数理解析研究所講究録 1419 巻 2005 年 105-125

How many miles to $\beta\omega$? II

嘉田 勝[*][†] (Masaru Kada)
早稲田大学理工学総合研究センター (RISE, Waseda University)

友安 一夫[‡] (Kazuo Tomoyasu)
都城工業高等専門学校 (Miyakonojo National College of Technology)

吉信 康夫[§] (Yasuo Yoshinobu)
名古屋大学 (Nagoya University)

How many miles to Babylon?
Three score miles and ten.
Can I get there by candle-light?
Yes, and back again.
If your heels are nimble and light,
You may get there by candle-light. [*1]

概要

本稿では, "How many miles to $\beta\omega$? — $\beta\omega$ まで何マイル?"[4] の続編として, [4] の発表後に得た種々の結果を紹介する.

---

* 本稿の第 4 節の結果は, 嘉田が 2004 年 11 月 24 日から 12 月 3 日まで神戸大学大学院自然科学研究科新井プロジェクトを訪問した際に得たものです. 訪問を快く受け入れ, 研究推進の機会をくださった新井プロジェクトの皆様に感謝いたします.

† 文部科学省 科学研究費補助金 若手研究 (B) 14740058.

‡ 文部科学省 科学研究費補助金 若手研究 (B) 14740057.

§ 日本学術振興会 科学研究費補助金 基盤研究 (C)(2) 15540115 (研究代表者: 松原 洋).

嘉田 勝: 早稲田大学理工学総合研究センター客員研究員. email kada@math.cs.kitami-it.ac.jp
友安 一夫: 都城工業高等専門学校一般科目. email tomoyasu@cc.miyakonojo-nct.ac.jp
吉信 康夫: 名古屋大学大学院情報科学研究科. email yosinobu@math.nagoya-u.ac.jp

*1 マザーグースの歌 (nursery rhymes, イギリスの伝承童謡) のひとつ. [4, 5, 6] および本稿の表題の由来. 蛇足ながら, [4] を執筆した後に,「表題の由来は『ひょっこりひょうたん島』の劇中歌?」という質問を何度か受けたが,「ひょっこりひょうたん島」の歌もこのマザーグースの歌のパロディである.

1 はじめに — $\beta\omega$ まで何マイル?

1.1 距離依存コンパクト化の族による Stone–Čech コンパクト化の近似

X をコンパクトでない完全正則空間とする．X のコンパクト化[*2] $\alpha X, \gamma X$ について，γX から αX への連続な全射で，X への制限が恒等写像となるものが存在するとき，$\alpha X \leq \gamma X$ と表す．特にその写像が同相写像でとれるとき，$\alpha X \simeq \gamma X$ と表す．X のコンパクト化全体を $\mathsf{Cpt}(X)$ とする．通常，$\mathsf{Cpt}(X)$ の元は $\simeq$ に関する同値類と考え，同値なコンパクト化は区別しないものとする．このとき，$\mathsf{Cpt}(X)$ は $\leq$ 関係について完備上半束をなし，X の Stone–Čech コンパクト化 βX は $\leq$ に関する最大元となる．[*3]

位相空間 X から $\mathbb{R}$ への有界連続関数全体の集合を $C^*(X)$ で表す．$C^*(X)$ は（各点ごとの和と積について）環の構造を持ち，かつ，一様ノルム位相に関する位相環となる．一般に，位相空間 X のコンパクト化 αX について，X から $\mathbb{R}$ への有界連続関数のうち αX 上に連続に拡張できる（すなわち，$\bar{f} \in C^*(\alpha X)$ で，$\bar{f} \restriction X = f$ を満たすものが一意的に存在する）ものの全体を $C_{\alpha X}$ とおくと，$C_{\alpha X}$ は $C^*(X)$ の点と閉集合を分離する閉部分環をなし，定数関数をすべて含む．また，この $C_{\alpha X}$ は αX を生成する $C^*(X)$ の部分集合のうち最大のものである．逆に，定数関数をすべて含み，かつ $C^*(X)$ の点と閉集合を分離する閉部分環 R が与えられたとき，X のコンパクト化 αX で，$C_{\alpha X} = R$ となる，すなわち，αX 上に連続に拡張できる X から $\mathbb{R}$ への有界連続関数の全体がちょうど R と一致するものが存在する．特に，X の Stone–Čech コンパクト化 βX については，すべての $f \in C^*(X)$ が βX 上に連続に拡張できる，すなわち $C_{\beta X} = C^*(X)$ である．

空間 X のコンパクト化 αX と，X の閉集合 A, B に対して，$\mathrm{cl}_{\alpha X} A \cap \mathrm{cl}_{\alpha X} B = \emptyset$ であるときに $A \parallel B$ (αX) と記し，その否定を $A \nparallel B$ (αX) と記す．X が正規空間ならば，$\alpha X \simeq \beta X$ であることと，X の交わらない閉集合 A, B について常に $A \parallel B$ (αX) が成り立つことは，同値である．

ところで，距離化可能空間 X の Stone–Čech コンパクト化 βX については，以下に述べる形で，同じ位相を導く距離に関する Smirnov コンパクト化あるいは Higson コンパクト化の全体で「近似」できることが知られている．

距離空間 (X, d) から $\mathbb{R}$ への（距離 d に関する）有界一様連続関数の全体を $U_d^*(X)$

[*2] 本稿では，単にコンパクト化というとハウスドルフコンパクト化を意味するものとする．

[*3] X が局所コンパクトならば，X の一点コンパクト化が $\leq$ に関する最小元となり，かつ，$(\mathsf{Cpt}(X), \leq)$ は完備束になる．

で表す．$U_d^*(X)$ は $C^*(X)$ の閉部分環で，定数関数をすべて含み，かつ点と閉集合を分離する族である．$U_d^*(X)$ に対応するコンパクト化を u_dX で表し，距離空間 (X,d) の Smirnov コンパクト化という．この定義から明らかに，Smirnov コンパクト化は位相的概念でなく距離に依存する概念である．

距離空間 (X,d) の空でない閉集合 A,B について，$A \parallel B$ (u_dX) と $d(A,B)>0$ が同値であることが知られている [9, Theorem 2.5].

X と同じ位相を導く距離関数の全体を $\mathrm{M}(X)$ で表す．次の定理は，距離化可能空間 X の Stone–Čech コンパクト化 βX は，X と同じ位相を導く距離関数に関する Smirnov コンパクト化の全体で近似できることを意味する．

定理 1.1. [9, Theorem 2.11] X をコンパクトでない距離化可能空間とするとき，$\beta X \simeq \sup\{u_dX : d \in \mathrm{M}(X)\}$ が成り立つ．*4

X 上の距離関数 d がプロパーであるとは，d に関して有界な任意の X の部分集合がコンパクトな閉包をもつときにいう．距離空間 (X,d) がプロパーであるとは，その距離関数 d がプロパーであることを意味する．

プロパーな距離空間 (X,d) について，関数 $f \in C^*(X)$ が（距離 d に関して）slowly oscillating であるとは，任意の $r>0, \varepsilon>0$ に対し，X のコンパクト部分集合 $K_{r,\varepsilon}$ が存在し，すべての $x \in X \setminus K_{r,\varepsilon}$ について $\mathrm{diam}(f''\mathrm{B}_d(x,r))<\varepsilon$ が成り立つときにいう．*5 距離 d に関して slowly oscillating な $C^*(X)$ の元の全体を $C_d^*(X)$ で表す．$C_d^*(X)$ は $C^*(X)$ の閉部分環で点と閉集合を分離する族となる．$C_d^*(X)$ に対応するコンパクト化を $\overline{X}^d$ で表し，(X,d) の Higson コンパクト化という．したがって，Higson コンパクト化はプロパーな距離空間に対してのみ定義され，かつ，距離に依存する概念である．

プロパーな距離空間 (X,d) の空でない部分集合の族 $\{E_0,\ldots,E_{n-1}\}$ が（距離 d に関して）発散するとは，任意の $r>0$ に対して X のコンパクト部分集合 K_r が存在し，すべての $x \in X \setminus K_r$ について $\sum_{i<n} d(x,E_i)>r$ であるときにいう．X の交わらない空でない閉集合 A,B について，$A \parallel B$ $(\overline{X}^d)$ と，$\{A,B\}$ が距離 d に関して発散することが同値であることが知られている [2, Proposition 2.3].

距離化可能空間 X について，X と同じ位相を導くプロパーな距離関数の全体を $\mathrm{PM}(X)$ で表す．局所コンパクトかつ可分な距離化可能空間 X については，$\mathrm{PM}(X) \neq \emptyset$ であることが知られている [7, Lemma 3.1]. Higson コンパクト化による Stone–Čech コンパク

*4 この式における sup は，完備上半束 $(\mathsf{Cpt}(X),\leq)$ における sup $(\bigvee)$ を意味する．以下の文中においても同様である．

*5 おおざっぱに言うと，「遠くに行くほど，値の振れ幅が小さくなる」．

ト化の近似定理は，次の形で述べられる．

定理 1.2. [7, Proposition 3.2] X を，コンパクトでない局所コンパクトかつ可分な距離化可能空間とするとき，$\beta X \simeq \sup\{\overline{X}^d : d \in \mathrm{PM}(X)\}$ である．

1.2 How many "metrics" to $\beta\omega$?

ここで，われわれは，次の一般的な疑問を投げかけた．この問いこそが，一連の研究 [4, 5, 6] の出発点である．

> 距離化可能空間 X の Stone–Čech コンパクト化 βX を Smirnov コンパクト化またはHigson コンパクト化で近似するために，本質的に必要な距離関数の個数はいくつだろうか? — 特に，$\beta\omega$ の場合はどうか?

