相似写像から決まる力学系から作られる Hilbert C*-bimodule に対して可算基底を具体的に構成し，それを用いて F を計算する．F はそれぞれの力学系のことばで記述され，分岐点，特異点の構造をきちんと反映している．F を用いて Cuntz-Pimsner 環の KMS-state を，できるだけ一般論に頼らず，具体的に分類していくことを試みる．そこで重要な点は，A 上の tracial state が満たす条件は，K 上の測度の点密度に関する等式および不等式に書き換えることができることである．これをもちいて，点密度が存在する条件を求めることができ，また，分岐点上に点密度が存在しないときには等式の条件が A 全体で成立することになり，複素力学系の場合にはリュービッチ測度，自己相似写像の場合にはハッチンソン測度になることがわかる．

なお，複素力学系の場合，ジュリア集合に制限しないと simple にならないが，$\hat{\mathbf{C}}$ 全体で考える方が例外点の情報を含むことができ，複素力学系の性質をより反映している．特に，例外点の個数，タイプ，分岐点の個数，被覆次元などが，すべて KMS state の情報から復元することができる．

自己相似写像の場合は、有限分岐点条件を仮定することによって基底を構成することができる。こちらの場合は例外点的な状況は出現せず、N を contraction の数としたときに，$\beta < \log N$ のときには β -KMS state は存在しない。テント写像に代表される区間力学系で開集合条件をみたすものに制限すれば、分岐点上の点測度と finite type KMS state とが、単純に対応する。また、$\beta = \log N$ のときには、ハッチンソン測度が infinite type KMS state に対応している．

2　定義と準備

2.1　Hilbert C*-bimodules

A を C*-環，X を Hilbert right A-module とする．$L(X)$ で adjoint をもつ X 上の線形作用素の集合を表す．$\xi, \eta \in X$ に対して，$\theta_{\xi,\eta}$ を $\zeta \in X$ に対して $\theta_{\xi,\eta}(\zeta) = \xi(\eta|\zeta)$ で定義し，one rank operator とよぶ．$K(X)$ は one rank operator の線形結合のノルム閉包で，コンパクト環とよぶ．A から $L(X)$ への非退化 *-単射 ϕ があるとき，(X, ϕ) (または単に X) を A 上の Hilbert C*-bimodule とよぶ．以下，X の内積が A を生成する (full) ことを仮定する．

$F(X) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} X^{\otimes n}$ とし，X の Full Fock space という．$\xi \in X$ に対して，

$$T_\xi(a) = \xi a \qquad \text{and} \quad T_\xi(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n) = \xi \otimes \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n$$

によって creation operator $T_\xi \in L(F(X))$ を定義する．また，A から $L(F(X))$ への写像 $i_{F(X)}$ を

$$i_{F(X)}(a)(b) = ab \qquad \text{and} \quad i_{F(X)}(a)(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n) = \phi(a)\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n$$

で定義する．Cuntz-Pimsner-Toeplitz 環 $\mathcal{T}_X$ は，$L(F(X))$ の中で，$\{i_{F(X)}(a),\ a \in A\}$ と $T_\xi,\ \xi \in X\}$ で生成された C*-環である．$j_K|K(X) \to \mathcal{T}_X$ を $j_K(\theta_{\xi,\eta}) = T_\xi T_\eta^*$ で定義する．A のイデアル（コンパクトイデアル）I_X を $I_X := \phi^{-1}(K(X) \cap \phi(A))$ で定義する．$\mathcal{J}_X$ を $\{i_{F(X)}(a) - (j_K \circ \phi)(a); a \in I_X\}$ で生成された $\mathcal{T}_X$ のイデアルとする．X に付随する Cuntz-Pimsner 環とは，quotient algebra $\mathcal{T}_X/\mathcal{J}_X = \mathcal{O}_X$ である．π で quotient map とし，$S_\xi = \pi(T_\xi)$ また $i(a) = \pi(i_{F(X)}(a))$，$i_K : K(X) \to \mathcal{O}_X$ とかく．$\mathcal{O}_X$ は，生成元と関係式を指定した普遍 C*-環としても記述できる．以下普通は簡単のため，$a \in A$ と $i(a)$ を，$\xi \in X$ と S_ξ をそれぞれ同一視し、a, ξ と書く．$\mathcal{O}_X^{alg}$ は A と X で有限的に生成される *部分環とする．$\mathcal{O}_X$ 上には，$\alpha_t(\xi) = e^{it}\xi,\ \xi \in X$ で決まる 1 径数自己同型群があり，ゲージ作用という．

$\phi : A \to L(X)$ が単射としているので，うめこみ $\phi_n : L(X^{\otimes n}) \to L(X^{\otimes n+1})$ で $T \in L(X^{\otimes n})$ に対して $\phi_n(T) = T \otimes id_X$ となるものがある．ここで，便宜上，$\phi_0 = \phi : A \to L(X)$ とする．また，$K(X^{\otimes n})$ から $\mathcal{O}_X$ への等距離写像 $j_K^{(n)}$ で，$j_K^{(n)}(\theta_{\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n, \eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_n}) = \xi_1 \cdots \xi_n {\eta_n}^* \cdots {\eta_1}^*$ となるものがある．これにより，$K(X^{\otimes n})$ とその $\mathcal{O}_X$ における像を同一視する．そこで，

$$\tilde{\mathcal{F}}_n = \phi_{n-1} \circ \cdots \circ \phi_1 \circ \phi(A) + \phi_{n-1} \circ \cdots \circ \phi_1(K(X)) + \cdots + K(X^{\otimes n}).$$

とおき，便宜上 $\tilde{\mathcal{F}}_0 = A$ とする．$\mathcal{F}_n$ で，$A,\ K(X),\ \cdots,\ K(X^{\otimes n})$ によって $\mathcal{O}_X$ 中で生成される C*-環とする．便宜上 $\mathcal{F}_0 = A$ とする．そのとき，$\tilde{\mathcal{F}}_n$ および $\mathcal{F}_n$ の同型の族 $\{\Psi_n\}_{n=0}^\infty$ で二つの包含関係 (filtrations) $\tilde{\mathcal{F}}_i \subset \tilde{\mathcal{F}}_{i+1}$ と $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_{i+1}$ と両立するものがある．部分環 $\mathcal{F}_X = \overline{\bigcup_{n=0}^\infty \mathcal{F}_n}$ は，ゲージ作用 α による固定点と一致している．E で $\mathcal{O}_X$ から $\mathcal{F}_X$ への α によって与えられる条件付き期待値を表す．

2.2 複素力学系と自己相似写像

次に，複素力学系と自己相似写像についての基本事項を述べ，それらに対して Hilbert C*-bimodule を構成する．K として力学系が定義されるコンパクト集合を総称して表す．複素力学系のときは $\hat{\mathbf{C}}$ であり，自己相似写像のときは，自己相似集合自身を表す．

2.2.1 複素力学系

$h(z)$ を z の有理関数とし，リーマン球面 $\hat{\mathbf{C}}$ 上に h によって与えられる複素力学系を考え，これを $(\hat{\mathbf{C}}, h)$ とかく．$h'(z_0) = 0$ となるような z_0 を分岐点 (critical point) とよび，分岐点の集合を $B(h)$ と表す．$h(z) = h(z_0) + c(z - z_0)^n$ + higher terms $(n \geq 2)$，$c \neq 0$ と局所的に書けるとき $e(z_0) = n$ と書いて，z における被覆指数 (branch index) とよぶ．分岐点でないときは，$e(z_0) = 1$ としておく．なお，分岐指数については，Riemann-Hurwitz の公式

$$\sum_{z \in \hat{\mathbf{C}}} e(z) - 1 = 2 \deg h - 2$$

が知られている．また，$z_0 \in B(h)$ のとき，$w_0 = h(z_0)$ を分岐値 (critical value) とよぶ．分岐値全体の集合を $C(h)$ とかく．

$z_0 \in \hat{\mathbf{C}}$ が正規点 (regular point) であるとは，$\{h^n(z)\}_{n=1,\dots}$ が z_0 のある近傍の点において同等連続となることである．正規点全体の集合をファトウ集合 F_h とよび，$J_h = \hat{\mathbf{C}} \backslash F_h$ をジュリア集合とよぶ．F_h は開集合，J_h は閉集合で，$h(F_h) = F_h$ かつ $h(J_h) = J_h$ (完全不変集合) である．

$\mathcal{C}_h = \{(z,w) \in \hat{\mathbf{C}}^2 | w = h(z)\}$ とおく．これは，h のグラフである．$A = \mathrm{C}(\hat{\mathbf{C}})$，$X_h = \mathrm{C}(\mathcal{C}_h)$ とする．X_h は，

$$(a \cdot f \cdot b)(x,y) = a(x) f(x,y) b(y)$$

によって A-A module の構造をもつ．また，

$$(f|g)_A(w) = \sum_{z \in h^{-1}(w)} e(z) \overline{f(z,w)} g(z,w)$$

によって $(f|g)_A(w)$ を定義する．

Proposition 1. *Kajiwara-Watatani [11]* $(f|g)_A(w)$ *は連続関数になり，これらの構造によって，*X_h *は* A *上の full Hilbert C*-bimodule である．*

X_h から作られる Cuntz-Pimsner 環 $\mathcal{O}_{X_h}$ を $\mathcal{O}_h$ ともかき，h で決まる複素力学系に付随した C*-環とよぶ．

なお，$\mathcal{C}' = \{(z,w) \in \hat{\mathbf{C}}^2 | w = h(z),\ z \in J_h\}$ としても，同じ構成法により X'_h，$\mathcal{O}'_h$ が定義できる．これは $\mathcal{O}_h$ の quotient algebra である．なお，ここでは論文 [11] と少し記号を変えており，そこでの記号では $\mathcal{O}_h = \mathcal{O}_h(\hat{\mathbf{C}})$ であり，$\mathcal{O}'_h = \mathcal{O}_h(J_h)$ である．

X_h (および X'_h) のコンパクトイデアルについては，次のことがわかっている．

Proposition 2. *Kajiwara-Watatani [11]* h *は有理関数とする．*X_h *のコンパクトイデアル* I_X *は次で与えられる．*

$$I_X = \{a \in A | a(z) = 0 \ z \in B(h)\}$$

X'_h もについても同様である．

なお，次のことが得られている．

Proposition 3. *Kajiwara-Watatani [11]* h *が有理関数とする．*$\mathcal{O}'_h$ *は simple, purely infinite, nuclear かつ UCT class である．*

