数理解析研究所講究録 1419 巻 2005 年 52-62

ZF 集合論での順序数の積空間における正規性

筑波大学大学院数理物質科学研究科　平田　康史 (Yasushi Hirata)
Graduate School of Pure and Applied Science, University of Tsukuba

概要

ZFC の下では, ω_1 の部分空間 A, B で, その積 $A \times B$ が正規でないようなものが存在することが知られている. このことが, 選択公理の無い集合論 ZF においても成り立つかどうかを考察する.

本文中, 「正規」は位相空間の正規性 (disjoint な閉集合の対が開集合で分離されること) を, 「正則」は基数の正則性 (すなわち $\kappa = \mathrm{cf}\,\kappa \geq \omega$) をあらわすものとする.

1 はじめに

選択公理 (AC) を含む集合論の公理系 ZFC において, 順序数の部分空間の有限積が正規になるための条件は, stationary の概念を用いて特徴付けることができる. 最小の非可算順序数 ω_1 の２つの部分空間の積については, 次のようになる.

<u>**Theorem KOT**</u> (Kemoto, Ohta, Tamano [3]) [ZFC]
$A, B \subseteq \omega_1$ について, 以下は同値である.

(a) $A \times B$ は正規でない.

(b) A と B は ω_1 において *stationary* であるが $A \cap B$ は *stationary* ではない.

また, ZFC の下では, κ が正則非可算基数ならば, κ 個の κ の stationary set からなる pairwise disjoint な族がとれることがよく知られている (Ulam). これらの事実から, 次の Corollary が直ちに導かれる.

COROLLARY 1. [ZFC] $A \times B$ が正規でないような $A, B \subseteq \omega_1$ がある.

これらのことがらが導かれるのに選択公理がどのくらい本質的であるかを調べたい.

PROBLEM 1. ZF の下で, $A \times B$ が正規でないような $A, B \subseteq \omega_1$ の存在が導かれるか?

以下, 特に断らない場合は, 選択公理 (AC) を仮定しない集合論の公理系 ZF で考えるものとする.

section 2 では, Corollary 1 と同様の方法で正規でない $A \times B$ を作るためにはどのような条件があればよいかを, 選択公理を仮定しない立場で述べ, ω_1 が正則でない場合や, 決定可能性公理が成り立つ場合は, その条件にあてはまらないことを説明する.

COROLLARY 2. [ZF]

- ω_1 が正則 (すなわち $\mathrm{cf}\,\omega_1 = \omega_1$) で,
- その *club filter* が *ultrafilter* でない

ならば, $A \times B$ が正規でないような $A, B \subseteq \omega_1$ が存在する.

ここで, ω_1 が正則なときは, ω_1 の club filter が ultrafilter であることと, Theorem KOT の条件 (b) を満たす $A, B \subseteq \omega_1$ が存在しないこととは同値である.

section 3 では, ω_1 のある部分空間 E を定義し, 次の Lemma を示す.

Main Lemma [ZF] 以下は同値である.

(i) 全単射 $f_\alpha : \omega \longrightarrow \alpha$ の列 $\langle f_\alpha \mid \omega \leq \alpha < \omega_1 \rangle$ が存在する.

(ii) ω_1 は正則で, すべての $A, B \subseteq \omega_1$ に対して, Theorem KOT における (a)→(b) が成り立つ.

(iii) $E \times E$ は正規.

(iv) $\omega_1^{\mathbf{L}[Z]} = \omega_1$ となる $Z \subseteq \omega_1$ がある.

Corollary 2 と Main Lemma から, 次の定理が得られる.

Main Theorem [ZF] 次の条件 (I) と (II) は同値である.

(I) 任意の $A, B \subseteq \omega_1$ について $A \times B$ は正規.

(II) (i) 全単射 $f_\alpha : \omega \longrightarrow \alpha$ の列 $\langle f_\alpha \mid \omega \leq \alpha < \omega_1 \rangle$ が存在し, かつ
(ii) ω_1 の club filter は ultrafilter.