この疑問を素直に（安直に）数式で表現すると，次の定義が得られる．

定義 1.3. コンパクトでない距離化可能空間 X に対し，基数 $\mathfrak{sa}(X)$ を次式により定義する:

$$\mathfrak{sa}(X) = \min\{|D| : D \subseteq \mathrm{M}(X) \text{ かつ } \beta X \simeq \sup\{u_d X : d \in D\}\}.$$

定義 1.4. コンパクトでない，局所コンパクトかつ可分な距離化可能空間 X に対し，基数 $\mathfrak{ha}(X)$ を次式により定義する:

$$\mathfrak{ha}(X) = \min\{|D| : D \subseteq \mathrm{PM}(X) \text{ かつ } \beta X \simeq \sup\{\overline{X}^d : d \in D\}\}.$$

たとえば，空間として半直線 $[0, \infty)$ を考えると，次の結果が得られる．$\mathfrak{d}$ は dominating number，すなわち，ω^ω における eventually dominating order $\leq^*$ に関して cofinal な集合の最小濃度である．

命題 1.5. [6, Examples 2.3 and 6.4] $\mathfrak{sa}([0,\infty)) = \mathfrak{ha}([0,\infty)) = \mathfrak{d}$.

ところが，この定義のままだと，明らかに $\mathfrak{sa}(\omega) = \mathfrak{ha}(\omega) = 1$ が成り立ってしまう．[*6] もっと一般に，$\mathfrak{sa}(X) = 1$ あるいは $\mathfrak{ha}(X) = 1$ が成り立つ空間 X は，以下の定理によって特徴づけられる．

[*6] d を ω 上の通常の離散距離とすると，$C^*(\omega) = U_d^*(\omega)$ すなわち $\beta\omega \simeq u_d\omega$ である．$\beta\omega \simeq \overline{\omega}^\rho$ を満たす，ω の離散位相を導くプロパーな距離関数 ρ の構成は，読者に任せる．

位相空間 X に対し，X から孤立点を除いてできる部分空間を $X^{(1)}$ で表す．[*7]

定理 1.6. [9, Corollary 3.5] 距離化可能空間 X について，以下は同値である．

1. ある $d \in \mathrm{M}(X)$ について $\beta X \simeq u_d X$ が成り立つ．[*8]
2. $X^{(1)}$ がコンパクトである．

定理 1.7. [7, Proposition 2.6] 局所コンパクトかつ可分な距離化可能空間 X について，以下は同値である．

1. ある $d \in \mathrm{PM}(X)$ について $\beta X \simeq \overline{X}^d$ が成り立つ．
2. $X^{(1)}$ がコンパクトである．

そこで，$\beta\omega$ の Smirnov コンパクト化または Higson コンパクト化による近似についてさらに詳しく分析するために，次の基数不変量を導入する．

定義 1.8. $\mathrm{M}'(X) = \{d \in \mathrm{M}(X) : u_d X \not\simeq \beta X\}$，$\mathrm{PM}'(X) = \{d \in \mathrm{PM}(X) : \overline{X}^d \not\simeq \beta X\}$ と定義する．基数 $\mathfrak{sp}$, $\mathfrak{hp}$ を，次のように定義する：

$$\mathfrak{sp} = \min\left\{ |D| \;\middle|\; \begin{array}{c} D \subseteq \mathrm{M}'(\omega), \forall F \in [D]^{<\aleph_0} \left(\sup\{u_d\omega : d \in F\} \not\simeq \beta\omega\right) \\ \text{かつ } \sup\{u_d\omega : d \in D\} \simeq \beta\omega \end{array} \right\},$$

$$\mathfrak{hp} = \min\left\{ |D| \;\middle|\; \begin{array}{c} D \subseteq \mathrm{PM}'(\omega), \forall F \in [D]^{<\aleph_0} \left(\sup\{\overline{\omega}^d : d \in F\} \not\simeq \beta\omega\right) \\ \text{かつ } \sup\{\overline{\omega}^d : d \in D\} \simeq \beta\omega \end{array} \right\}.$$

定義 1.9. $d_1, d_2 \in \mathrm{M}(X)$ に対し，$u_{d_1}X \leq u_{d_2}X$ であるとき，$d_1 \preceq d_2$ と表す．[*9] 同様に，$d_1, d_2 \in \mathrm{PM}(X)$ に対し，$\overline{X}^{d_1} \leq \overline{X}^{d_2}$ であるとき，$d_1 \trianglelefteq d_2$ と表す．

基数 $\mathfrak{sp}'$, $\mathfrak{hp}'$, $\mathfrak{st}$, $\mathfrak{ht}$ を次のように定義する：

$$\mathfrak{sp}' = \min\left\{ |D| \;\middle|\; \begin{array}{c} D \subseteq \mathrm{M}'(\omega),\ D \text{ は } \preceq \text{ に関して有向で,} \\ \text{かつ } \sup\{u_d\omega : d \in D\} \simeq \beta\omega \end{array} \right\};$$

---

*7 一般に，位相空間 X と順序数 α に対し，孤立点を除去する操作を α 回繰り返して（limit step では共通部分をとる）得られる空間を X の α-th Cantor–Bendixson derivative と呼び，$X^{(\alpha)}$ で表す．

*8 距離空間 (X,d) は，X 上の実数値連続関数が常に d に関して一様連続である（すなわち，$C(X) = U_d(X)$ が成り立つ）とき，UC-space または Atsuji space と呼ばれる．この条件は，$C^*(X) = U_d^*(X)$，すなわち $\beta X \simeq u_d X$ と同値である．UC-space の特徴づけは古くから研究されていて，多くの同値条件が知られている．

*9 これは，X 上の恒等写像が (X, d_2) から (X, d_1) への一様連続関数になっていることと同値である．

$$\mathfrak{hp}' = \min\left\{ |D| \;\middle|\; \begin{array}{c} D \subseteq \mathrm{PM}'(\omega),\ D \text{ は } \trianglelefteq \text{ に関して有向で,} \\ \text{かつ } \sup\{\overline{\omega}^d : d \in D\} \simeq \beta\omega \end{array} \right\},$$

$$\mathfrak{st} = \min\left\{ |D| \;\middle|\; \begin{array}{c} D \subseteq \mathrm{M}'(\omega),\ D \text{ は } \preceq \text{ で整列されていて,} \\ \text{かつ } \sup\{u_d\omega : d \in D\} \simeq \beta\omega \end{array} \right\},$$

$$\mathfrak{ht} = \min\left\{ |D| \;\middle|\; \begin{array}{c} D \subseteq \mathrm{PM}'(\omega),\ D \text{ は } \trianglelefteq \text{ で整列されていて,} \\ \text{かつ } \sup\{\overline{\omega}^d : d \in D\} \simeq \beta\omega \end{array} \right\}.$$

ただし，$\min\emptyset = \infty$ と定め，すべての基数 κ について $\kappa < \infty$ と規約する．

定義から明らかに，$\mathfrak{sp} \leq \mathfrak{sp}' \leq \mathfrak{st}$，$\mathfrak{hp} \leq \mathfrak{hp}' \leq \mathfrak{ht}$ である．[4] では，これらの基数について，次の結果を導いた．$\mathsf{cov}(\mathcal{M})$, $\mathsf{cov}(\mathcal{N})$ はそれぞれ，実数直線を被覆するために必要なベール第一類集合，ルベーグ零集合の最小の個数を表す．$\mathfrak{u}$ は ω 上の nonprincipal ultrafilter を生成する $\mathcal{P}(\omega)$ の部分集合の最小濃度を表す．$\mathfrak{c}$ は連続体濃度である．

定理 1.10. 1. [4, 命題 4.3] $\max\{\mathsf{cov}(\mathcal{M}), \mathsf{cov}(\mathcal{N})\} \leq \mathfrak{sp}'$.
2. [4, 命題 6.12] $\max\{\mathsf{cov}(\mathcal{M}), \mathsf{cov}(\mathcal{N})\} \leq \mathfrak{hp}'$.
3. [4, 命題 5.3] $\mathfrak{sp}' \leq \mathfrak{u}$.
4. [4, 系 5.7] Martin's axiom のもとでは $\mathfrak{st} = \mathfrak{c}$ が成り立つ．
5. [4, 命題 5.10, 命題 6.15] $\mathfrak{st} = \mathfrak{ht} = \infty$ を満たす ZFC のモデルが存在する．

さらに，[6] では次の定理を証明した．基数 $\mathfrak{l}$ の定義は次節で述べる．

定理 1.11. 1. [6, Corollary 3.7] $\max\{\mathsf{cov}(\mathcal{M}), \mathsf{cov}(\mathcal{N})\} \leq \mathfrak{sp}$.
2. [6, Corollary 6.10] $\max\{\mathsf{cov}(\mathcal{M}), \mathsf{cov}(\mathcal{N})\} \leq \mathfrak{hp}$.
3. [6, Theorem 4.3] $\mathfrak{sp}' \leq \mathfrak{l}$.
4. [6, Theorem 6.11] $\mathfrak{hp}' \leq \mathfrak{l}$.