C*-環としてみるとこちらの方が標準的であるが，複素力学系の性質を KMS state に反映させることを考えると，$\mathcal{O}_h$ の方が興味深い．理由は，分岐点はジュリア集合に入っている保証がないこと，また例外点は決してジュリア集合に入っていないこと，またジュリア集合の形は一般にはよくわからないことである．

有理関数 $h(z)$ の例外点とは，z の逆軌道 (backward orbit) $\{h^{-n}(z) | n = 0,1,2,\dots,\}$ が有限集合になる点である．有理関数の例外点は高々 2 個であり，例外点が 2 個の場合は共役を除いて完全に分類されている．

Proposition 4. *(Beardon [1])*

1. 例外点が 2 個で片方が $\{\infty\}$ の有理関数の場合は，次のいずれかに共役である．$h_1(z) = (z - z_0)^N + z_0$ $(N \geq 2)$ か，$h_2(z) = 1/(z - z_0)^N + z_0$ $(N \geq 2)$．例外点はいずれも $\{z_0, \infty\}$ である．

2. h_1 については，z_0 の逆軌道は $\{z_0\}$ 一点，$\{\infty\}$ の逆軌道も $\{\infty\}$ 一点である．

3. h_2 については，z_0 の逆軌道は $\{z_0, \infty\}$ である．∞ についても同じ．

4. 例外点が 1 個 で $\{\infty\}$ の場合は多項式で，h_1 以外の形のものである．

2.2.2 自己相似写像

(K, d) をコンパクト距離空間とする．K 上の連続写像 ξ が proper contraction であるとは，定数 $0 < c_1 \leq c_2 < 1$ があり，

$$c_1 d(y_1, y_2) \leq d(\xi(y_1), \xi(y_2)) \leq c_2 d(y_1, y_2) \qquad y_1,\ y_2 \in K$$

をみたすことである．$N \geq 2$ を自然数とし，$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_N)$ を (K, d) の proper contraction の族とする．K が γ に関して自己相似であるとは，$K = \bigcup_{i=1}^N \gamma_i(K)$ となることである．以下，K は γ に関して自己相似とする．

K の部分集合たちを次のように定義する．

$$\begin{aligned}
B(\gamma) &= \{x \in K | x = \gamma_j(y) = \gamma_{j'}(y) \text{ for some } y \in K \text{ and } j \neq j'\} \\
C(\gamma) &= \{y \in K | \gamma_j(y) = \gamma_{j'}(y) \text{ for } j \neq j'\} \\
\tilde{C}(\gamma) &= \bigcup_{j=1}^{N} \gamma_j^{-1}(B(\gamma)).
\end{aligned}$$

複素力学系の場合では，$B(\gamma)$ は分岐点にあたり，$C(\gamma)$ は分岐値にあたるので，自己相似写像の場合でもそう呼ぶことにする．なお，縮小写像の系，$\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ は必ずしも写像の section の集合になっていないことより，$\tilde{C}(\gamma)$ もあわせて考えなければならない．

一般的にとりあつかうには少し困難があり，次の二つの条件を考える．

Definition 5. $\gamma = \{\gamma_j\}_{j=1}^N$ が開集合条件をみたすとは，K の空でない開集合 V で，$\bigcup_{i=1}^N \gamma_i(V) \subset V$ であり，$j \neq j'$ に対して，$\gamma_j(V) \cap \gamma_{j'}(V) = \phi$ となるものが存在することである．

また，

Definition 6. γ が有限分岐点条件をみたすとは，$C(\gamma)$ が有限集合となることである．

なお, 有理関数による複素力学系の場合には, 有限分岐点条件にあたる条件は自動的に満たされている.

$$\mathcal{C}_\gamma = \{(x,y) \in K | x = \gamma_j(y),\ j = 1,\ldots,N\}$$

とする. これは一般的には写像のグラフではなく, correspondence である. $(x,y) \in \mathcal{C}\gamma$ に対して, 被覆指数 $e(x,y)$ を

$$e(x,y) = \#\{j \in \{1,\ldots,N\} | \gamma_j(y) = x\}$$

と定義する. 複素力学系の場合と違い, $\mathcal{C}_\gamma$ 上の点に対して定義する必要がある.
ここで例をあげる.

Example 2.1. $K = [0,1]$ とし, $\gamma_1(y) = \frac{1}{2}y$, $\gamma_2(y) = \frac{1}{2}(y+1)$ とする. K は (γ_1, γ_2) に関する自己相似写像である. この場合, $B(\gamma) = \phi$ かつ $C(\gamma) = \phi$ である.

これは, 分岐点がなく, Cuntz 環を生成する場合である. KMS state は一意的になることが, すでに知られている [20].

Example 2.2. $K = [0,1]$ とし, $\gamma_1(y) = \frac{1}{2}y$, $\gamma_2(y) = 1-\frac{1}{2}y$ とする. $K = \gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ に関して自己相似で, 開集合条件をみたす. $V = (0,1)$ とすることができる. このとき, $B(\gamma) = \{\frac{1}{2}\}$ かつ $C(\gamma) = \{1\}$ である.

これは, テント写像と呼ばれ, もっとも基本となるものである. この場合, 分岐点はただ一つである.

Example 2.3. Ω を $\mathbf{R}^2$ 3 頂点が $c_1 = (1/2, \sqrt{3}/2)$, $c_2 = (0,0)$, $c_3 = (1,0)$ となる正三角形とする. c_1c_2 の中点が b_1, c_1c_3 の中点が b_2, c_2c_3 の中点が b_3 とする. proper contraction $\tilde{\gamma}_i$ $(i = 1,2,3)$ を

$$\tilde{\gamma}_1(x,y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right), \quad \tilde{\gamma}_2(x,y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right), \quad \tilde{\gamma}_3(x,y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y}{2}\right).$$

で定義する. また α_θ を角度 θ の回転とする. $\gamma_1 = \tilde{\gamma}_1$, $\gamma_2 = \alpha_{-2\pi/3} \circ \tilde{\gamma}_2$, $\gamma_3 = \alpha_{2\pi/3} \circ \tilde{\gamma}_3$ とおく. S で, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ によって決まる自己相似集合とする. c_i および b_i, $i = 1,2,3$ は S に含まれる. $V = S \backslash \{c_1, c_2, c_3\}$, として γ は開集合条件をみたす. このとき, $B(\gamma) = \{b_1, b_2, b_3\}$ かつ $C(\gamma) = \tilde{C}(\gamma) = \{c_1, c_2, c_3\}$, であり, γ は, 有限分岐点条件をみたす.

この例の S は, Sierpinski gasket とよばれるフラクタル集合であるが, 自己相似写像の作り方が通常のものと変わっていて, 分岐点が生じる.
なお, テント写像, 上の Sierpinski gasket 力学系は, それぞれ $h(z) = 2z^2 - 1$, $h(z) = \frac{z^3 - \frac{16}{27}}{z}$ によって決まる複素力学系をジュリア集合に制限したものとしても実現できる.

複素力学系の場合と同様に, $A = \mathrm{C}(K)$, $X_\gamma = \mathrm{C}(\mathcal{C}_\gamma)$ として,

$$(a \cdot f \cdot b)(x,y) = a(x)f(x,y)b(y) \qquad (f|g)_A(y) = \sum_{j=1}^{N} \overline{f(\gamma_j(y),y)}g(\gamma_i(y),y).$$

で, 作用・内積を定義できる. X_γ は A 上の Hilbert C*-bimodule となることが示せる. X_γ から作られる Cuntz-Pimsner 環を $\mathcal{O}_\gamma$ とかく.

Proposition 7. *Kajiwara-Watatani [12]* γ *が開集合条件をみたすとき,* $\mathcal{O}_\gamma$ *は simple, purely infinite, nuclear かつ UCT class である.*

Proposition 8. γ *が有限分岐点条件をみたすなら, コンパクトイデアル* I_{X_γ} *は次のように記述される.*

$$I_X = \{a \in A | a(y) = 0, \ y \in B(\gamma)\}$$

Remark 2.1. 泉正己氏からのコメントにより, 有限分岐点条件は実際には不要である.

3 Cuntz-Pimsner algebra 上の KMS state について

$\mathcal{A}$ を単位元をもつ C*-環とし、α は $\mathcal{A}$ 上の 1 径数自己同型群とする。$\mathcal{A}$ 上の state φ が α に関する β-KMS state であるとは、任意の $a \in \mathcal{A}$, と $b \in \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$) は $\mathcal{A}_a$ (α に関して解析的な元全体の集合) の任意の稠密な *-部分環に対して、

$$\varphi(a\alpha_{i\beta}(b)) = \varphi(ba)$$

がなりたつことである.

A を単位元をもつ C*-環, X を Hilbert A-A -bimodule とし, $\mathcal{O}_X$ の ゲージ作用 γ に関する KMS state を分類する問題を考える. X_A が有限型のときには Pinzari-Watatani-Yonetani [20] により, 可算生成の場合には, Laca-Neshveyev [17] により, $\mathcal{O}_X$ の KMS state の分類問題は, A 上の tracial state である条件をみたすものに帰着されている. A の tracial state を $\mathcal{O}_X$ の KMS state に拡張する手続きに関して, [17] の議論は A の tracial state の type によって場合分けを行い, また作用を摂動して極限を取っている. ここでは, A の tracial state からの拡張に重点をおいて, なるべくわかりやすい証明を与える.

そのために, まず一般的な Lemma が必要である. I を C*-環 B のイデアルとし, ψ を I の正値線形汎関数とする. ψ の B への正値線形汎関数としての拡張には多様性があるが, natural extension と呼ばれる最小のものが存在し, $\tilde{\psi}(b) = \lim_\lambda \psi(be_\lambda)$ で与えられる. ただし, $\{e_\lambda\}_\lambda$ は I の近似単位元である.

Lemma 9. B *を単位元をもつ* C^**-環とし,* $B = A + I$ *となっているとする. ここで,* A *は* C^**-部分環,* I *はイデアルとする.* φ *は* A *の state で* ψ *は* I *の正値線形汎関数とする. そのとき, (1)* A^+ *上で,* $\phi \geq \tilde{\psi}$*, (2)* $A \cap I$ *上で* $\phi = \psi$*, がなりたつならば,* B *上の state* ρ *で,* $\rho|_A = \psi$*,* $\rho|_I I = \varphi$ *となるものが一意的に存在する.*

さらに, Cuntz-Pimsner 環の "AF-part" に関する次の Lemma も必要である.