蛇足ながら, (II) の (i) は ω_1 の正則性を導くことを指摘しておく.

Proof. (I) を仮定する. Main Lemma (iii) が成り立つので, Main Lemma (i) = Main Theorem (II)(i) も成り立つ. Main Lemma (ii) より ω_1 は正則であるが, 仮定 (I) と Corollary 2 より, ω_1 の club filter は ultrafilter でなければならない.

今度は (II) を仮定する. Main Lemma (i) が成り立つので, Main Lemma (ii) も成り立つ. Theorem KOT の条件 (b) を満たす $A, B \subseteq \omega_1$ が存在しないので, (I) が成り立つ. □

このことから, Problem 1 は, 上の (II) の (i),(ii) を両立するモデルが存在するか？という集合論的な問に帰着される.

section 4 では, Main Theorem の条件 (II) から ω_1 の club filter が可算完備でないことを示す. 決定可能性公理の下では ω_1 の club filter は可算完備な ultrafilter になることが知られているので, 次の Corollary が得られる.

COROLLARY 3. [ZF] ω_1 が正則でないか, あるいは, 決定可能性公理が成り立つならば, ($E \subseteq \omega_1$ だが) $E \times E$ は正規でない.

section 5 では, 順序数の積, 順序数の部分空間の積, 順序数の積の部分空間のそれぞれについて, 正規でないものが作れる順序数の最小値を求める.

2 選択公理の無いところでの club filter

順序数やその cofinality, あるいは全順序位相などは選択公理を使わずに定義できる. また, 正則非可算基数の club set の概念も選択公理を使わずに定義され, ある程度の基本的な性質は導くことができる.

FACT 4. [ZF] κ を正則非可算基数とする.

(1) $f : \kappa \longrightarrow \kappa$ ならば, $C(f) = \{\alpha < \kappa : f``\alpha \subseteq \alpha\}$ は κ の *club set* である.

(2) κ の *club set* からなる長さ $\mu < \kappa$ の列 $\langle C_\xi \mid \xi < \mu \rangle$ について, $\bigcap_{\xi<\mu} C_\xi$ は *club set* である.

(3) κ の *club set* からなる長さ κ の列 $\langle C_\xi \mid \xi < \kappa \rangle$ について, $\Delta_{\xi<\kappa} C_\xi = \{\alpha < \kappa : \alpha \in \bigcap_{\xi<\alpha} C_\xi\}$ は *club set* である.

(2) より, κ の club filter は選択公理を使わずに定義できる. ここで, 上の (2), (3) においては, $\langle C_\xi \mid \xi < \mu \rangle$ があらかじめ club set の列として与えられているのであって, club filter の $< \kappa$-完備性や normality が成り立つと言っているわけではないということに注意されたい. ($\langle X_\xi \mid \xi < \mu \rangle$ が club set を含むような集合の列だからといって, $C_\xi \subseteq X_\xi$ となるような club set の列 $\langle C_\xi \mid \xi < \mu \rangle$ を取り出すには, μ が無限の場合は何らかの選択公理の仮定が必要であろうと思われる.)

関数 $f : S \longrightarrow \kappa$ ($S \subseteq \kappa$) は, すべての $\alpha \in S$ で $f(\alpha) < \alpha$ となるとき regressive であるという. Fodor の Pressing Down Lemma (PDL) は結論を少し弱めることで選択公理を使わずに導くことができる.

LEMMA 5. [ZFC](*PDL*) 正則非可算基数 κ の *stationary* な部分集合 S 上で定義された関数 $f : S \longrightarrow \kappa$ が *regressive* ならば, ある $\gamma < \kappa$ について, $S_\gamma = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \gamma\}$ は κ において **stationary** である.

LEMMA 6. [ZF](弱い *PDL*) 正則非可算基数 κ の *stationary* な部分集合 S 上で定義された関数 $f : S \longrightarrow \kappa$ が *regressive* ならば, ある $\gamma < \kappa$ について, $S_\gamma = \{\alpha \in S : f(\alpha) = \gamma\}$ は κ において **cofinal** である.