ところで，$\mathfrak{st}$ については，$\mathfrak{st} < \infty$, $\mathfrak{st} = \infty$ の両方が ZFC 上無矛盾であることが [4] の時点で明らかになっていた．しかし，$\mathfrak{ht}$ については，$\mathfrak{ht} = \infty$ の無矛盾性は証明されていたが，$\mathfrak{ht} < \infty$ の無矛盾性は示されていなかった．*10 そこで，本稿の第 2 節で，$\mathfrak{ht} < \infty$ が ZFC 上無矛盾であることを証明する．

第 3 節以降は，$\beta\omega$ を離れ，一般の距離空間 X に対する $\mathfrak{sa}(X)$, $\mathfrak{ha}(X)$ を考える．

*10 著者らの不注意である．実は，[6] を投稿した時点で，$\mathfrak{ht} < \infty$ の無矛盾性証明が未解決であることに気づいていなかった．気づいていれば，当然その時点で証明を試みただろう．

まず，第 3 節では，X が局所コンパクトかつ可分であれば，$\mathfrak{sa}(X)$, $\mathfrak{ha}(X)$ の値は，1 でない場合は常に $\mathfrak{d}$ であることを示す．特に，$\mathfrak{ha}(X)$ が定義されるのは X が局所コンパクトかつ可分の場合に限られるので，$\mathfrak{ha}(X)$ のとりうる値は $\mathfrak{d}$ または 1 に限られることがわかる．しかし，$\mathfrak{sa}(X)$ についてはこの限りではない．実際，X が可分でない場合には，$\mathfrak{sa}(X)$ は（$\mathfrak{d}$ 以上の）いくらでも大きい値をとりうることを示す．

第 4 節では，X が可分だが局所コンパクトでない場合に，$\mathfrak{sa}(X)$ がどのように特徴付けられるかを論じる．

1.3 To $\beta\omega$, or not to $\beta\omega$: that is the question.

$\mathfrak{sp}$, $\mathfrak{hp}$ などの基数に関して，本稿執筆時点で，以下の問題が未解決である．

問題 1.12. $\mathfrak{sp} = \mathfrak{sp}'$?　$\mathfrak{hp} = \mathfrak{hp}'$?

問題 1.13. $\mathfrak{hp}' \leq \mathfrak{u}$?

問題 1.14. $\mathfrak{sp}$ と $\mathfrak{hp}$（$\mathfrak{sp}'$ と $\mathfrak{hp}'$，$\mathfrak{st}$ と $\mathfrak{ht}$）の間の関係は?

2 $\beta\omega$ への階段

$\mathcal{S} = \prod_{n<\omega}[\omega]^{\leq n+1}$ と定義する．$\mathcal{S}$ の各々の元を**スラローム**と呼ぶ．スラローム $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ に対し，$\varphi \sqsubseteq \psi$ で，有限個を除くすべての $n < \omega$ について $\varphi(n) \subseteq \psi(n)$ であることを表す．関数 $f \in \omega^\omega$ についても，f をスラローム $\langle \{f(n)\} : n < \omega \rangle$ と同一視し，$f \sqsubseteq \varphi$ という記法を導入する．

すべての $n < \omega$ について $h(n) > n+1$ を満たす関数 $h \in \omega^\omega$ に対し，$\mathcal{S}$ の部分集合 $\mathcal{S}_h$ を，$\mathcal{S}_h = \prod_{n<\omega}[h(n)]^{\leq n+1}$ により定義する．

関数 $H \in \omega^\omega$ を，$H(n) = 2^{2^{(n+1)^2}}$ によって定義する．

このとき，[6, Theorem 6.11] の系として，$\mathfrak{ht}$ に関する次の結果が得られる．

命題 2.1. 次の性質を満たす，$\mathcal{S}_H$ に属するスラロームたちからなる長さ θ の列 $\langle \varphi_\xi : \xi < \theta \rangle$ が存在するならば，$\mathfrak{ht} \leq \theta$ である．

1. $\xi < \eta < \theta$ ならば $\varphi_\xi \sqsubseteq \varphi_\eta$ である．
2. すべての $f \in \prod_{n<\omega} H(n)$ に対し，ある $\xi < \theta$ が存在し，$f \sqsubseteq \varphi_\xi$ が成り立つ．

本節では，この補題を用いて，$\mathfrak{ht} < \infty$ が無矛盾である，すなわち，ω の Higson コンパクト化の上昇列の上限は $\beta\omega$ に到達しうることを証明する．

$\varphi \in \mathcal{S}$ が $\lim_{n\to\infty} \frac{|\varphi(n)|}{n+1} = 0$ を満たすとき，φ を細いスラロームと呼ぶことにする．$\mathcal{S}$, $\mathcal{S}_h$ に属する細いスラローム全体の集合をそれぞれ $\mathcal{S}'$, $\mathcal{S}'_h$ で表す．

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$ および $\mathcal{X} \subseteq \omega^\omega$ に対し，

$$\mathsf{add}(\mathcal{A}) = \min\{|\Phi| : \Phi \subseteq \mathcal{A} \text{ かつ } \forall\psi \in \mathcal{A}\, \exists\varphi \in \Phi\, (\varphi \not\sqsubseteq \psi)\},$$

$$\mathsf{cov}(\mathcal{A}; \mathcal{X}) = \min\{|\Phi| : \Phi \subseteq \mathcal{A} \text{ かつ } \forall f \in \mathcal{X}\, \exists\varphi \in \Phi\, (f \sqsubseteq \varphi)\},$$

$$\mathsf{non}(\mathcal{A}; \mathcal{X}) = \min\{|F| : F \subseteq \mathcal{X} \text{ かつ } \forall\psi \in \mathcal{A}\, \exists f \in F\, (f \not\sqsubseteq \psi)\}$$

と定義する．

命題 2.2. $\mathsf{add}(\mathcal{S}'_H) = \mathsf{cov}(\mathcal{S}'_H; \prod_{n<\omega} H(n)) = \kappa$ ならば，$\mathfrak{ht} \leq \kappa$ である．

証明．$\mathsf{cov}(\mathcal{S}'_H; \prod_{n<\omega} H(n)) = \kappa$ より，$\{\varphi_\xi : \xi < \kappa\} \subseteq \mathcal{S}'_H$ を，すべての $f \in \prod_{n<\omega} H(n)$ に対してある $\xi < \kappa$ が $f \sqsubseteq \varphi_\xi$ を満たすように選ぶ．さらに，$\mathsf{add}(\mathcal{S}'_H) = \kappa$ を用いて，$\{\psi_\xi : \xi < \kappa\} \subseteq \mathcal{S}'_H$ を，

1. 各 $\xi < \kappa$ について $\varphi_\xi \sqsubseteq \psi_\xi$,
2. $\xi < \eta < \kappa$ ならば $\psi_\xi \sqsubseteq \psi_\eta$

を満たすように，帰納的に構成できる．$\{\psi_\xi : \xi < \kappa\}$ に対して命題 2.1 を適用せよ． □

ところで，基数 $\mathsf{add}(\mathcal{N})$（ルベーグ測度の加法性が崩れる最小の基数）について，$\mathsf{add}(\mathcal{N}) = \mathsf{non}(\mathcal{S}, \omega^\omega)$ という特徴づけが知られている [1, Theorem 2.3.9]．また，[3] では，基数 $\mathfrak{l}$ を，$\mathfrak{l} = \sup\{\mathsf{cov}(\mathcal{S}_h; \prod_{n<\omega} h(n)) : h \in \omega^\omega\}$ によって定義している．

$\mathfrak{b}$ は unbounding number，すなわち，eventually dominating order $\leq^*$ に関して有界でない ω^ω の部分集合の最小濃度である．

補題 2.3. $\mathsf{add}(\mathcal{S}') = \mathsf{non}(\mathcal{S}; \omega^\omega)$.