Lemma 10. *(Lemma 4.2(2) [6])* $\mathcal{O}_X$ の中で, $\mathcal{F}^{(n-1)} \cap K(X^{\otimes n}) = K(X^{\otimes n-1}) \cap K(X^{\otimes n})$ がなりたつ.

X_A の可算基底 $(u_k)_{k=1,2,\ldots,}$ を固定する.

Theorem 11. *([17])* $\mathcal{O}_X$ の β-*KMS state* φ を A に制限すると, 次のふたつの条件をみたす A 上の *tracial state* τ になる. ただし, $\lambda = e^\beta$ である.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tau((u_k|au_k)_A) = \lambda\tau(a) \quad (\forall a \in I_X) \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tau((u_k|au_k)_A) \le \lambda\tau(a) \quad (\forall a \in A^+) \quad (2)$$

逆に, A 上の *tracial state* τ で *(1), (2)* をみたすものに対して, $\mathcal{O}_X$ 上の β-*KMS state* φ で, A に制限すると τ になるものを作ることができる. さらにそのような φ は一意的である. なお, この対応は凸集合としての構造を保存している.

Proof. φ を $\mathcal{O}_X$ 上の β-KMS state とする. β-KMS 条件より, $a \in A$ に対して,

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi(u_k^* a u_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} \varphi(a u_i u_i^*)$$

となる. $\sum_{k=1}^{n} u_k u_k^* \le I$ であり $\varphi|_{\mathcal{O}_X^{(0)}}$ は trace であるから, $a \in A^+$ に対して,

$$0 \le \lambda \sum_{k=1}^{n} \varphi(a u_k u_k^*) = \lambda\varphi\left(a^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k u_k^*\right)a^{1/2}\right) \le \lambda\varphi(a)$$

となる. したがって,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(u_k^* a u_k) \le \lambda\varphi(a).$$

となる. $a \in I_X \subset \mathcal{K}(X)$ とする. $(\sum_{k=1}^{n} \theta_{u_k,u_k})_{n=1}^{\infty}$ は $K(X)$ の近似単位元であるから,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(u_k^* a u_k) = \lambda \lim_{n\to\infty} \varphi(a \sum_{k=1}^{n} \theta_{u_k,u_k}) = \lambda\varphi(a).$$

となる. これで τ が (1), (2) をみたすことがわかる.

τ を (1), (2) をみたす A 上の tracial state とする. (2) の条件をくり返し使うことにより, $n \ge 1$ に対して, $L(X^{\otimes n})$ 上の有界正値線形汎関数 σ^n を次の形で与えることができる.

$$\sigma^n(x) = \lambda^{-n} \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbf{N}^n} \tau((u_{k_1} \otimes \cdots \otimes u_{k_n} | x u_{k_1} \otimes \cdots \otimes u_{k_n})_A).$$

$\tau^n = \sigma^n|_{K(X^{\otimes n})}$ とおく. そのとき, 基底の性質を使って,

$$\tau^n(\theta_{x_1\otimes\cdots\otimes x_n, y_1\otimes\cdots\otimes y_n}) = \lambda^{-n}\tau((y_1\otimes\cdots\otimes y_n|x_1\otimes\cdots\otimes x_n)_A)$$

となることがわかる.

F を $\mathbf{N}^n$ の有限部分集合として $e_F = \sum_{\{k_1,\cdots,k_n\}\in F}\theta_{u_{k_1}\otimes\cdots\otimes u_{k_n}, u_{k_1}\otimes\cdots\otimes u_{k_n}}$ とおく. $\{e_F\}_{F \text{ finite subset of } \Lambda^n}$ は $K(X^{\otimes n})$ の近似単位元である. τ の natural extension $\tilde{\tau}$ は, $\tilde{\tau}^n(x) = \lim_F \tau^n(xe_F) = \sigma^n(x)$ で与えられる.

$n \geq 0$ に対して, $\mathcal{F}^{(n)}$ 上の state の列 $\{\omega^n\}_n$ で, $\omega^n|_A = \tau$, $\omega^{n+1}|_{\mathcal{F}^{(n)}} = \omega^n$, $\omega^n|_{K(X^{\otimes n})} = \tau^n$ をみたすものを帰納的に構成する.

$\omega^0 = \tau$ と置く. $n \geq 1$ とする. $0 \leq i \leq n$ に対しては, 次をみたす state の列 $\{\omega^i\}$ があるとする. 「$1 \leq i \leq n$ に対して, $\omega^i|_{K(X^{\otimes i})} = \tau^i$ と $\mathcal{F}^{(i-1)}$ 上で $\tilde{\tau}^i \leq \omega^i$ がなりたつ.」 Lemma 10 から $\mathcal{F}^{(n)} \cap K(X^{\otimes n+1}) = K(X^{\otimes n}) \cap K(X^{\otimes n+1})$ である, $x \in K(X^{\otimes n}) \cap K(X^{\otimes n+1})$ として, $u_{i_n}^*\cdots u_{i_1}xu_{i_1}\cdots u_{i_n} \in A \cap K(X) = I_X$ と条件 (1) を用いて,

$$\begin{aligned}
\tau^{n+1}(x) &= \lambda^{-n-1}\sum_{(i_1,\cdots,i_n,i_{n+1})\in\mathbf{N}^{n+1}}\tau(u_{i_{n+1}}^*u_{i_{i_n}}^*\cdots u_{i_1}^*xu_{i_1}\cdots u_{i_n}u_{i_{n+1}}) \\
&= \lambda^{-n}\sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in\mathbf{N}^n}\tau(u_{i_{i_n}}^*\cdots u_{i_1}^*xu_{i_1}\cdots u_{i_n}) \\
&= \tau^n(x) = \omega^n(x).
\end{aligned}$$

を得る.

ここで, (2) を用いて $x \in \mathcal{F}^{(n)+}$ に対して,

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}^{n+1}(x) &= \lambda^{-n-1}\sum_{(i_1,\ldots,i_n,i_{n+1})\in\mathbf{N}^{n+1}}\tau(u_{i_{n+1}}^*u_{i_n}^*\cdots u_{i_1}^*xu_{i_1}\cdots u_{i_n}u_{i_{n+1}}) \\
&\leq \lambda^{-n}\sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbf{N}^{n+1}}\tau(u_{i_n}^*\cdots u_{i_1}^*xu_{i_1}\cdots u_{i_n}) \\
&= \tilde{\tau}^n(x).
\end{aligned}$$

となることに注意しよう.

$x \in \mathcal{F}^{(n)}$ を $y \in \mathcal{F}^{(n-1)}$ と $z \in K(X^{\otimes n})$ を用いて $x = y + z$ とかく. 帰納法の仮定により, $\tilde{\tau}^n(y^*y) \leq \omega^n(y^*y)$ がなりたつ. 一方, $y^*z + z^*y + z^*z \in K(X^{\otimes n})$ より,

$\tau^n(y^*z+z^*y+z^*z)=\omega^n(y^*z+z^*y+z^*z)$ である. 以上より,

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}^{n+1}(x^*x) &= \tilde{\tau}^{n+1}((y+z)^*(y+z)) \\ &\leq \tilde{\tau}^n((y+z)^*(y+z)) \\ &= \tilde{\tau}^n(y^*y+y^*z+z^*y+z^*z) \\ &= \tilde{\tau}^n(y^*y)+\tau^n(y^*z+z^*y+z^*z) \\ &= \tilde{\tau}^n(y^*y)+\omega^n(y^*z+z^*y+z^*z) \\ &\leq \omega^n(y^*y)+\omega^n(y^*z+z^*y+z^*z) \\ &= \omega^n(y^*y+y^*z+z^*y+z^*z) \\ &= \omega^n(x^*x).\end{aligned}$$

となる. したがって Lemma 9 より, $\mathcal{F}^{(n+2)}$ 上に state ω^{n+1} が存在して, $\omega^{n+1}|_{\mathcal{F}^{(n)}}=\omega^n$ かつ $\omega^{n+1}|_{K(X^{\otimes n+1})}=\tau^{n+1}$ となる. さらに, $\tilde{\tau}^{n+1}|_{\mathcal{F}^{(n)}}\leq\omega^{n+1}$ も成立している. よって, $\mathcal{F}^{(n)}$ 上の state ω^n で, $\omega^{n+1}|_{\mathcal{F}^{(n)}}=\omega^n$ かつ $\omega^n|_{K(X^{\otimes n})}=\tau^n$ となるものが作れた. $x\in\mathcal{F}^{(n)}$ に対して $\omega(x)=\omega^n$ と置いて, $\mathcal{F}_X$ 全体上の state ω に拡張できる. なお, $K(X^{\otimes n})$ における値が決まっていることより, ω は最初に取った基底の値には依存しない.

x,y が m スペクトル部分空間すなわち $\gamma_t(x)=e^{imt}x$ となっているとき, 上の式を利用した代数計算によって $\omega(xy^*)=\lambda^m\omega(y^*x)$ を得る. $m=0$ とすると, ω が trace であることがわかる. また, $m=1$ の式が成り立つことより, ω が $\mathcal{O}_X$ の β-KMS state に $\omega\circ E$ と拡張されることがわかる. □

4 可算基底の構成と Ruell-Perron-Frobenius 作用素の計算

複素力学系, および自己相似写像に付随した Hilbert C*-bimodule の右 Hilbert C*-module 構造に関する可算基底を具体的に構成する. 知る限りでは, このような基底が構成されたのは始めてである. 最初に複素力学系について詳しくのべ, 自己相似写像については概略のみ述べる.