ω_1 が正則基数とすると, Theorem KOT の条件 (b) から条件 (a) を導くには, 弱い PDL で十分であり, 選択公理は不要である. したがって, Corollary 1 は ZF の下では, Corollary 2 のように書き換えることができる.

次の 3 つの定理は, Corollary 2 の適用が不可能な 2 通りの状況を提示し, それがそれほど無理なく起こることを示している. よって Problem 1 は考慮に値すると言えよう.

THEOREM 7. (Levy) [ZF] が無矛盾ならば, [ZF+"ω_1 は正則でない"] も無矛盾である.

THEOREM 8. (Woodin)
[ZF+AD] が無矛盾であることと, [ZFC+"Woodin 基数が無限個存在する"] が無矛盾であることは同値である.

THEOREM 9. (Solovay) [ZF+AD] ω_1 は正則であり, その *club filter* は可算完備な *ultrafilter* である.

ここで, AD は決定可能性公理のことであり, 「任意の $A \subseteq {}^\omega\omega$ に対して, ゲーム $G_\omega(A)$ においてプレイヤー I か II のいずれかが必勝法をもつ」という公理である. (選択公理 (AC) とは両立しない.) ここで, $G_\omega(A)$ は, プレイヤー I と II が交互に $x(n) \in \omega$ をとっていくゲームで, $x = \langle x(n) \mid n < \omega \rangle \in A$ ならば I の勝ち, さもなければ II の勝ちとするものである.

Player I	$x(0)$		$x(2)$		$\cdots$
Player II		$x(1)$		$x(3)$	$\cdots$

決定可能性公理に関する詳細は [2] と, その巻末の文献表などを参照されたい.

3 $\bigoplus_{\xi<\alpha} \xi$ と同相な空間 $E(\alpha)$

順序数 α に対して, 順序数 $\rho(\alpha)$ を次のように定義する.

- $\rho(0) = 0$,
- α が極限順序数のときは, $\rho(\alpha) = \sup\{\rho(\beta) : \beta < \alpha\}$,
- $\rho(\alpha + 1) = \rho(\alpha) + 1 + \alpha$.

順序数 α に対して $D(\alpha), E(\alpha) \subseteq \rho(\alpha)$ を次のように定義する.

- $D(\alpha) = \{\rho(\beta) : \beta < \alpha\}$,

- $E(\alpha) = \rho(\alpha) \setminus D(\alpha)$.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
$\rho(0)$	$\rho(1)$	•	$\rho(2)$	•	•	$\rho(3)$	•	•	•	$\rho(4)$	$\cdots$

次の Fact はほとんど明らかである.

FACT 10.

- $\langle \rho(\alpha) \mid \alpha \in \mathbf{Ord} \rangle$ は *strictly increasing* で, 任意の ZF の *transitive model* について *absolute* である.
- $\alpha \leq \rho(\alpha)$. さらに, もし κ が $\mathbf{L}$ における無限基数 (特に $\mathbf{V}$ における無限基数) ならば, $\rho(\kappa) = \kappa$.
- α が極限順序数ならば, $\rho(\alpha)$ は極限順序数で $D(\alpha)$ はその *club set* である.
- κ が正則非可算基数ならば, $E(\kappa)$ は κ において *non-stationary* である.
- $E(\alpha) = \bigoplus_{\beta<\alpha} E_\beta$, *where* $E_\beta = [\rho(\beta)+1, \rho(\beta+1))$.
  $i_\beta : \beta \longrightarrow E_\beta;\ \xi \longmapsto \rho(\beta)+1+\xi$ は同相写像.
- $\langle \rho(\beta) \mid \beta < \alpha \rangle$, $\langle i_\beta \mid \beta < \alpha \rangle$, $D(\alpha)$, $E(\alpha) \in \mathbf{L}$.

$E = E(\omega_1)$ とする. Main Lemma (section 1) が成り立つことを証明する. 証明の中で使われる $\mathbf{L}[Z]$ の正確な定義と基本的な性質については [4] か [2] を参照されたい. ここでは, 証明で使う最小限の事実だけ紹介しておく.