証明．$\mathsf{add}(\mathcal{S}') \leq \mathsf{non}(\mathcal{S}'; \omega^\omega) \leq \mathsf{non}(\mathcal{S}; \omega^\omega)$ は明らか．$\mathsf{non}(\mathcal{S}; \omega^\omega) \leq \mathsf{add}(\mathcal{S}')$ を示す．

$\varphi \in \mathcal{S}'$ に対し，$\chi_\varphi \in \omega^\omega$ を，

$$\chi_\varphi(m) = \min\left\{l < \omega : \forall n \geq l\ \left(|\varphi(n)| \leq \frac{n+1}{m+1}\right)\right\}$$

によって定義する．φ は細いスラロームなので，χ_φ は well-defined である．

$\kappa < \mathrm{non}(\mathcal{S};\omega^\omega)$ とし，$\mathcal{S}'$ の濃度 κ の部分集合 Φ を任意にとる．明らかに $\mathrm{non}(\mathcal{S};\omega^\omega) \leq \mathfrak{b}$ すなわち $|\Phi| < \mathfrak{b}$ なので，$g \in \omega^\omega$ を，すべての $\varphi \in \Phi$ について $\chi_\varphi \leq^* g$ を満たすようにとることができる．さらに g は狭義単調増加であるとしてよい．$m < \omega$ に対し，$I_m = \{g(m^2), g(m^2)+1, \ldots, g((m+1)^2)-1\}$ とおき，

$$\prod_{n \in I_m} [\omega]^{\leq \left\lfloor \frac{n+1}{m^2+1} \right\rfloor} = \{s_{m,i} : i < \omega\}$$

と数え上げる（$\lfloor r \rfloor$ は r を超えない最大の整数を表す）．

$\varphi \in \Phi$ に対し，$\tilde{\varphi} \in \omega^\omega$ を次のように定義する: 各 $m < \omega$ に対し，すべての $n \in I_m$ について $|\varphi(n)| \leq \frac{n+1}{m^2+1}$ ならば，$\tilde{\varphi}(m) = i \iff \varphi \restriction I_m = s_{m,i}$ と定め，そうでなければ，$\tilde{\varphi}(m) = 0$ とする．ここで，g の選び方と I_m の定義により，各 $\varphi \in \Phi$ に対し，有限個を除くすべての $m < \omega$ について $\tilde{\varphi}(m)$ は前者によって定義されることに注意せよ．

$|\Phi| = \kappa < \mathrm{non}(\mathcal{S};\omega^\omega)$ であるから，$\psi \in \mathcal{S}$ を，すべての $\varphi \in \Phi$ について $\tilde{\varphi} \sqsubseteq \psi$ を満たすように選ぶ．$\bar{\psi}$ を，$m < \omega, n \in I_m$ に対して $\bar{\psi}(n) = \bigcup\{s_{m,i}(n) : i \in \psi(m)\}$ とおくことにより定義する（ただし，$n < g(0)$ ならば $\bar{\psi}(n) = \emptyset$ とする）．このとき，$m < \omega$, $n \in I_m$ に対し，

$$\frac{|\bar{\psi}(n)|}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n+1}{m^2+1} \cdot (m+1) = \frac{m+1}{m^2+1}$$

である．これは $n \to \infty$ で 0 に収束する．ゆえに，$\bar{\psi}$ は細いスラロームである．さらに，$\tilde{\varphi}$ の定義と ψ の選び方により，すべての $\varphi \in \Phi$ について $\varphi \sqsubseteq \bar{\psi}$ が成り立つ．

したがって，$\kappa < \mathrm{add}(\mathcal{S}')$ である． □

補題 2.4. 任意の $h_1 \in \omega^\omega$ に対し，$\mathrm{cov}(\mathcal{S}'_{h_1}; \prod_{n<\omega} h_1(n)) \leq \mathrm{cov}(\mathcal{S}_{h_2}; \prod_{n<\omega} h_2(n))$ を満たす $h_2 \in \omega^\omega$ が存在する．したがって，$\mathfrak{l} = \sup\{\mathrm{cov}(\mathcal{S}'_h; \prod_{n<\omega} h(n)) : h \in \omega^\omega\}$ である．

証明. 読者に任せる． □

補題 2.5. $\aleph_1 \leq \mathrm{add}(\mathcal{N}) \leq \mathrm{add}(\mathcal{S}'_H) \leq \mathrm{cov}(\mathcal{S}'_H; \prod_{n<\omega} H(n)) \leq \mathfrak{l}$.

証明. 補題 2.3 と $\mathrm{add}(\mathcal{N})$ の特徴づけにより $\mathrm{add}(\mathcal{N}) = \mathrm{add}(\mathcal{S}')$．$\mathrm{add}(\mathcal{S}') \leq \mathrm{add}(\mathcal{S}'_H)$ は易しい．その他の不等号は明らか． □

定理 1.11 より，$\mathrm{add}(\mathcal{N}) \leq \mathrm{cov}(\mathcal{N}) \leq \mathfrak{hp} \leq \mathfrak{ht}$ が成り立つ．したがって，命題 2.2 および補題 2.5 より，$\mathrm{add}(\mathcal{N}) = \mathfrak{l} = \kappa$ ならば $\mathfrak{ht} = \kappa$ である．そして，$\mathrm{add}(\mathcal{N}) = \mathfrak{l}$ を満たす ZFC のモデルは数多く知られている．

系 2.6. Martin's axiom のもとでは $\mathfrak{ht} = \mathfrak{c}$ が成り立つ．

系 2.7. $\mathbf{V}$ を CH を満たす ZFC のモデル，$\mathbb{P}$ を，Laver property [1, Definition 6.3.27] を満たす proper forcing notion とする．このとき，$\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ において $\mathfrak{ht} = \aleph_1$ が成り立つ．特に，$\mathbb{M}_{\omega_2}$ を Mathias forcing [1, Subsection 7.4.A] の長さ ω_2 の countable support iteration とすると，$\mathbf{V}^{\mathbb{M}_{\omega_2}}$ において $\aleph_1 = \mathfrak{ht} < \mathfrak{b} = \mathfrak{c} = \aleph_2$ が成り立つ．

証明. Laver property の定義から明らかに，$\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ において $\mathfrak{l} = \aleph_1$ が成り立つ．$\mathbb{M}_{\omega_2}$ は Laver property をもち，かつ，$\mathbf{V}^{\mathbb{M}_{\omega_2}}$ で $\mathfrak{b} = \mathfrak{c} = \aleph_2$ が成り立つことが知られている．□

なお，本節の結果は，$\mathfrak{ht}$ を $\mathfrak{st}$ で置き換えてもそのまま成り立つ（[6, Theorem 4.3] の系として命題 2.1 の $\mathfrak{st}$ 版が得られる）．[6] で構成した $\mathfrak{st} < \infty$ のモデルでは常に $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{st}$ が成立していたが，系 2.7 の $\mathfrak{st}$ 版を考えることにより，$\mathfrak{st} < \mathfrak{b}$ が無矛盾であることが新たに示されたことになる．

3 βX まで何マイル?

本節では，一般の距離化可能空間 X について，$\mathfrak{sa}(X)$, $\mathfrak{ha}(X)$ のとりうる値を調べる．以下の議論のために，$\mathfrak{sa}(X)$ の定義を次のように変形しておくと便利である．*11

補題 3.1. $\mathfrak{sa}(X)$ は，次の性質を満たす $\mathrm{M}(X)$ の部分集合 D の最小濃度と一致する:

> X の空でない閉集合 A, B に対し，$A \cap B = \emptyset$ ならば，ある $d \in D$ について $d(A, B) > 0$ である．

証明. D が補題の性質を満たせば $\beta X \simeq \sup\{u_d X : d \in D\}$ が成り立つことは明らか．

D が $\beta X \simeq \sup\{u_d X : d \in D\}$ を満たすとする．距離関数の和を「2 変数関数としての各点ごとの和」で定義し，D に属する距離関数の有限和の全体を D' とする．$|D| = 1$ または $|D| \geq \aleph_0$ ならば $|D'| = |D|$ である．D' が補題の性質を満たすことと，一般に $\mathfrak{sa}(X)$ が 2 以上の自然数の値をもたないことを示せばよいが，それは読者に任せる．□

3.1 $\mathfrak{d}$ マイル，でなけりゃたったの 1 センチ

まず，X が局所コンパクトかつ可分な距離化可能空間の場合，$X^{(1)}$ がコンパクトでない限りは常に $\mathfrak{sa}(X) = \mathfrak{ha}(X) = \mathfrak{d}$ が成り立つことを示す．特に，$\mathfrak{ha}(X)$ は X が局所コ

*11 $\mathfrak{sa}(X)$ の定義をこう書き換えると，見かけ上，コンパクト化の概念が一切消えてしまう．したがって，「より単純な概念だけで議論できるので便利になった」と同時に，「当初の問題意識から離れて，別の見方で再定義された」ともいえる．

ンパクトかつ可分な場合にのみ定義されるので，$\mathfrak{ha}(X)$ のとりうる値は $\mathfrak{d}$ か 1 のどちらかである．

$\mathfrak{sa}(X) \leq \mathfrak{ha}(X)$ は（両方が定義されている限り）常に成り立つので，$X^{(1)}$ がコンパクトでないと仮定して，$\mathfrak{sa}(X) \geq \mathfrak{d}$ と $\mathfrak{ha}(X) \leq \mathfrak{d}$ を証明すれば十分である．

まず，$\mathfrak{sa}(X) \geq \mathfrak{d}$ を証明する．この証明に関しては，X が局所コンパクトかつ可分であるという仮定は不要である．

補題 3.2. X を距離化可能空間とする．$X^{(1)}$ がコンパクトでなければ，$\mathfrak{sa}(X) \geq \mathfrak{d}$ である．