最初に, $h(z)=z^n$, $n\geq 2$ の場合を考える. 実は, この場合が本質であることがわかる. $i\geq 1$ を自然数として, $[0,\infty)$ 上の連続関数 $r_i(x)$ を次のように定義する.

$$r_i(x)=\begin{cases}1 & \frac{L}{i}\leq x\\ \frac{i}{L}x & \frac{M}{2i}\leq x\leq\frac{L}{i}\\ 0 & 0\leq x\leq\frac{L}{2i}.\end{cases}$$

ここで, L 正の定数とする. さらに, $r_0(x)=0$ とおく. $r_i(x)\leq r_{i+1}(x)$ であることに注意して,

$$v_i(x)=(r_i(x)-r_{i-1}(x))^{1/2}.$$

とおく．そのとき，$\sum_{i=1}^{\infty} v(0)^2 = 0$ である．また，任意の $\delta > 0$ に対して自然数 N_0 で，任意の $N \geq N_0$ に対して，$\sum_{i=1} v_i(x)^2 = 1$ である．また，$1 \leq p \leq n-1$ に対して，$\mathbf{C}\backslash\{0\}$ 上の関数 $\xi_p(z)$ を

$$\xi_p(z) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{z}{|z|}\right)^p$$

によって定義する．

これらを用いて，$i \geq 1$, $1 \leq p \leq n-1$ に対して，

$$u_{1+(n-1)(i-1)+p}(z, z^n) = \xi_p(z) v_i(|z|),$$

とおく．これらの関数は，$\mathbf{C}$ 上の連続関数となる．M を自然数として，$f_M(z, z^n) = \sum_{k=1}^{M} u_k(u_k|f)_A(z, z^n)$ とおき，f_M が f に一様収束することを導く．$z \neq 0$ と $z = 0$ の場合を分けて議論する．

$z \neq 0$ を固定する．このとき，M を十分大きくすれば $f_M(z, z^n) = f(z, z^n)$ となることを示す．u_k は v_i を因数に含んでおり，$v_i(z)$ は i が十分大きくなると全て 0 になってしまうことより，自然数 N があって，$M \geq \tilde{M} = 1 + (n-1)N$ ならば，

$$\begin{aligned}
f_M(z, z^n) =& \sum_{k=1}^{\tilde{M}} u_k(u_k|f)_A(z, z^n) \\
=& u_1(u_1|f)_A(z, z^n) \\
&+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{p=1}^{n-1} u_{1+(n-1)(i-1)+p}(z, z^n) \sum_{\tilde{z}^n = z^n} \overline{u_{1+(n-1)(i-1)+p}(\tilde{z}, z^n)} f(\tilde{z}, z^n) \\
=& \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(\omega^j z, z^n) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} (\overline{\omega}^p)^j v_i(|z|)^2 f(\omega^j z, z^n) \\
=& \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(1 + \sum_{p=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{N} v_i(|z|)^2 (\overline{\omega}^j)^p\right) f(\omega^j z, z^n) \\
=& \frac{1}{n} n f(z, z^n) + \sum_{j=1}^{n-1}\left(1 + \sum_{p=1}^{n-1} (\overline{\omega}^j)^p\right) f(\omega^j z, z^n) \\
=& f(z, z^n).
\end{aligned}$$

となる．ここで，$1 \leq j \leq n-1$ のときに $\overline{\omega}^j$ は 1 の虚数 n 乗根であり，$1 \leq p \leq n-1$ のときに $\sum_{p=1}^{n-1} (\overline{\omega}^j)^p + 1 = 0$ となることを用いた．

次に $z = 0$ の近傍での収束の様子を調べる．f は連続関数だから，$\varepsilon' > 0$ を任意にとる．$\delta > 0$ が存在して，任意の $|z| < \delta$ に対して

$$|f(z, z^n) - f(0, 0)| < \varepsilon'$$

となるようにできる. $1 \le n' \le n-1$ として, $M = 1 + (n-1)(N-1) + n'$ と置き, $|z| < \delta$ に対して,

$$\begin{aligned} f_M(z, z^n) =& \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(\omega^j z, z^n) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}(\overline{\omega}^p)^j f(\omega^j z, z^n) v_i(|z|)^2 \\ &+ \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n'}\sum_{j=0}^{n-1}(\overline{\omega}^p)^j f(\omega^j z, z^n) v_{N+1}(|z|)^2 \end{aligned}$$

である. さらにこれを用いて,

$$\begin{aligned} &|f_M(z, z^n) - f(z, z^n)| \\ \le& |f(z, z^n) - f(0,0)| + |f_M(z, z^n) - f(0,0)| \\ \le& \varepsilon' + \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} |f(\omega^j z, z^n) - f(0,0)| \\ &+ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}(\overline{\omega}^p)^j f(0,0) v_i(|z|)^2 + \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n'}\sum_{j=0}^{n-1}(\overline{\omega}^p)^j f(0,0) v_{N+1}(|z|)^2 \\ &+ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}|f(z, z^n) - f(0,0)| v_i(|z|)^2 + \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n'}\sum_{j=0}^{n-1}|f(z, z^n) - f(0,0)| v_{N+1}(|z|)^2 \\ \le& \varepsilon' + \varepsilon' + 0 + (n-1)\varepsilon' \sum_{i=1}^{N+1} v_i(|z|)^2 \\ \le& (n+1)\varepsilon'. \end{aligned}$$

となることがわかる. ここでも, $\overline{\omega}^p$ は 1 の虚数 n 乗根より, $\sum_{j=0}^{n-1}(\overline{\omega}^p)^j = 0$ となることを用いた. 前のケースと p, j の使いかたが逆である. また, $\sum_{i=1}^{N+1} v_i(|z|)^2 \le 1$ となることも用いた. $\varepsilon' = (1/(n+1))\varepsilon$ ととっておけば, 任意の $z \in \mathbf{C}$ に対して, $|f_M(z, z^n) - f(z, z^n)| < \varepsilon$ となることがわかる.

次に, $a \in B(h)$, $b = h(a) \in C(h)$ とする. U, V を a, b の開近傍で $h(\overline{U}) = \overline{V}$, ϕ_1, ϕ_2 がそれぞれ $\overline{U}$, V から $0 \in \hat{\mathbf{C}}$ の開近傍 $\tilde{U}$, $\tilde{V}$ の閉包への同相で $\phi_2 \circ h \circ \phi_1^{-1}(z) = z^n$ となるものとする. $\mathcal{C}_V = \{(z, w) | w = h(z),\ z \in \overline{U},\ w \in \overline{V}\}$ とし, $X_V = \mathrm{C}(\mathcal{C}_V)$ の場合の基底を作る. $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ を $h(z) = z^n$ の場合の基底として,

$$\tilde{u}_k(z, h(z)) = u_k(\phi_1(z), \phi_2(h(z)))$$

とおく．$z \in U$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{M}(\tilde{u}_k(\tilde{u}_k|f)_A)(z,h(z))\\
=&\sum_{k=1}^{M}\tilde{u}_k(z,h(z))\sum_{h(\tilde{z})=h(z)}\overline{\tilde{u}_k(\tilde{z},h(z))}f(\tilde{z},h(z))\\
=&\sum_{k=1}^{M}u_k(\zeta,\zeta^n)\sum_{\tilde{\zeta}^n=\zeta^n}\overline{u_k(\tilde{\zeta},\zeta^n)}f(\phi_1^{-1}(\tilde{\zeta}),\phi_2^{-1}(\zeta^n))).
\end{aligned}$$

となるので，$\{\tilde{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ が X_V の基底になっていることがわかる．

$b \in C(h)$ で $h^{-1}(b) = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ であるとする．V を b の十分小さい開近傍で，a_i の連結開近傍 U_i で $h(U_i) = V$ となるものが存在して，$h|_{\overline{U_i}}$ は z^n に共役になっているようにできる．$\mathcal{C}_V = \{(z,h(z))|h(z) \in \overline{V}\}$ は $\mathcal{C}_V^i = \{(z,h(z))|z \in \overline{U}_i\}$ とおけば，$\mathcal{C}_V$ は $\mathcal{C}_V^i$ $(i = 1,\ldots,m)$ の共有点をもたない和集合となる．$A^V = \mathrm{C}(\overline{V})$，$X_V^i = \mathrm{C}(\mathcal{C}^i)$ とおくと，$(X_V)_{A_V} = \bigoplus_{i=1}^{m}(X_V^i)_{A_V}$ であり，$(X_V^i)_{A_V}$ は上で議論した形の Hilbert C*-module であるからそれぞれに可算 (または有限) 基底が存在する．それらを寄せ集めれば，全体の可算基底を作ることができる．

最後に，これらの局所的に作った基底を張り合わせて全体の基底を作る．$C(h) = \{b_1, b_2, \cdots, b_s\}$ として，b_i の十分小さい開近傍 V_i で $i \neq j$ で $\overline{V}_i \cap \overline{V}_j = \phi$ であり，各 X_{V_i} で上のような基底がとれるものとする．さらに，b_i の閉近傍 W_i で $W_i \subset V_i$ をみたすものをとる．$V_0 = \hat{\mathrm{C}}\setminus\bigcup_{i=1}^{s}W_i$ とおく．$\{V_0, V_1, \cdots, V_s\}$ は $\hat{\mathrm{C}}$ の開被覆であり，V_0 の任意の点は，分岐値を含まない近傍をもっている．$(u_j^i)_{j\in\Lambda^i}$ を X_{V_i} に対して構成した基底とする．また，$\{\psi_i\}_{i=0}^{s}$ を開近傍 $\{V_i\}_i$ に付随した単位の分割とする．$f \in X$ に対して，$\mathrm{supp}(f\cdot\psi_i) \subset V_i$ であることにより，

$$(f\cdot\psi_i)(z,h(z)) = \sum_{j\in\Lambda^i}u_j^i(u_j^i|f\cdot\psi_i)_A(z,h(z))$$

となり，一様収束である．$\tilde{u}_j^i(z,h(z)) = u_j^i(z,h(z))\psi_i(z,h(z))$ とおく．これを用いて

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{s}\sum_{j\in\Lambda^i}\tilde{u}_j^i(\tilde{u}_j^i|f)_A(z,h(z)) =&\sum_{i=0}^{s}\sum_{j\in\Lambda^i}u_j^i\cdot\psi_i^{1/2}(u_j^i\cdot\psi_i^{1/2}|f)_A(z,h(z))\\
=&\sum_{i=0}^{s}\sum_{j\in\Lambda^i}u_j^i(u_j^i|f\cdot\psi_i)(z,h(z))\\
=&\sum_{i=0}^{s}(f\cdot\psi_i)(z,h(z))\\
=&f(z,h(z))
\end{aligned}$$

であり, z に関して一様に収束することがわかる.

$\Lambda = \{(i,j) | 0 \le i \le s,\ j \in \Lambda^i\}$ とする.

Theorem 12. h を有理関数として $\hat{\mathrm{C}}$ 上の複素力学系を考える. そのとき, 上で作った $(u^i_k)_{(i,j)\in\Lambda}$ は, $(X_h)_A$ の可算基底になっている. これらは, 局所的に座標をとって作った基底を張り合わせたものである.