集合 Z に対して, $\mathbf{L}[Z]$ は以下の条件を満たすようなクラス $\mathbf{M}$ のうちで最小のものである.

- $\mathbf{M}$ は ZF の transitive なモデル,
- $\mathbf{M}$ はすべての順序数を含む,
- 任意の $x \in \mathbf{M}$ について $x \cap Z \in \mathbf{M}$.

特に $\mathbf{L}[\emptyset]$ は $\mathbf{L}$ のことである. $\mathbf{L}[Z]$ は ZF のモデルであるだけでなく選択公理も満たす. つまり, ZFC のモデルになっている. Z が順序数の集合ならば, $Z \in \mathbf{L}[Z]$ になる. 順序数の対は $\mathbf{L}$ の中で定義される述語によって順序数でコードできるので, 順序数の部分集合, 順序数の有限積の部分集合, その列, そのまた列, 等々が有限個与えられたとき, それらを一度にコードするような順序数の集合 Z をとることによって, $\mathbf{L}[Z]$ がそれらをすべて含むようにできる.

Proof. (Main Lemma の証明)

(iv)→(i) $\mathbf{L}[Z]$ は ZFC のモデルなので, (i) のような列を $\mathbf{L}[Z]$ の中からとることができる. それは $\mathbf{V}$ でも (i) の条件を満たす.

(i)→(ii) ω_1 が正則でないとすると, ω_1 の cofinal sequence $\langle \alpha_n \mid n < \omega \rangle$ がとれる. $\xi < \omega_1$ に対し, $\xi < \alpha_n$ となる最小の $n < \omega$ と, $\xi = f_{\alpha_n}(m)$ となる $m < \omega$ の対 $\langle n, m \rangle$ を対応させる写像は ω_1 から $\omega \times \omega$ への単射になる. これは ω_1 から ω への単射の存在を導くので, ω_1 が非可算であることに矛盾する. よって ω_1 は正則である.

(ii) の後半を示すため, Theorem KOT の (b) の条件を満たさない $A, B \subseteq \omega_1$ の積 $X = A \times B$ が normal であることを示す. C_0, C_1 が disjoint な X の閉集合とする. A か B が non-stationary ならば $D \cap A = \emptyset$ か $D \cap B = \emptyset$ となる club set $D \subseteq \omega_1$ をとる. A, B ともに stationary な場合は $D = \omega_1$ とする. $\langle f_\alpha \mid \omega \leq \alpha < \omega_1 \rangle, A, B, C_0, C_1, D \in \mathbf{L}[Z]$ となるように $Z \subseteq \omega_1$ をとる. $\omega \leq \alpha < \omega_1$ ならば, ω から α への全単射 f_α が $\mathbf{L}[Z]$ 内にあるので, $\alpha < \omega_1^{\mathbf{L}[Z]}$. よって, $\omega_1^{\mathbf{L}[Z]} = \omega_1$ である. D は $\mathbf{L}[Z]$ においても club set なので, A か B が $\mathbf{V}$ で non-stationary ならば $\mathbf{L}[Z]$ においてもそうである. また, $A \cap B$ が $\mathbf{V}$ で stationary ならば明らかに $\mathbf{L}[Z]$ においてもそうである. よって $\mathbf{L}[Z]$ においても, A, B は Theorem KOT の条件 (b) を満たさない. $\mathbf{L}[Z]$ は ZFC のモデルなので, そこでは Theorem KOT が成り立つ. よって, $\mathbf{L}[Z]$ の中で $X = A \times B$ は正規であり, $\mathbf{L}[Z]$ 内で (よって $\mathbf{V}$ においても) C_0 と C_1 は X の開集合で分離できる.

(ii)→(iii) $E \subseteq \omega_1$ は non-stationary なので, $A = B = E$ とすれば Theorem KOT の条件 (b) を満たさない. よって, (a) も満たさない, すなわち $A \times B = E \times E$ は正規である.