証明．$X^{(1)}$ はコンパクトでないので，集積点を持たない $X^{(1)}$ の可算部分集合 A が存在する．特に，この A は X の閉集合である．$A = \{a_n : n < \omega\}$ と数え上げる．

主張 1. $n < \omega$ に対し，a_n の近傍 U_n と，$U_n \setminus \{a_n\}$ の中の点列 $\langle b_{n,i} : i < \omega \rangle$ を，次の性質を満たすようにとれる．

1. 各 $n < \omega$ について，点列 $\langle b_{n,i} : i < \omega \rangle$ は a_n に収束する．
2. $n < m < \omega$ ならば $U_n \cap U_m = \emptyset$ である．
3. どんな $f \in \omega^\omega$ についても，集合 $B_f = \{b_{n,f(n)} : n < \omega\}$ は集積点を持たない．

証明．読者に任せる． □

$\kappa < \mathfrak{d}$ とし，$\mathrm{M}(X)$ の濃度 κ の部分集合 D を任意にとる．補題 3.1 により，すべての $d \in D$ について $d(A, B) = 0$ を満たす，X の交わらない閉集合 A, B を見つければ十分である．

$d \in D$ に対し，$g_d \in \omega^\omega$ を，$n < \omega$ に対して

$$g_d(n) = \min\left\{m < \omega : \forall i \geq m \ \left(d(a_n, b_{n,i}) < \tfrac{1}{n+1}\right)\right\}$$

とおくことにより定義する．$|D| = \kappa < \mathfrak{d}$ だから，$f \in \omega^\omega$ を，すべての $d \in D$ に対して $f \not\leq^* g_d$ であるように選べる．この f について，$B = B_f = \{b_{n,f(n)} : n < \omega\}$ とおく．すると，B は A と交わらない X の閉集合である．さらに，f の選び方から，すべての $d \in D$ について $d(A, B) = 0$ である． □

$\mathfrak{ha}(X) \leq \mathfrak{d}$ の証明に移ろう．以下の議論は，ちょうど，定理 1.2 の [7] における証明の改良になっている．

記法を簡単にするため，以下の補題および証明において，$n = -1, -2, \ldots$ に対して $C_n = K_n = \emptyset$ と約束する．

補題 3.3. X を正規空間とし，X の閉集合の列 $\langle C_n : n < \omega \rangle$ が，すべての $n < \omega$ について $C_n \subseteq \operatorname{int} C_{n+1}$，かつ $X = \bigcup\{C_n : n < \omega\}$ を満たすとする．このとき，任意の負でない実数の上昇列 $\langle r_n : n < \omega \rangle$ に対し，X から $[0, \infty)$ への連続関数 φ を，すべての $n < \omega$ について $\varphi''(C_n \setminus \operatorname{int} C_{n-1}) \subseteq [r_n, r_{n+1}]$ をみたすように構成できる．

証明．読者に任せる． □

X を局所コンパクトかつ可分な距離化可能空間とする．このとき，X は σ-コンパクトだから，X のコンパクト部分集合の列 $\langle K_n : n < \omega \rangle$ を，各 $n < \omega$ について $K_n \subseteq \operatorname{int} K_{n+1}$ で，かつ $X = \bigcup\{K_n : n < \omega\}$ を満たすようにとれる．

補題 3.4. (X, d) を局所コンパクトかつ可分な距離空間とし，$\langle K_n : n < \omega \rangle$ を，X のコンパクト部分集合の列で，各 $n < \omega$ について $K_n \subseteq \operatorname{int} K_{n+1}$，かつ $X = \bigcup\{K_n : n < \omega\}$ を満たすものとする．このとき，任意の $g \in \omega^\omega$ に対し，次の性質を満たすプロパーな距離関数 d_g が存在する:

1. d_g は X と同じ位相を導く．
2. 任意の $n < \omega$ と $x, y \in X \setminus K_{n-1}$ について $d_g(x, y) \geq g(n) \cdot d(x, y)$ が成り立つ．
3. 各 $n < \omega$ について $d_g(K_{n-1}, X \setminus K_n) \geq n$ が成り立つ．

証明．各 $n < \omega$ に対し，$R_n = \max\{n, \operatorname{diam}_d(K_n)\}$ とおく．$\langle K_n : n < \omega \rangle$ と $\langle R_n : n < \omega \rangle$ に対して補題 3.3 を適用して得られる X から $[0, \infty)$ への連続関数を c とする．

g は単調増加かつ $g(0) \geq 1$ としてよい．$[0, \infty)$ から $[1, \infty)$ への連続な単調増加関数 f を，すべての $n < \omega$ について $f(\frac{n}{2}) \geq g(n)$ を満たすようにとる．$s \in [0, \infty)$ に対し，

$$F(s) = \int_0^s f(t)dt$$

とおく．$X \times X$ から $[0, \infty)$ への関数 ρ, ρ'_g を，次のように定義する:

$$\rho(x, y) = \max\{|c(x) - c(y)|, d(x, y)\},$$

$$\rho'_g(x, y) = f(\max\{c(x), c(y)\}) \cdot \rho(x, y).$$

このとき，ρ が X の位相を導くプロパーな距離関数であることは容易にわかる．しかし，ρ'_g は X 上の距離関数とは限らない．ρ'_g は一般には三角不等式を満たさないからである．

そこで，$X \times X$ から $[0,\infty)$ への関数 ρ_g を，次のように定義する[*12]:

$$\rho_g(x,y) = \inf\{\rho'_g(x,z_0) + \cdots + \rho'_g(z_i,z_{i+1}) + \cdots + \rho'_g(z_{l-1},y) :\\ l<\omega \text{ かつ } z_0,\ldots,z_{l-1}\in X\}.$$

このように ρ_g を定めれば，それが三角不等式を満たすことは明らかである．また，ρ_g の対称性は定義から明らかである．

一般に，$\rho'_g(x,y) \geq f(\max\{c(x),c(y)\}) \cdot |c(x)-c(y)| \geq |F(c(x)) - F(c(y))|$ が成り立つ．したがって，

$$\begin{aligned}&\rho'_g(x,z_0) + \cdots + \rho'_g(z_{l-1},y)\\ &\geq |F(c(x)) - F(c(z_0))| + \cdots + |F(c(z_{l-1})) - F(c(y))|\\ &\geq |F(c(x)) - F(c(y))|\end{aligned}$$

により，$\rho_g(x,y) \geq |F(c(x)) - F(c(y))|$ が成り立つ．

主張 1. $x,y \in X$ および $n<\omega$ について，$x,y \in X \setminus K_{n-1}$ ならば $\rho_g(x,y) \geq f(\frac{n}{2}) \cdot d(x,y) \geq g(n) \cdot d(x,y)$ である．

証明. 次のように仮定してよい: $c(x) = r \geq s = c(y)$，ある $m \geq n$ について $x \in K_m \setminus K_{m-1}$ かつ $y \in K_m$．c の定義によって，$s \geq n$ が成り立つ．f は単調増加なので，任意の $l<\omega$, $z_0,\ldots,z_{l-1} \in X$ について $\rho'_g(x,z_0) + \cdots + \rho'_g(z_{l-1},y) \geq f(\frac{s}{2}) \cdot d(x,y)$ が成り立つことを示せば十分である．

Case 1. すべての $i<l$ について $c(z_i) > \frac{s}{2}$ である場合.

f が単調増加であることと，ρ'_g の定義により，

$$\begin{aligned}\rho'_g(x,z_0) + \cdots + \rho'_g(z_{l-1},y) &> f(\tfrac{s}{2}) \cdot (\rho(x,z_0) + \cdots + \rho(z_{l-1},y))\\ &\geq f(\tfrac{s}{2}) \cdot \rho(x,y)\\ &\geq f(\tfrac{s}{2}) \cdot d(x,y)\end{aligned}$$

が成り立つ．

Case 2. ある $i<l$ について $c(z_i) \leq \frac{s}{2}$ である場合.

$$\begin{aligned}\rho'_g(x,z_0) + \cdots + \rho'_g(z_{i-1},z_i) \geq \rho_g(x,z_i) \geq F(c(x)) - F(c(z_i)),\\ \rho'_g(z_i,z_{i+1}) + \cdots + \rho'_g(z_{l-1},y) \geq \rho_g(z_i,y) \geq F(c(y)) - F(c(z_i))\end{aligned}$$

[*12] 要するに，x と y を結ぶあらゆる「折れ線」について，ρ'_g によってその「長さ」を測り，それらの下限を $\rho_g(x,y)$ と定めるのである．

が成り立っている．したがって，

$$\begin{aligned}\rho'_g(x,z_0)+\cdots+\rho'_g(z_{l-1},y) &\geq (F(r)-F(c(z_i)))+(F(s)-F(c(z_i)))\\ &\geq (F(r)-F(\tfrac{s}{2}))+(F(s)-F(\tfrac{s}{2}))\\ &\geq (r-\tfrac{s}{2})f(\tfrac{s}{2})+\tfrac{s}{2}f(\tfrac{s}{2})\\ &= rf(\tfrac{s}{2})\end{aligned}$$