自己相似写像で有限分岐点条件をみたす場合にも同様の構成を行うことができる. 次の状況を考える. K_1 と K_2 をコンパクト距離空間, n を自然数として, γ_i $(i = 1, \cdots, n)$ を K_1 から K_2 への proper contraction とする. $n \ge 2$ の場合には, $c \in K_1$ があって $\gamma_1(c) =, \cdots, = \gamma_n(c)$ がなりたち, そのほかの $y \in K_1$ に対しては γ_i の値がすべて異なっているとする. この状況は, 複素力学系で $h(z) = z^n$ を考えることと同等である.

$\mathcal{C} = \{(\gamma_i(y), y) | y \in K_i, i = 1, \ldots, n\}$ として, $A = \mathrm{C}(K_1)$, $X = \mathrm{C}(\mathcal{C})$ とする. A module X に対して基底を構成する. $n = 1$ のときには, $u_1(x,y) = 1$ となる 1 個の関数で十分である. $n \ge 2$ とする. $h(z) = z^n$ と同様に $r_i(x)$ を作り, $1 \le i$, $1 \le l \le n-1$ に対して,

$$u_1(x,y) = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$u_{1+(n-1)(i-1)+l}(\gamma_j(y), y) = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\omega^{lj}\,v_i(d(y,c)),$$

によって $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ を定義する. $h(z) = z^n$ の場合とほぼ同様にして, この $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ が基底になっていることがわかる. 有限分岐点条件により分岐値は有限個であるから, 複素力学系の場合と同様に, $\mathcal{C} = \{(\gamma_j(y), y) | y \in K, j = 1, \ldots, n\}$ を基本的な小部分に分割して議論することにより, X_A 全体に可算基底を構成することができる.

ここまで構成した基底を用いて, Ruell-Perron-Frobenius 作用素にあたるものの具体的な形を求める. $a \in A = \mathrm{C}(K)$ に対して, ボレル関数 $\tilde{a}$ を次のように定義する. 複素力学系の場合は,

$$\tilde{a}(w) = \sum_{w \in h^{-1}(w)} a(z)$$

であり, 自己相似写像の場合は,

$$\tilde{a}(y) = \sum_{x\in\gamma(y)} a(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{e(\gamma_j(y), y)} a(\gamma_j(y)).$$

と定義する. $C(h)$ または $C(\gamma)$ が空集合でない限り, $\tilde{a}$ は不連続になる.

以下は複素力学系に対して述べるが, 有限分岐点条件をみたす自己相似写像の場合にも同様に成立する.

Proposition 13. 有理関数複素力学系から作られる *Hilbert C*-bimodule* X_h において, 上で作った可算基底を $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ とする. そのとき, $a \in A$ に対して,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(u_k|au_k)_A(y) = \tilde{a}(y)$$

がなりたつ. ここで, 左辺の収束は $a \in A^+$ に対しては単調収束, 一般の a に関しては, 無条件収束である.

Proof. 証明は, $h(z) = z^n$ の場合にまず行い, 基底の構成において行ったのと同じ手法によって, 一般的な場合に拡張する.

$n = 1$ の場合は, $u_1(z,z) = 1$ なので, $(u_1|au_1)_A(w) = a(w)$ である. $n \geq 2$ とする.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty}(u_k|au_k)_A(w)\\
=&\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{z\in h^{-1}(w)} e(z)\overline{u_k(z,w)}a(z)u_k(z,w)\\
=&\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{z\in h^{-1}(w)} e(z)|u_k(z,w)|^2 a(z)\\
=&\sum_{z\in h^{-1}(w)} e(z)|u_1(z,w)|^2 a(z) + \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{z\in h^{-1}(w)} e(z)|u_k(z,w)|^2 a(z)
\end{aligned}$$

$z = 0$ のときは, $e(z) = n$ で, $k \geq 2$ に対して $u_k(z,w) = 0$ であるから, $n\cdot(1/n)a(0) = a(0)$ となる. $z \neq 0$ のときは, $e(z) = 1$ であり, 最後の式は,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{z\in h^{-1}(w)} a(z) + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{z\in h^{-1}(w)} v_i(|z|)^2 a(z)\\
=&\frac{1}{n}\sum_{z\in h^{-1}(w)} a(z) + \frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{z\in h^{-1}(w)} v_i(|z|)^2 a(z)\\
=&\sum_{z\in h^{-1}(w)} a(z)
\end{aligned}$$

となり, いずれも $\tilde{a}(w)$ に一致している. なお, $z = 0$ のときは第 2 項以下がすべて 0 になってしまうことにより, $1/n$ に減少する. 特に, $z = 0$ で不連続になることが観察される.

座標をとることによって $h(z) = z^n$ $(n \geq 1)$ と共役になる場合は, 基底の作り方より, 全く同じ結論を得る. $c \in C(h)$ に対して $h^{-1}(c) = \{b_1, \cdots, b_m\}$ となっている場合は, Hilbert C*-module を直和に分けてそれぞれで計算する. 被覆の各開集合上で基底が構成されている場合も, 最終的に 1 の分解を用いて足しあわせることになり, 結論を得る. □

このProposition を用いて, $\mathcal{O}_X$ 上の β-KMS state に対応している K 上のボレル確率測度のみたす条件を, 基底を使わない形に書き直すことができる. ここで, K 上のボレル測度 μ に対して対応する A 上の trace を τ^μ とかく. なお, A の trace は, K 上の連続関数に対して定義されているが, ボレル測度に対応しているので, ボレル関数まで単調性によって拡張することができる.

Theorem 14. *h を有理関数とし, リーマン球面 $\hat{\mathbf{C}}$ 上の複素力学系に付随した Hilbert C^*-bimodule X_h および Cuntz-Pimser 環 $\mathcal{O}_h$ を考える. φ で $\mathcal{O}_h$ 上の β-KMS state とする. そのとき, φ の $A = \hat{\mathbf{C}}$ への制限によって現れる $\hat{\mathbf{C}}$ 上の Borel 測度 μ は次の (3), (4) をみたす.*

$$\tau^\mu(\tilde{a}) = \lambda\tau(a) \qquad (a|_{B(h)} = 0) \quad (3)$$
$$\tau^\mu(\tilde{a}) \le \lambda\tau(a) \qquad (a \in A^+) \quad (4).$$

ただし, $\lambda = e^\beta$ である.

逆に, $\hat{\mathbf{C}}$ 上のボレル測度 μ で (3), (4) をみたすものに対して, $\mathcal{O}_h$ 上の β-KMS state φ で, $\varphi|_A = \tau^\mu$ をみたすものが一意的に存在する.

Proof. $I_X = \{f \in A | f(z) = 0 \text{ for } z \in B(h))\}$ であること, Proposition 13 と単調収束定理, またはルベーグの優収束定理により従う. □

Remark 4.1. 自己相似写像の場合には (3) の等式は,

$$\sum_{j=1}^{N} \tau^\mu(\gamma_j^*(a)) = \lambda\tau^\mu(a)$$

となる. 複素力学系の場合は, 一般に h に対する section が連続にとれないので, 必ずしもこのような形にはかけない.

$\lambda \ge 1$ を固定して, $a \in C(K)$ に対して

$$\tilde{F}(a) = \frac{1}{\lambda} \sum_{z \in h^{-1}(w)} a(z)$$

の形の作用素を考える. 多くの研究 Enomoto-Fujii-Watatani [4], Matsumoto-Watatani-Yoshida [18], Exel [2], [3] において, KMS state は $\tilde{F}^*$ の 1 固有ベクトルとして与えられている. 分岐点の無い状況では F は A から A への C*-環レベルの写像を与えている. しかし, 分岐点がある場合は, $\tilde{a}$ は連続にならないので, F は A から A への作用素ではなくなる. そこで,

$$F(\mu)(a) = \frac{1}{\lambda}\mu(\tilde{a})$$

とすれば, A^* から A^* への正値線型写像として定義できる. ただし, KMS state はかならずしも F の 1 固有ベクトルになるとは限らず, もっと弱い条件で決まることもあり, それが分岐点の状況を表していると考えられる.

ここで, Laca-Neshveyev [17] により, KMS state の type を定義する. $\mathcal{O}_X$ の β-KMS state に対応する A 上の tacial state τ が

1. τ_0 (A 上の trace) があって $\tau = \sum_{i=0}^{\infty} F^i(\tau_0)$ とかけるときは finite type という.
2. $F(\tau) = \tau$ がなりたつときは, inifinite type という.

ただし, この定義は, C*-環 $\mathcal{O}_X$ を構成するために用いた Hilbert C*-bimodule X に依存しており, $\mathcal{O}_X$ およびゲージ作用を加えても今のところ, 復元することができない.

5 KMS state の分類

前章で, 基底を具体的に構成し, それを用いて $\tilde{F}$ を具体的に書き下した. 本章では, これを用いて1変数の有理関数によって決まる複素力学系, さらに自己相似写像に付随する Cuntz-Pimsner 環の KMS satate の分類を, できる限り行う. 本章においても, 主として複素力学系に対して分類を行い, 自己相似写像については補足するにとどめる.

前章で得られた条件は分岐点をもたない場合に比較すると, F の形および (3) が成立する範囲が A 全体ではないところに2重の特異性がある. そこで, 考えているボレル確率測度 μ がもし分岐点, および分岐値において点密度を持たないならば分岐点のない場合と同様になることが期待できる.

Proposition 15. *μ を $\hat{\mathbb{C}}$ 上のボレル確率測度で (3) をみたし, かつ $B(h)$ および $C(h)$ の各点で点密度を持たないとすると, (3) が全ての $a \in A$ に対して成立する.*

Proof. μ が仮定をみたしているとする. 一般の $a \in A^+$ に対して, $B(h)$ で 0 になるような $a_n \in A^+$ で, $z \notin B(h)$ に対して $a_n(z)$ が $a(z)$ に単調増加収束するものが作れる. そのとき, μ が $B(h)$, $C(h)$ でともに点密度を持たないことにより,

$$\lim_{n\to\infty} \tau^\mu(a_n) = \tau^\mu(a) \qquad \lim_{n\to\infty} \tau^\mu(\tilde{a}_n) = \tau^\mu(\tilde{a})$$

がなりたつ. □

なお, μ が上の条件をみたしているとき, (3) の条件において $\tilde{F}$ のかわりに,

$$\overline{F}(a)(w) = \frac{1}{\lambda} \sum_{z \in h^{-1}(w)} e(z)a(w)$$

を用いて良い.