となる．一方，$x,y\in K_m$ かつ $r=c(x)\geq \operatorname{diam}_d K_m$ だから，$d(x,y)\leq r$ である．したがって，

$$\rho'_g(x,z_0)+\cdots+\rho'_g(z_{l-1},y)\geq f(\tfrac{s}{2})\cdot d(x,y)$$

が成り立つ． □

ρ_g は対称でかつ三角不等式を満たすのだった．すべての $s\in[0,\infty)$ について $f(s)\geq 1$ なのだから，主張 1 によって，ρ_g は X 上の距離関数となる．さらに，$\rho_g\geq\rho$ かつ ρ はプロパーな距離関数だから，ρ_g もプロパーな距離関数である．ρ_g が (X,d) と同じ位相を導くことは容易にわかる．

最後に，この ρ_g をもとに d_g を定義する．δ を，$\langle K_n : n<\omega\rangle$ と $\langle n^2 : n<\omega\rangle$ に補題 3.3 を適用して得られる X から $[0,\infty)$ への連続関数とする．このとき，$n<\omega$, $x\in K_{n-1}$, $y\in X\setminus K_n$ に対して $\delta(y)-\delta(x)\geq n$ が成り立つ．d_g を，$x,y\in X$ に対して $d_g(x,y)=\max\{|\delta(x)-\delta(y)|,\rho_g(x,y)\}$ とおくことにより定義する．こうすると，d_g は補題のすべての条件を満たす． □

補題 3.5. 局所コンパクトかつ可分な距離化可能空間 X に対し，$\mathfrak{ha}(X)\leq\mathfrak{d}$ が成り立つ．

証明．X の位相を導く距離関数 d を固定する．X のコンパクト集合の列 $\langle K_n : n<\omega\rangle$ を，補題 3.4 の条件に合致するように選ぶ．各 $g\in\omega^\omega$ に対し，d_g を，(X,d), $\langle K_n : n<\omega\rangle$ および g に対して補題 3.4 を適用して得られる X 上の距離とする．

$\mathcal{F}\subseteq\omega^\omega$ を，濃度 $\mathfrak{d}$ の $\leq^*$-dominating family とする．$\beta X\simeq\sup\{\overline{X}^{d_g} : g\in\mathcal{F}\}$ が成り立つことを示したい．そのためには，任意の X の交わらない閉集合 A,B に対し，$A\parallel B$ $(\overline{X}^{d_g})$ が成り立つ $g\in\mathcal{F}$ を見つければ十分である．

各 $n<\omega$ に対し，$\Delta_n=K_{n+2}\setminus\operatorname{int}K_n$ とおく．このとき，$\Delta_n\subseteq X\setminus K_{n-1}$ である．X の交わらない閉集合 A,B を固定する．各 Δ_n はコンパクトなので，$A\cap\Delta_n\neq\emptyset$ かつ $B\cap\Delta_n\neq\emptyset$ であれば，$d(A\cap\Delta_n,B\cap\Delta_n)>0$ でなければならない．そこで，$h_{A,B}\in\omega^\omega$ を次のように定義する: $n<\omega$ に対し，$A\cap\Delta_n\neq\emptyset$ かつ $B\cap\Delta_n\neq\emptyset$ ならば，

$$h_{A,B}(n)=\left\lceil\frac{n}{d(A\cap\Delta_n,B\cap\Delta_n)}\right\rceil$$

とおく（$\lceil r \rceil$ は r 以上の最小の整数を表す）．そうでなければ $h_{A,B}(n)$ は任意とする．$g \in \mathcal{F}$ および $N < \omega$ を，$n > N$ ならば $h_{A,B}(n) \leq g(n)$ が成り立つように選ぶ．

任意の $M \geq N$ と $x \in X \setminus K_{M+1}$ に対し，$d_g(x, A) + d_g(x, B) \geq M$ が成り立つことを示せば，$A \parallel B$ ($\overline{X}^{d_g}$) がいえる．そこで，$M < \omega$ と $x \in X \setminus K_{M+1}$ をとる．d_g がプロパーな距離関数であることから，$a \in A$ と $b \in B$ を，$d_g(x, A) + d_g(x, B) = d_g(x, a) + d_g(x, b)$ を満たすようにとれる．$n_a, n_b < \omega$ を，$a \in K_{n_a} \setminus K_{n_a - 1}$，$b \in K_{n_b} \setminus K_{n_b - 1}$ を満たすように選び，$n = \min\{n_a, n_b\}$ とおく．

Case 1. $n \leq M$ の場合．$x \in X \setminus K_{M+1}$ であり，かつ，d_g の性質によって $d_g(K_M, X \setminus K_{M+1}) \geq M$ なので，$d_g(a, x) \geq M$ または $d_g(b, x) \geq M$ が成り立つ．

Case 2. $n > M$ の場合．三角不等式により，$d_g(a, b) \geq M$ を示せば十分である．$|n_a - n_b| \leq 1$ ならば，$a, b \in \Delta_{n-1}$ だから，

$$\begin{aligned} d_g(a, b) &\geq g(n-1) \cdot d(a, b) \\ &\geq h_{A,B}(n-1) \cdot d(a, b) \\ &\geq h_{A,B}(n-1) \cdot d(A \cap \Delta_{n-1}, B \cap \Delta_{n-1}) \\ &\geq n - 1 \geq M \end{aligned}$$

が成り立つ．そうでなければ，$d_g(a, b) \geq d_g(K_n, X \setminus K_{n+1}) \geq n > M$ が成り立つ． □

結論として，次の定理を得る．

定理 3.6. 局所コンパクトかつ可分な距離化可能空間 X について，$X^{(1)}$ がコンパクトでなければ $\mathfrak{sa}(X) = \mathfrak{ha}(X) = \mathfrak{d}$ であり，$X^{(1)}$ がコンパクトであれば $\mathfrak{sa}(X) = \mathfrak{ha}(X) = 1$ である．

3.2 $\mathfrak{d}$ マイルよりもっと遠いこともある

基数 $\mathfrak{ha}(X)$ は局所コンパクトかつ可分な距離化可能空間 X についてのみ定義されるので，定理 3.6 により，$\mathfrak{ha}(X)$ のとりうる値は $\mathfrak{d}$ または 1 だけである．しかし，$\mathfrak{sa}(X)$ は任意の距離化可能空間 X について定義されるので，「局所コンパクトかつ可分」という仮定を除くと $\mathfrak{sa}(X)$ はどんな値をとりうるかという問題が残る．

定理 1.6 および補題 3.2 によって，任意の X について $\mathfrak{sa}(X) \geq \mathfrak{d}$ または $\mathfrak{sa}(X) = 1$ であることは示されている．本節では，$\mathfrak{sa}(X) > \mathfrak{d}$ を満たす空間 X が存在する（さらに，$\mathfrak{sa}(X)$ はいくらでも大きい値をとりうる）ことを示す．

空間 X について，基数 $\sup\{|D| : D$ は X の閉離散部分集合 $\} + \aleph_0$ を X の *extent* と呼び，$e(X)$ で表す．

無限基数 κ に対し，$\log\kappa$ を，$\log\kappa = \min\{\theta : 2^\theta \geq \kappa\}$ によって定義する．無限基数の集合 C に対し，$\log(\sup C) = \sup\{\log\kappa : \kappa \in C\}$ が成り立つことは容易にわかる．

命題 3.7. 距離化可能空間 X について，$X^{(1)}$ がコンパクトでなければ，$\mathfrak{sa}(X) \geq \log e(X^{(1)})$ が成り立つ．

証明. 無限基数 κ と，$\lambda = \log\kappa$ に対し，$X^{(1)}$ が濃度 κ の閉離散部分集合を持てば $\mathfrak{sa}(X) \geq \lambda$ であることを示せば十分である．また，$\mathfrak{sa}(X) \geq \mathfrak{d}$ は補題 3.2 ですでに示されているから，$\lambda \geq \mathfrak{d}$ と仮定してよい．

$\mu < \lambda$ とし，D を $\mathrm{M}(X)$ の濃度 μ の部分集合とする．補題 3.1 により，すべての $\rho \in D$ について $\rho(A, B) = 0$ を満たす，交わらない閉集合 A, B を見つければ十分である．

$H \subseteq \omega^\omega$ を，濃度 $\mathfrak{d}$ の，$\leq$ に関する dominating family とせよ．

$X^{(1)}$ の濃度 κ の閉離散部分集合 $A = \{a_\xi : \xi < \kappa\}$ をとる．補題 3.2 の証明と同様に，$\xi < \kappa$ ごとに a_ξ の近傍 U_ξ と $U_\xi \setminus \{a_\xi\}$ の中の点列 $\langle b_{\xi,i} : i < \omega\rangle$ を，次の性質を満たすようにとる．

1. 各 $\xi < \kappa$ について，$\langle b_{\xi,i} : i < \omega\rangle$ は a_ξ に収束する．
2. $\xi < \eta < \kappa$ ならば $U_\xi \cap U_\eta = \emptyset$ である．
3. どんな $\varphi \in \omega^\kappa$ についても，集合 $\{b_{\xi,\varphi(\xi)} : \xi < \kappa\}$ は集積点を持たない．