Remark 5.1. 自己相似写像の場合には, 上の Proposition 中の $C(h)$ を, もう少し広い集合, $\tilde{C}(\gamma)$ にする必要がある. それは, 自己相似写像を定義する $(\gamma_1, \ldots, \gamma_N)$ は必ずしもある写像の section 全体にはなっていない. 1つの x に対して, 複数の j,

y_j があって $x = \gamma_j(y)$ がなりたつ可能性がある. ただし, Proposition の成立, および後の証明には支障はない. この場合は,

$$\tilde{F}(a)(y) = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{N} a(\gamma_j(y)))$$

とした $\tilde{F}$ を利用することができる.

Lemma 16. *μ が (3) をみたしていてかつ $B(h)$ および $C(h)$ で点密度を持たないとすると, $\lambda = N$ $(\beta = \log N)$ でなければならない.*

Proof. (3) が全ての $a \in A$ に対してなりたつので, $a = I$ を代入することができ, $\lambda = N$ を得る. □

なお, この Lemma により, もし $\lambda > N$ でかつ μ が (3) をみたし, $B(h)$ および $C(h)$ の点密度が 0 になると $\mu = 0$ になる. これは, 分類の最後に使われる.

$\lambda = N$ で μ が $B(h), C(h)$ で点密度を持たない場合を先に考える. Lyubich [16] による次の定理が重要である. $\|\cdots\|_K$ は, コンパクト集合 K 上の一様ノルムである.

Proposition 17. *(Lyubich [16]) $\hat{\mathbf{C}}$ 上に次の性質をみたすボレル確率測度 μ^L が存在する. $K \subset \hat{\mathbf{C}}$ は h の例外点を含まない任意のコンパクト集合で, $a \in A = \mathrm{C}(\hat{\mathbf{C}})$ とするとき,*

$$\lim_{m\to\infty} \|\overline{F}^m a - \int_{\hat{\mathbf{C}}} a(z) d\mu^L(z)\|_K = 0$$

がなりたつ. なお, μ^L は $\bar{F}^*$ 不変であり, サポートは h のジュリア集合に含まれている.

Remark 5.2. このような測度を, Lyubich 測度とよぶ. この測度は, 複素力学系のエルゴード的性質を考える際にキーになるものである.

Proposition 18. *$\lambda = N$ とする. $(\hat{\mathbf{C}}, h)$ を有理関数 h によって決まる複素力学系とする. $\hat{\mathbf{C}}$ 上の確率測度 μ が (3) をみたし, $B(h)$, $C(h)$ で点度を持たないとすれば, Lyubich 測度 μ^L に一致しなければならない.*

Proof. μ は $\overline{F}^*$-不変になっている. K は h の例外点をふくまないようなコンパクト集合として,

$$\begin{aligned}
&|\mu(a) - \mu^L(a)| \\
=&|\mu(\overline{F}^m(a)) - \mu^L(a)| \\
=&|\int_K \overline{F}^m(a)\, d\mu + \int_{K^c} \overline{F}^m(a)\, d\mu - \mu^L(a)\mu(K) + \mu^L(a)\mu(K^c)| \\
\le&|\int_K \overline{F}^m(a)\, d\mu - \mu^L(a)\mu(K)| + |\int_{K^c} \bar{F}^m a\, d\mu| + |\mu^L(a)\mu(K^c)|.
\end{aligned}$$

である. Lyubich の定理 (Proposition 17) により, 最後の不等式の第1項は 0 に収束する. また, $\|\tilde{F}^m(a)\|$ は m に関して一様に有界であるから, 第2項の積分は, K を大きくすれば m に無関係に小さくできる. したがって, $\mu = \mu^L$ でなければならない. □

Proposition 19. *(不明) Lyubich 測度は点密度を持たない.*

この命題は, 谷口 [21] の中に述べられているが, オリジナルな出典は不明である. また, $(\hat{\mathbf{C}}, h, \mu^L)$ が N-Bernuilli shift と共役であること [8] からもわかる.
このことより, 次を得る.

Proposition 20. *Lyubich 測度は,* $\log N$*-KMS state である.*

ここで, 点密度について調べることが必要になる. $\chi_{\{z\}}$ で1点集合 $\{z\}$ の定義関数を表す. $c_\mu(z) = \mu(\{z\}) = \tau^\mu(\chi_{\{z\}})$ とおく. これは, μ の z における点密度の値を表す. (3), (4) の条件は, 点密度に対しては次のように表現することができる.

Proposition 21. *$z \notin B(h)$ に対しては, $c_\mu(h(z)) = \lambda c_\mu(z)$ がなりたつ. $z \in B(h)$ に対しては, $c_\mu(h(z)) \leq \lambda c_\mu(z)$ となる.*

Proof. (3) において $a = \chi_{\{z\}}$ を代入, あるいは連続関数でこのボレル関数に収束させれば, $c_\mu(h(z)) = \lambda c_\mu(z)$ をえる. 左辺においては, 1項をのぞいて 0 になる. (4) においても, $a = \chi_{\{z\}}$ を代入すると, $c_\mu(h(z)) \leq \lambda c_\mu(z)$ となる. 左辺には分岐指数がかかっていないので, このようになる. □

Remark 5.3. 自己相似写像の場合は, $x \in K$ のときに $\gamma^{-1} = \{y_1, \ldots, y_p\}$ が複数個になることが起こり得る. $x \notin B(\gamma)$ のときは $c_\mu(y_1) + \cdots + c_\mu(y_p) = \lambda c_\mu(x)$ で, $x \in B(\gamma)$ のときには, $c_\mu(y_1) + \cdots + c_\mu(y_p) \leq \lambda c_\mu(x)$ となる. なお, $x \in B(\gamma)$ の場合, 左辺に $C(\gamma)$ だけでなく, $\tilde{C}(\gamma)$ の点も出てくる.

Proposition 22. *h は有理関数とする. μ は (3), (4) をみたす $\hat{\mathbf{C}}$ 上のボレル確率測度とする. z が h の例外点ではないとして, $c_\mu(z) > 0$ となっていたとすると, $\lambda > N$ でなければならない.*

Proof. z が h の例外点でないとすると, z の逆軌道 $O^-(z)$ のある点 w で, $h^{-i}(w)$ の個数が常に N^i となるものが存在する. これは, $B(h)$, $C(h)$ が有限集合であることより, $O^-(z)$ が何度も $B(h)$ と共通部分をもつと例外点になってしまうことによる. したがって, Proposition 21 を用いて, 逆軌道上の点測度を足しあわせるとき $\lambda > N$ でないと発散するころがわかる. □

Theorem 23. *$\lambda = N$ とする. h が例外点を持たないとすれば, KMS-state は一意的で, φ^L に限る.*

Remark 5.4. 以前の論文 [11] において, ジュリア集合が分岐点を含まないとき, ジュリア集合に制限した力学系に付随した C*-環の KMS state が Lyubich 測度によって与えられるものに限ることを示している. ここでの議論は, その拡張である.

Remark 5.5. 自己相似集合の場合, Lyubich 測度にあたるものは Huchinson 測度である. どちらも, 力学系に付随した標準的な不変測度である.

Proposition 24. 自己相似集合 (K,γ) に対して, *Huchinson* 測度は点密度をもたず, $\lambda = N$ における *KMS state* をあたえる.

$\lambda > N$ とする. z に点密度があると, 逆軌道上の点密度がどんどん決まっていくが. $C(h)$ から $B(h)$ にうつるところでは等号ではなく不等号なので, 任意性がある. $B(h)$ の点の逆軌道が決して $C(h)$ には帰って来ない場合には, $B(h)$ の点密度によって逆軌道上の点密度もすべて一意的に決まり, $C(h)$ 上の点密度は 0 になるので, 点密度をもつ KMS state は非常に簡単に決まる. しかし, 一般には $B(h)$ の逆軌道がまた $C(h)$ に戻ることがあり得るので少し複雑になる.

点密度をもつ μ を構成する. $\lambda > N$ とする. $B(h)$ 上の点 z の点密度を δ_z とかく. $\mu'_z = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^i} \sum_{w \in h^{-i}(z)} (\delta_w)$ と置くと, λ の条件によってこの級数は絶対収束する. μ'_z を正規化した確率測度を $\mu^{\{z\}}$ とかく. $B(h) = \{z_1, \ldots, z_p\}$ とする.

Proposition 25. $\mu^{\{z_j\}}$ は条件 *(3), (4)* をみたす.

Proof. $a \in \mathrm{C}$ とする.

$$\mu'_{z_j}(a) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^i} \sum_{w \in h^{-1}(z_j)} a(w)$$

$$\frac{1}{\lambda}\mu'_{z_j}(\tilde{a}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{i+1}} \sum_{w \in h^{-1}(z_j)} \sum_{w' \in h^{-1}(w)} a(w')$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^i} \sum_{w \in h^{-i}(z_j)} a(w)$$

$a(z_j) = 0$ なら $\mu'_{z_j}(\tilde{a}) = \lambda\mu'_{z_j}(a)$ であり, $a \geq 0$ なら, $\mu'_{z_j}(\tilde{a}) \leq \lambda\mu'_{z_j}(a)$ である. □

Proposition 26. $\lambda > N$ のとき, $\hat{\mathrm{C}}$ 上のボレル確率測度 μ で *(3), (4)* をみたすものは $\{\mu^{\{z_i\}},\ (i = 1, \ldots, p)\}$ の凸結合で書ける.

Proof. $B(h)$ の点を頂点とするような向きづけられたグラフを用いて証明する. ただし, この事実は一般論からも従うので, ここでは概略のみ述べる. $B(h)$ の二つの点 z_i と z_j に対して, $h^m(z_i) = z_j$, $(m \geq 1)$ となり, $h^l(z_i) \neq B(h)$, $1 \leq l \leq m-1$ となるとき, z_j から z_i へ辺をかく. $B(h)$ は向きづけられた有限グラフになる. ここで作られたグラフでは, サークルに入る辺はない. また, ある頂点から出た 2 つのパスがまた交わることもない. ただし, $B(h)$ から出た辺がまた $B(h)$ にもどることはある.

$\hat{\mathrm{C}}$ 上の確率測度 μ で (3), (4) をみたすものをとる. $z_j \in B(h)$ がギャップをもつとは, $h(z) = z_j$ となっているときに, $c_\mu(z) < \lambda c_\mu(z_j)$ となることとする. $z_j \in B(h)$ に対して構成した $\mu^{\{z_j\}}$ に対してはギャップをもつ点は, z_j のみである.

ここで, μ が $\{\mu^{\{z_i\}}\}$ $(i=1,\ldots,p)$ の凸結合で書けるという命題を, $B(h)$ において ギャップをもつ点の個数に関する帰納法で証明する. ギャップが1つだけで $z_k \in B(h)$ であるときは, $\mu - \mu^{\{z_k\}}$ は正測度であり, $B(h)$, $C(h)$ でともに点密度をもたない. $\lambda > N$ であるから, $\mu - \mu_{\{z_k\}} = 0$ となり, 命題はなりたつ. ギャップが p 個あるとする. ギャップをもつ点を選び, z_k とする. そのサークル中にないか, 同じサークルの中に他にギャップを持つ点が存在するとする. そのとき, $\mu - (c_\mu(z_k) - (1/\lambda)c_\mu(h(z_k)))\mu^{\{z_k\}}$ は正測度で (3), (4) をみたし, ギャップの数が $p-1$ である. 従ってこの場合は命題がなりたつ. 一方, z_k が長さ 1 のサークルをなすか, 長さ 2 以上のサークルに含まれてサークル中の他の点にギャップがないとする. その場合は, $\mu - (c_\mu(z_k)\mu^{z_k}$ がやはり正測度で (3), (4) をみたし, ギャップの数が $p-1$ である. この場合にも命題は成立する.

$\{\mu^{\{z_i\}}\}$ $(i=1,\ldots,p)$ が線形独立であることが検証できるので, これらが A の確率測度で (3), (4) をみたすものの集合の端点になっていることがわかる. □

$z \in B(h)$ に対して, $\mu^{\{z\}}$ によって決まる $\mathcal{O}_h$ の $\log\lambda$-KMS state を $\varphi^{\{z\}}$ とかく. $z \in B(h)$ が例外点でなければ, 必ず finite type となる.

有理関数 h が例外点をもたない場合は, 以上で KMS-state の分類は終わる. しかし, 例外点をもつ場合には, $\lambda < N$ の場合も考えなければならない. 有理関数の例外点は高々2個であり, 例外点が 2 個の場合は共役の範囲で分類されているので, 個別に調べる.

例外点が 2 つの場合. この場合は 2 とおりある. $h(z) = z^N$ $(N \geq 2)$ のとき, 例外点は 0 と ∞ で, それぞれの軌道は $\{0\}$ と $\{\infty\}$ である.

Proposition 27. *$h(z) = z^N$ $(N \geq 2)$ のとき, $\mu^{\{0\}} = \delta_0$ と $\mu^{\{\infty\}} = \delta_\infty$ はそれぞれ任意の $\lambda \geq 1$ に対して $\log\lambda$-KMS state に拡張される. $\lambda = 1$ のときは infinite type であり, $\lambda > 1$ のときには finite type である.*

Proof. (3) の条件は自明にみたされる. (4) の条件は $c_\mu(0) \leq \lambda c_\mu(0)$ となり, $\lambda \geq 1$ のときに常に成立している. $\lambda = 1$ のときには (4) は等号に, $\lambda > 1$ のときには不等号になる. ∞ の場合も全く同じである. □

例外点が 2 つだが, 互いに移りあう場合. $h(z) = 1/z^N$ $(N \geq 2)$ のとき, 例外点が $0, \infty$ で, $h^{-1}(\infty) = \{0\}$, $h^{-1}(0) = \{\infty\}$ である.

Proposition 28. *$h(z) = 1/z^n$ $(n \geq 2)$ とする. $\lambda \geq 1$ 以上のときに例外点に対応する $\log\lambda$-KMS state の端点を求める.*

$$\mu^{\lambda,1} = \frac{1}{\lambda+1}\delta_0 + \frac{\lambda}{\lambda+1}\delta_\infty$$

と

$$\mu^{\lambda,2} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\delta_0 + \frac{1}{\lambda+1}\delta_\infty$$

とおいて, これらに対応する $\mathcal{O}_h$ の *KMS-state* を $\varphi^{\lambda,1}$, $\varphi^{\lambda,2}$ とするとき, 例外点に対応する $\log\lambda$-*KMS state* はこれらの凸結合であり, δ_0, δ_∞ の係数を座標と考えたときの第一象限の線分に対応する. ただし, $\lambda=1$ のときのみ *inifinite type* になり, 1 点に退化する.

Proof. (4) の条件のみ意味があり, $c_\mu(0)\le\lambda c_\mu(\infty)$ と, $c_\mu(\infty)\le\lambda c_\mu(0)$ になる. これと $c_\mu(0)+c_\mu(\infty)=1$ などをあわせると, 上の表示を得る. □

例外点が 1 個の場合. $h(z)=z^N+1$ $(N\ge 2)$ の場合, $\{\infty\}$ のみが例外点である. 0 は分岐点だが例外点ではない.

Proposition 29. $h(z)=z^N+1$ $(n\ge 2)$ のとき, $\lambda\ge 1$ に対して, $\mu^{\{\infty\}}=\delta_\infty$ が $\log\lambda$-*KMS state* $\varphi^{\{\infty\}}$ に拡張される. $\lambda=1$ のときは *infinite type* で, $\lambda>1$ のときは *finite type* である.

Theorem 30. 有理関数 $h(z)$ によって与えられる複素力学系に付随した C^*- 環のゲージ作用による *KMS-state* の端点は, 次のように分類できる. 以下, $\lambda=e^\beta$ とおく.

1. 例外点がない場合. $\lambda=N$ のときは, *Lyubich* 測度によって決まる *KMS state* φ^L に限る. $\lambda>N$ のときは, 端点は $\{\varphi^{\{z\}}|z\in B(h)\}$ である. $1\le\beta<N$ のときは, *KMS state* は存在しない.
2. 例外点が 1 個で z の場合, $1\le\lambda<N$ のときは, 例外点に対応する *KMS-state* $\varphi^{\{z\}}$ が 1 つのみある. $\lambda=N$ のときは, φ^L と $\varphi^{\{z\}}$ が両方存在する. $\lambda>N$ のときは, $\{\varphi^{\{z\}}|z\in B(h)\}$ である. なお, $\varphi^{\{z\}}$ は $\lambda=1$ のときのみ *inifinite type* で $\lambda>1$ のときは *finite type* である.
3. 例外点が 2 つで z_1 z_2 であり独立している場合. $1\le\lambda<N$ のときは, $\varphi^{\{z_1\}}$ と $\varphi^{\{z_2\}}$ が端点である. $\lambda=N$ のときは, φ^L, $\varphi^{\{z_1\}}$, $\varphi^{\{z_2\}}$ が端点である. $\lambda>N$ のときは, $\varphi^{\{z_1\}}$ と $\varphi^{\{z_2\}}$ が端点である.
4. 例外点が 2 つで互いに関連しているとき. $1\le\lambda<N$ のときは $\varphi^{\lambda,1}$ と $\varphi^{\lambda,2}$ が端点で, $\lambda=N$ のときは, φ^L および $\varphi^{\lambda,1}$, $\varphi^{\lambda,2}$ であり, $\lambda>N$ のときは, $\varphi^{\lambda,1}$, $\varphi^{\lambda,2}$ である.

以上で, 有理関数によって与えられる複素力学系の KMS-state の端点に関する完全分類になっている. なお, 複素力学系の共役類がもっている情報として, 例外点の個数とタイプ, 分岐点の数, 次数 (被覆次元) などが, すべて KMS state の情報から復元できる. 複素力学系から作られる C*-algebra としては, 最初はジュリア集合に制限して考えていた. その場合 simple, purely infinite, nuclear になる. しかし, 複素力学系の力学系的性質を KMS-state に反映させようとすると, むしろリーマン球面 $\hat{C}$ 全体で考える方が適切である.

Remark 5.6. 自己相似写像の場合においても, 有限分岐点条件をつければ同様の分類がなりたつ. ただし, 例外点にあたるものはなく, $\lambda < N$ のときには KMS state はない. また, Lyubich 測度にあたるものは, Huchinson 測度である. 自己相似写像の場合, 複素力学系の場合と比べて, 力学系としての情報をそれほど復元できない.

6 例

6.1 複素力学系から

例 1 $h(z) = z^3$ の場合. これは例外点を 2 個含む典型的な場合である. $\mu^{\{0\}} = \delta_0$, $\mu^{\{\infty\}} = \delta_\infty$ とする. $\mu^{\{0\}}$, $\mu^{\{\infty\}}$ は $\mathcal{O}_h$ の KMS state $\varphi^{\{0\}}$, $\varphi^{\{\infty\}}$ に拡張される.

Proposition 31. *$h(z) = z^3$ から決まる $\mathcal{O}_h$ の KMS state は次のようになる.*

1. *$\lambda = 1$ のときは, $\varphi^{\{0\}}$, $\varphi^{\{\infty\}}$ が端点で, これらは infinite type.*
2. *$1 < \lambda$, $\lambda \neq 3$ のとき, $\varphi^{\{0\}}$, $\varphi^{\{\infty\}}$ が端点で, これらは fnite type.*
3. *$\lambda = 3$ のときは, φ^L と $\varphi^{\{0\}}$, $\varphi^{\{\infty\}}$ が端点. φ^L はトーラスのルベーグ測度で与えられ, (Lyubich measure) infinite type. $\varphi^{\{0\}}$, $\varphi^{\{\infty\}}$ は fnite type.*

例 2 $h(z) = 1/z^3$ の場合.

$$\mu^1 = \frac{1}{\lambda+1}\delta_0 + \frac{\lambda}{\lambda+1}\delta_\infty$$
$$\mu^2 = \frac{\lambda}{\lambda+1}\delta_0 + \frac{1}{\lambda+1}\delta_\infty$$

とおく. μ^i は $\mathcal{O}_h$ の KMS states φ^i に拡張される.

Proposition 32. *$h(z) = 1/z^3$ から決まる $\mathcal{O}_h$ の KMS state は次のようになる.*

1. *$\lambda = 1$ のときは, $\varphi^1 = \varphi^2$ になり, KMS state は唯一つで infinite type.*
2. *$1 < \lambda$, $\lambda \neq 3$ のときは, φ^1 と φ^2 が端点で, ともに finite type.*
3. *$\lambda = 3$ のときは, φ^L, φ^1 と φ^2 が端点. φ^L はトーラスのルベーグ測度で与えられ、infinite type である. φ^L, φ^1 は finit type である.*

∞ が唯一つの例外点であれば多項式であり, 形は決まらない.
例 3 $h(z) = z^2 + 1$ の場合. 例外点は $\{\infty\}$ のみ. 分岐点は $\{0, \infty\}$. $\varphi^{\{\infty\}}$ は例 1 と同じもの. $\varphi_{\{0\}}$ は, 0 の逆軌道上の点密度を重みをつけて寄せ集めたものである.