$\rho \in D$ と $\xi < \kappa$ について，$g^\xi_\rho \in \omega^\omega$ を，各 $m < \omega$ に対し

$$g^\xi_\rho(m) = \min\left\{k < \omega : \forall i \geq k \left(\rho(a_\xi, b_{\xi,i}) < \frac{1}{m+1}\right)\right\}$$

とおくことで定義する．さらに，$h^\xi_\rho \in H$ を，$g^\xi_\rho \leq h^\xi_\rho$ を満たすように選ぶ．

ここで，$\mathfrak{d} \leq \mu = |D| < \lambda = \log\kappa$ だから，$\mathfrak{d}^\mu = 2^\mu < \kappa$ が成り立つ．したがって，$K \in [\kappa]^\kappa$ と $\{h^\xi : \xi \in K\}$ を，各 $\xi \in K$ に対し，すべての $\rho \in D$ について $h^\xi_\rho = h^\xi$ を満たす（すなわち，$\xi \in K$ に関しては，h^ξ_ρ が ξ にのみ依存し ρ に依存しない）ように選べる．

可算集合 $\{\xi_n : n < \omega\} \subseteq K$ を固定する．$b_n = b_{\xi_n, h^{\xi_n}(n)}$ とおき，$B = \{b_n : n < \omega\}$ と定義する．このとき，B は A と交わらない X の閉集合である．さらに，h^ξ_ρ の選び方より，各 $\rho \in D$，$n < \omega$ について，$\rho(a_{\xi_n}, b_n) \leq \frac{1}{n+1}$ である．したがって，すべての $\rho \in D$ について $\rho(A, B) = 0$ である． □

系 3.8. X_κ を，κ 個の収束点列の disjoint union とする（すなわち，$X_\kappa = \kappa \times (\omega + 1)$ で，κ は離散位相で考える）．このとき，$\kappa > 2^\lambda$ ならば $\mathfrak{sa}(X_\kappa) > \lambda$ が成り立つ．

4 可分な距離化可能空間の場合

前節の結果により，$\mathfrak{sa}(X) > \mathfrak{d}$ を満たす空間の例として，$X = X_{(2^\mathfrak{d})^+}$ が挙げられる．この空間は，局所コンパクトだが可分ではない．

それでは，X を可分な距離化可能空間に限ると，$\mathfrak{sa}(X)$ はどんな値をとりうるだろうか．たとえば，$\mathfrak{sa}(\mathbb{Q})$ や $\mathfrak{sa}(\mathbb{P})$（$\mathbb{P}$ は無理数全体の空間を表す）はいくらだろうか．

以下，特に断らない限り，X は局所コンパクトでない可分な距離化可能空間とする．

可分な距離化可能空間は Hilbert cube $\mathbb{H} = [0,1]^\omega$ に部分空間として埋め込める．以下の議論では，X は $\mathbb{H}$ に埋め込まれているとみなし，$\overline{X} = \mathrm{cl}_\mathbb{H} X$，$X^* = \overline{X} \setminus X$ と定義する．$\mathbb{H}$ に備わる通常の距離を $\rho_\mathbb{H}$ で表す．

一般に，空間 Z に対し，Z のコンパクト部分集合の全体を $\mathcal{K}(Z)$ で表す．$\mathsf{cof}(\mathcal{K}(Z))$ で，$\subseteq$ に関して cofinal な $\mathcal{K}(Z)$ の部分集合の最小の濃度を表す．

本節では，$\mathfrak{sa}(X)$ が $\mathsf{cof}(\mathcal{K}(X^*))$ を用いて特徴づけられることを証明する．

4.1 $\mathfrak{sa}(X)$ versus $\mathcal{K}(X^*)$

まず，$\mathsf{cof}(\mathcal{K}(X^*))$ を用いて $\mathfrak{sa}(X)$ の上限を与える．

命題 4.1. $\mathfrak{sa}(X) \leq \mathfrak{d} \cdot \mathsf{cof}(\mathcal{K}(X^*))$.

証明．$\mathcal{C}_0$ を，濃度 $\mathsf{cof}(\mathcal{K}(X^*))$ の，$\mathcal{K}(X^*)$ の cofinal な部分集合とする．

$K \in \mathcal{C}_0$ を固定する．$\overline{X} \setminus K$ は $\overline{X}$ の開部分空間であるから，局所コンパクトかつ可分である．したがって，補題 3.1 および定理 3.6 により，$D_K \subseteq \mathrm{M}(\overline{X} \setminus K)$ を，濃度 $\mathfrak{d}$ で，任意の $\overline{X} \setminus K$ の交わらない閉集合 A, B に対してある $d \in D_K$ が $d(A, B) > 0$ を満たすようにとれる．

$D \subseteq \mathrm{M}(X)$ を次のように定義する：

$$D = \{d \restriction (X \times X) : \text{ある } K \in \mathcal{C}_0 \text{ について } d \in D_K\}.$$

この D が $\mathfrak{sa}(X) \leq |D| = \mathfrak{d} \cdot \mathsf{cof}(\mathcal{K}(X^*))$ の witness であることを示そう．X の交わらない閉集合 A, B を任意にとる．このとき，$\mathrm{cl}_{\overline{X}} A \cap \mathrm{cl}_{\overline{X}} B$ はコンパクトで，しかも X と交わらないから，$\mathcal{K}(X^*)$ の元である．したがって，ある $K \in \mathcal{C}_0$ について

$\mathrm{cl}_{\overline{X}} A \cap \mathrm{cl}_{\overline{X}} B \subseteq K$ である．これは，言い換えれば，$\mathrm{cl}_{\overline{X} \setminus K} A \cap \mathrm{cl}_{\overline{X} \setminus K} B = \emptyset$ となる．D_K の選び方により，ある $d \in D_K$ について $d(\mathrm{cl}_{\overline{X} \setminus K} A, \mathrm{cl}_{\overline{X} \setminus K} B) > 0$ が成り立つ．この d について，$d' = d \restriction (X \times X)$ とすると，$d' \in D$ かつ $d'(A, B) > 0$ である． □

$\mathsf{cof}(\mathcal{K}(\mathbb{P})) = \mathfrak{d}$ および $\mathsf{cof}(\mathcal{K}(\mathbb{Q})) = \mathfrak{d}$ はすでに知られている [8, Theorems 8.2 and 8.7]．これらの事実から，次の結論が導かれる．

系 4.2. $\mathfrak{sa}(\mathbb{Q}) = \mathfrak{sa}(\mathbb{P}) = \mathfrak{d}$.

次に，$\mathsf{cof}(\mathcal{K}(X^*))$ が $\mathfrak{sa}(X)$ の下限を与えることを示す．

$$\mathsf{Shade}(X^*) = \{\mathrm{cl}_{\overline{X}} A \cap \mathrm{cl}_{\overline{X}} B : A, B \subseteq X \text{ は交わらない } X \text{ の閉集合}\}$$

とおく．また，$d \in \mathrm{M}(X)$ と $\varepsilon > 0$ に対し，

$$\mathsf{Shade}(X^*, d, \varepsilon) = \{\mathrm{cl}_{\overline{X}} A \cap \mathrm{cl}_{\overline{X}} B : A, B \subseteq X \text{ は } X \text{ の閉集合で}, d(A, B) \geq \varepsilon\},$$

$$\begin{aligned} \mathsf{Shade}(X^*, d) &= \{\mathrm{cl}_{\overline{X}} A \cap \mathrm{cl}_{\overline{X}} B : A, B \subseteq X \text{ は } X \text{ の閉集合で}, d(A, B) > 0\} \\ &= \bigcup \{\mathsf{Shade}(X^*, d, 1/n) : n < \omega\} \end{aligned}$$

とおく．

補題 4.3. $\mathsf{Shade}(X^*) = \mathcal{K}(X^*)$.

証明．$\mathsf{Shade}(X^*) \subseteq \mathcal{K}(X^*)$ は明らか．逆の包含関係を示そう．

$K \in \mathcal{K}(X^*)$ を任意にとる．K は $\mathbb{H}$ のコンパクト部分集合だから，距離 $\rho_{\mathbb{H}}$ について全有界である．そこで，$n < \omega$ に対し，K の有限部分集合 K_n を，$K \subseteq \bigcup \{\mathrm{B}_{\rho_{\mathbb{H}}}(p, 2^{-n}) : p \in K_n\}$ を満たすようにとる．X は $\overline{X}$ の稠密な部分集合だから，各 $p \in K_n$ について，$X \cap \mathrm{B}_{\rho_{\mathbb{H}}}(p, 2^{-n})$ から点 x_p をとることができる．$F_n = \{x_p : p \in K_n\}$ とおく．さらに，異なる n に対する F_n は交わらないように F_n たちを構成できる．

$A = \bigcup \{F_{2k} : k < \omega\}$，$B = \bigcup \{F_{2k+1} : k < \omega\}$ とおく．すると，F_n の構成法から，A と B は X の交わらない閉集合であり，しかも，$K = \mathrm{cl}_{\overline{X}} A \cap \mathrm{cl}_{\overline{X}} B$ となる． □

$D \subseteq \mathrm{M}(X)$ を，任意の X の交わらない閉集合 A, B について，ある $d \in D$ が $d(A, B) > 0$ を満たすようにとる．このとき，

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(X^*) &= \mathsf{Shade}(X^*) \\ &= \bigcup \{\mathsf{Shade}(X^*, d) : d \in D\} \\ &= \bigcup \{\mathsf{Shade}(X^*, d, 1/n) : d \in D, n < \omega\} \end{aligned}$$

が成り立つ．

$d \in \mathrm{M}(X)$ と $\varepsilon > 0$ に対し，$L_{X,d,\varepsilon} = \bigcup \mathsf{Shade}(X^*, d, \varepsilon)$ とおく．

補題 4.4. 任意の $d \in \mathrm{M}(X)$ と $\varepsilon > 0$ に対し，$Y_{d,\varepsilon} \in \mathcal{K}(X^*)$ を，$L_{X,d,\varepsilon} \subseteq Y_{d,\varepsilon}$ を満たすようにとれる．

証明. 各 $x \in X$ に対し，$\mathrm{B}_d(x, \varepsilon/3) = \{z \in X : d(x,z) < \varepsilon/3\}$ は X の開集合である．X は $\overline{X}$ の稠密部分空間なので，$\mathrm{B}_d(x, \varepsilon/3)$ は $\overline{X}$ の相対位相で開集合である，すなわち，$\overline{X}$ の開集合 U_x で，$U_x \cap X = \mathrm{B}_d(x, \varepsilon/3)$ を満たすものが存在する．$U = \bigcup\{U_x : x \in X\}$ とし，$Y = Y_{d,\varepsilon} = \overline{X} \setminus U$ とおく．このとき，$X \subseteq U$ で，かつ，U は $\overline{X}$ の開集合だから，$Y \subseteq X^*$ かつ Y は $\overline{X}$ の閉集合であり，したがって $Y \in \mathcal{K}(X^*)$ である．

$L_{X,d,\varepsilon} \subseteq Y$ を示すことが目的である．これは $L_{X,d,\varepsilon} \cap U = \emptyset$ と同値である．

そうでないとして，$r \in L_{X,d,\varepsilon} \cap U$ をとる．$r \in U$ だから，ある $x \in X$ について $r \in U_x$ である．一方，$r \in L_{X,d,\varepsilon}$ だから，X の閉集合 A, B で，$d(A,B) \geq \varepsilon$ かつ $r \in \mathrm{cl}_{\overline{X}} A \cap \mathrm{cl}_{\overline{X}} B$ を満たすものが存在する．

ところで，U_x は r の近傍で，かつ，r は A の集積点だから，$U_x \cap A \neq \emptyset$ でなければならない．B についても同様に $U_x \cap B \neq \emptyset$ である．そこで，$a \in U_x \cap A$，$b \in U_x \cap B$ をとる．a, b, x はすべて X の点で，しかも，$U_x \cap X = \mathrm{B}_d(x, \varepsilon/3)$ だから，$d(x,a) < \varepsilon/3$ かつ $d(x,b) < \varepsilon/3$，したがって $d(a,b) < 2\varepsilon/3$ でなければならない．しかし，これは $d(A,B) \geq \varepsilon$ であることに矛盾する． □

命題 4.5. $\mathsf{cof}(\mathcal{K}(X^*)) \leq \mathfrak{sa}(X)$.

証明. $D \subseteq \mathrm{M}(X)$ を，濃度 $\mathfrak{sa}(X)$ で，任意の X の交わらない閉集合 A, B について，ある $d \in D$ が $d(A,B) > 0$ を満たすようにとる．このとき，補題 4.3 および D の選び方によって，X^* の任意のコンパクト部分集合 K は，いずれかの $d \in D$，$n < \omega$ に関する $\mathsf{Shade}(X^*, d, 1/n)$ に属する，すなわち $K \subseteq L_{X,d,1/n} \subseteq Y_{d,1/n}$ となる．したがって，$\{Y_{d,1/n} : d \in D \text{ and } n < \omega\}$ は $\mathcal{K}(X^*)$ の cofinal な部分集合となる． □

系 4.6. 可分な距離化可能空間 X について，$\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{sa}(X) = \mathfrak{d} \cdot \mathsf{cof}(\mathcal{K}(X^*))$ である．

$\mathbb{B}$ をベルンシュタイン集合，すなわち，完全集合を含まない濃度 $\mathfrak{c}$ の実数集合とする．$\mathsf{cof}(\mathcal{K}(\mathbb{B})) = \mathfrak{c}$ であることは容易にわかるので，次の事実が導かれる．これは，X が可分であっても，$\mathfrak{sa}(X)$ が 1 でも $\mathfrak{d}$ でもない値をとりうることを示す例になっている．

系 4.7. $\mathfrak{sa}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{B}) = \mathfrak{c}$.

4.2 さらに一般的な理論に向かって

ここまでの議論で，X が可分な距離化可能空間の場合，$\mathfrak{sa}(X)$ は 1, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{c}$ の値をとりうることがわかった．そこで，次の問題が考えられる．

問題 4.8. $\mathfrak{sa}(X) = \mathfrak{d}$ を満たす可分な距離化可能空間 X を特徴づけよ!

問題 4.9. $\mathfrak{sa}(X)$ が $\mathfrak{d}$ でも $\mathfrak{c}$ でもない値になる，局所コンパクトでない可分な距離化可能空間 X は存在するか?

ところで，$\mathfrak{sa}(X)$ は $\mathsf{cof}(\mathcal{K}(X^*))$ で特徴付けられることがわかったが，ここで，単に $\mathsf{cof}(\mathcal{K}(X^*))$ という濃度を考えるのでなく，$(\mathcal{K}(X^*), \subseteq)$ の有向集合としての構造に注目することで，さらに一般的な理論を構築できる可能性がある．

有向集合の間の Tukey order の概念を述べる．有向集合 D, E に対し，写像 $g : E \to D$ で，E の cofinal な部分集合の g による像が D で cofinal であるものが存在するとき，$D \leq_T E$ と表し，D は *Tukey below* E であるという．$D \leq_T E$ かつ $E \leq_T D$ のときに $D \equiv_T E$ と表し，D と E は *Tukey equivalent* である，または，D と E は**同じ** *cofinal type* **を持つ**という．

Tukey order という視点を導入すると，$\mathfrak{sa}(X)$, $\mathsf{cof}(\mathcal{K}(X^*))$ という濃度の関係の背後に，2 つの有向集合 $(\mathrm{M}(X), \leq)$[*13]，$(\mathcal{K}(X^*), \subseteq)$ の Tukey order の意味での関係が隠れていると考えるのは自然である．逆に，これらの有向集合の関係が明らかになれば，濃度の関係はその帰結として得られることになる．

問題 4.10. 可分な距離化可能空間 X について，2 つの有向集合 $(\mathrm{M}(X), \leq)$，$(\mathcal{K}(X^*), \subseteq)$ の関係を明らかにせよ!

謝辞

本研究に関して著者らと議論してくださった，Jörg Brendle，渕野昌，藤田博司，加茂静夫，Stevo Todorčević の各氏にお礼申し上げます．

[*13] 距離関数の大小関係は，2 変数関数としての各点ごとの大小で定義する．

参考文献

[1] T. Bartoszyński and H. Judah. *Set Theory: On the Structure of the Real Line*. A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 1995.

[2] A. N. Dranishnikov, J. Keesling, and V. V. Uspenskij. On the Higson corona of uniformly contractible spaces. *Topology*, Vol. 37, pp. 791–803, 1998.

[3] M. Kada. More on Cichoń's diagram and infinite games. *J. Symbolic Logic*, Vol. 65, pp. 1713–1724, 2000.

[4] 嘉田 勝, 友安一夫. How many miles to $\beta\omega$? — $\beta\omega$ まで何マイル? 一般及び幾何学的トポロジーと関連する諸問題, 数理解析研究所講究録, No. 1370, pp. 86–101. 京都大学数理解析研究所, 2004.

[5] M. Kada, K. Tomoyasu, and Y. Yoshinobu. How many miles to βX? — $\mathfrak{d}$ miles, or just one foot. submitted.

[6] M. Kada, K. Tomoyasu, and Y. Yoshinobu. How many miles to $\beta\omega$? — Approximating $\beta\omega$ by metric-dependent compactifications. *Topology Appl.*, Vol. 145, pp. 277–292, 2004.

[7] K. Kawamura and K. Tomoyasu. Approximations of Stone-Čech compactifications by Higson compactifications. *Colloquium Mathematicum*, Vol. 88, pp. 75–92, 2001.

[8] E. K. van Douwen. The integers and topology. In K. Kunen and J. E. Vaughan, editors, *Handbook of set-theoretic topology*, pp. 111–167. North Holland, 1984.

[9] R. G. Woods. The minimum uniform compactification of a metric space. *Fund. Math.*, Vol. 147, pp. 39–59, 1995.

As I was going to St. Ives,
I met a man with seven wives,
Each wife had seven sacks,
Each sack had seven cats,
Each cat had seven kits:
Kits, cats, sacks, and wives,
How many were there going to St. Ives? [*14]

[*14] マザーグースの歌のひとつ. なぞなぞ. 答は "1", あるいは "0" とされている.