Proposition 33. *$h(z) = z^2 + 1$ から決まる $\mathcal{O}_h$ の KMS state は次のようになる.*

1. *$\lambda = 1$ のときは, $\varphi^{\{\infty\}}$ のみで, infinite type である.*

2. $1 \leq \lambda < 2$ のときは, $\varphi^{\{\infty\}}$ のみで *finite type* である.

3. $\lambda = 2$ のときは, φ^{L}, $\varphi^{\{\infty\}}$ が端点である. φ^{L} は *infinite type* で $\varphi^{\{\infty\}}$ は *finite type* である.

4. $\lambda > 2$ のときは, $\varphi^{\{\infty\}}$ と $\varphi^{\{0\}}$ が端点で, ともに *finite type* である.

分岐点のようすが複雑な場合の例をあげる. $\lambda > N$ のところのみが変動する.

例 4 $h(z) = (1/18)z^3 - (1/2)z^2 + 6$ とする. $B(h) = \{0, 6, \infty\}$ であり, 例外点は $\{\infty\}$. $e(0) = e(6) = 2$ であり, $h(0) = 6$ かつ, $h(6) = 0$ となっている. $C(\{0,6\})$ 上の tracial state は, $\mu^{c_1,c_2} = c_1\delta_0 + c_2\delta_6$ $(c_i \geq 0)$ と表せる. このとき, c_1 と c_2 の比が λ のもの $(\mu^{\lambda,1})$ と $1/\lambda$ のもの $(\mu^{\lambda,2})$ が端点である. c_i の値は全体を 1 にするように正規化し, $\varphi^{\lambda,i}$ で対応する KMS state を表す.

Proposition 34. *$h(z) = (1/18)z^3 - (1/2)z^2 + 6$ に付随する $\mathcal{O}_h$ の $\lambda > 3$ のときの KMS state は次のようになっている.*
$\varphi^{\{\infty\}}$, $\varphi^{\{\lambda,1\}}$, $\varphi^{\{\lambda,2\}}$ が端点で, finite type である.

例 4 $h(z) = z^2(z-1)^2 + 1$ の場合. この場合, 例外点以外の分岐点は, 0, 1, 1/2 である. 分岐指数はすべて 2 である. $h(0) = 1$, $h(1) = 1$ であり, 1/2 は他の分岐点とは無関係である.

Proposition 35. *$h(z) = z^2(z-1) + 1$ に付随する $\mathcal{O}_h$ の $\lambda > 4$ の場合の例外点 $\{\infty\}$ 以外に対応する KMS state の端点 $\varphi^{\{1/2\}}$, $\varphi^{\{1\}}$, $\varphi^{\{0\}}$ は次のようになっている.*

1. *$\varphi^{\{1/2\}}$ と $\varphi^{\{1\}}$ はそれぞれ 1/2 と 1 の逆軌道の点密度全体を $1/\lambda^i$ の重みをつけて加えたものであり, 分岐点の 1 点のみに点密度をもっている.*

2. *$\varphi^{\{0\}}$ は, 1 にも点密度をもち, 1 の点密度は 0 の点密度の $1/\lambda$ である.*

6.2 自己相似写像から

自己相似写像の例としてもっともわかりやすいものの 1 つは, 区間力学系, すなわち $K = [0,1]$ の場合である.

例 1 の場合, 生成する C^* 環は生成元 2 の Cuntz algebra になることが [20] において示されており, KMS state が存在するのは, $\lambda = 2$ のときに限り, Huchinson measure に対応するものが一意的に存在する.

例 2 の場合は, 分岐点が 1 つあり, 生成元 2 の Cuntz 環ではなく, $\mathcal{O}_\infty$ になることがわかっている.

Proposition 36. *例 2 の KMS state は次のようになる.*

1. *$\lambda = 2$ のときは, φ^{H} のみ存在し, infinite type である.*

2. *$\lambda > 2$ のときは, $\varphi^{\{1/2\}}$ のみ存在し, finit type である.*

ここで,

$$\varphi^{\{1/2\}} = \frac{\lambda-1}{\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^i}\sum_{j_1,\ldots,j_i\in\{1,2\}}\delta_{\gamma_{j_i}\cdots\gamma_{j_1}(1/2)}$$

である.

$K=[0,1]$ で γ が開集合条件をみたすときも同様に, $\lambda=N$ のときは φ^H のみ, $\lambda>N$ のときには,

$$\varphi^{\{x\}} = \frac{\lambda-N}{\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^i}\sum_{j_1,\ldots,j_i\in\{1,\ldots,N\}}\delta_{\gamma_{j_i}\cdots\gamma_{j_1}(x)}$$

とおいて, $\{\varphi^{\{x\}}|x\in B(\gamma)\}$ が $\log\lambda$-KMS state の端点であり, finite type である.

例 3 の Sierpinski gasket の場合. 回転をいれずに自己相似写像を考えると, $\mathcal{O}_3$ になり, KMS state は一意的である. 例 3 の自己相似写像にすると, $B(\gamma)=\{b_1,b_2,b_3\}$ (それぞれ正三角形の各辺の中点) である. $\lambda>3$ として,

$$\varphi^{\{b_k\}} = \frac{\lambda-3}{\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^i}\sum_{j_1,\ldots,j_i\in\{1,2,3\}}\delta_{\gamma_{j_i}\cdots\gamma_{j_1}(b_k)}$$

とおく.

Proposition 37. *$\mathcal{O}_S$ のゲージ作用に関する $\log\lambda$-KMS state は次のようになる.*

1. *$\lambda<3$ のときは, KMS state は存在しない.*
2. *$\lambda=3$ のときには, φ^H のみであり, inifnite type である.*
3. *$\lambda>3$ のときは, $\{\varphi^{\{b_k\}}|k=1,2,3\}$ が KMS state の端点である. これらは fnite type である.*

7 補足

本研究をほぼ完成したあと, 泉正己氏から次のようなコメントがあった [10].

1. N を被覆次元とし, $\beta>\log N$ としたとき, $\mathcal{O}_X$ の finite type KMS state と A/I_X の extreme trace との間の一対一対応が, F の言葉を用いて簡明にかける.
2. finite type KMS state による GNS 表現で生成されるフォンノイマン環は, I 型である.

3. 自己相似写像のハッチンソン測度から与えられる KMS state による GNS 表現から生成されるフォンノイマン環は, $\mathrm{III}_{1/N}$ 型の因子環である. これは, 自己相似写像から決まる力学系が, ハッチンソン測度に関して N-ベルヌイであることより従う.

4. 複素力学系に関しても, N-ベルヌイであることを示す論文が存在する.

5. KMS-stateによる表現からつくられる von Neumann 環の dicrete flow of weight が Markov operator の tail boundary を使って記述できる。

6. Ruell-Perron-Frobenius 作用素 F の形を計算するだけならば, 基底の正確な形までは不要である. よって, 本稿の結果のかなりの部分を, 基底を正確に書き切れていない例まで拡張することが可能になる.

References

[1] Beardon A.F. *Iteration of rational functions* GTM 132, 1991, Springer New York

[2] Exel R., *Crossed-products by finite index endomorphisms and KMS states,* J. Funct. Anal. 199(2003), 153–183

[3] Exel R., *KMS states for generalized gauge actions on Cuntz-Krieger algebras (An application of the Ruelle-Perron-Frobenius Theorem)* [arXiv : math.OA/0110183]

[4] Enomoto M., Fujii M. and Watatani Y., *KMS states for gauge action on O_A,* Math. Japon. 29(1984), 607–619

[5] Exel R. and Laca M., *Partial dynamical systems and the KMS condition,* Commun. Math. Phys., 232(2003), 223–277

[6] Fowler N.J., Muhly P.S. and Raeburn I., *Representations of Cuntz-Pimsner Algebras,* Indiana Univ. Math. J. **52** (2003), 569–605.

[7] Huchchinson J.E., *Fractals and self-similarity,* Indiana Univ. Math. J. 30 (1981), 713–747.

[8] Heicklen D. and Hoffman C., *Rational maps are d-adic Bernuilli,* Annals of Math., 156(2002), 103-114

[9] Hoffman C. and Rudolph, *Uniform endomorphisms wihc are isomorphic to a Bernuouli shift,* Annals of Math., 156(2002), 79-101

[10] Izumi M., *Private communication,*

[11] Kajiwara T. and Watatani Y., *C^*-algebra associated with complex dynamical systems,* to appear in Indiana Univ. Math. J.

[12] Kajiwara T. and Watatani Y., *C^*-algebras associated with self-similar sets* [arXiv : math.OA/0312481]

[13] Kajiwara T. and Watatani Y., *KMS states on C^*-algebras associated with self-similar sets,* [arXiv : math.OA/0405514]

[14] Kerr D. and Pinzari C., *Noncommutative pressure and the variational principle in Cuntz-Krieger-type C^*-algebras.* J. Funct. Anal. 188(2002), 156–215

[15] Kumjian A. and Renalut J., *KMS states on C^*-algebras associated to expansive maps,* [arXiv : math. OA/0305044]

[16] M. Yu. Lyubich, *Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere,* Ergodic Th. & Dynam. Sys. **3** (1983), 351-385.

[17] Laca M. and Neshveyev S., *KMS states of quasi-free dynamics on Pimsner algebras,* J. Funct. Anal. 211(2004) 457–482

[18] Matsumoto K., Watatani Y. and Yoshida M. *KMS-states for gauge action on C^*-algebras associated with subshifts,* Math. Z. 228(1998), 489–509

[19] Olsen D. and Pederson G.K., *Some C^*-dynamical systems with a single KMS state,* Math. Scand. 42(1978), 111–118

[20] Pinzari C., Watatani Y. and Yonetani K. *KMS states, entropy and the variational principle in full C^* -dynamical systems,* Commun. Math. Phys. 213(2000), 331–379

[21] 上田哲生 谷口雅彦 諸澤俊介, 複素力学系序説, 培風館, 1995