(iii)→(iv) 順序数 α に対して, つぎのように置く.

- $X(\alpha) = \alpha \times (\alpha + 1)$,
- $C_0(\alpha) = \{\langle \xi, \xi \rangle : \xi < \alpha\}$,
- $C_1(\alpha) = \alpha \times \{\alpha\}$.

$C_0(\alpha)$ と $C_1(\alpha)$ は $X(\alpha)$ の disjoint な閉集合である.
次の事実はよく知られている.

Claim 1. [ZFC] $C_0(\omega_1)$ と $C_1(\omega_1)$ は $X(\omega_1)$ において開集合で分離できない.

$E = \bigoplus_{\alpha < \omega_1} E_\alpha$, $i_\alpha : \alpha \longrightarrow E_\alpha$ は同相写像であったことを使って, 次のように表すことができる.

- $E \times E = \bigoplus_{\alpha, \beta < \omega_1} (E_\alpha \times E_\beta)$,

- $i_{\alpha,\beta} : \alpha \times \beta \longrightarrow E_\alpha \times E_\beta$; 同相写像.

$E \times E$ における disjoint な閉集合 C_0, C_1 を次のように定義する.

$$C_i = \bigcup_{\alpha<\omega_1} i_{\alpha,\alpha+1}``C_i(\alpha)$$

for $i = 0, 1$.

$C_i(\alpha), X(\alpha)$ は $\mathbf{L}$ の元であり, また, 自然にとれば, $i_{\alpha,\beta}, C_i$, も $\mathbf{L}$ の元である.

$E \times E$ が正規であると仮定する. C_0 と C_1 は $E \times E$ のある開集合 U_0, U_1 で分離される. $U_0, U_1 \in \mathbf{L}[Z]$ となる $Z \subseteq \omega_1$ をとる. 任意の $\alpha < \omega_1$ について, $U_i(\alpha) = i^{-1}_{\alpha,\alpha+1}``U_i$ $(i = 0, 1)$ は $X(\alpha)$ の開集合で $C_0(\alpha), C_1(\alpha)$ を分離する. $\mathbf{L}[Z]$ は ZFC のモデルであり, $U_i(\alpha) \in \mathbf{L}[Z]$ なので, Claim より, $\alpha \neq \omega_1^{\mathbf{L}[Z]}$ がすべての $\alpha < \omega_1$ について成り立つ. よって $\omega_1^{\mathbf{L}[Z]} = \omega_1$. □

選択公理の下では, 明らかに Main Lemma の (i) が成り立つ. 一方, ω_1 が正則でなければ (ii) が成り立たないので, $E \subseteq \omega_1$ だが $E \times E$ は正規でない.

$\mathbf{V}$ において ω_1 が正則かつ (i) が成り立たないとすると, $\kappa = \omega_1^{\mathbf{V}}$ は $\mathbf{L}$ において到達不可能基数になる. 一方, $\mathbf{V}$ が ZFC のモデルで, κ が到達不可能基数ならば, κ を $\omega_1^{\mathbf{V}[G]}$ にするような forcing extension の symmetric submodel $\mathbf{M}$ をとることによって, $\mathbf{M} \models$"κ は最小の非可算基数で正則, かつ, (i) が成り立たない" とすることができる.

FACT 11. 以下の 2 つの無矛盾性の強さは同じである.

- ZF+"ω_1 は正則"+"全単射 $f_\alpha : \omega \longrightarrow \alpha$ からなる列 $\langle f_\alpha \mid \omega \leq \alpha < \omega_1 \rangle$ が存在しない."
- ZFC+"到達不可能基数が存在する."

4 可算選択公理の否定

Ulam は正則非可算基数 κ には κ 個の stationary set からなる pairwise disjoint な族が存在することを示したが, 同様の方法で次の Lemma が得られる.

LEMMA 12. [ZF] *Main Theorem* の条件 (II) を仮定する. ω_1 は正則である. また, ω_1 の部分集合の列 $\langle X_n \mid n < \omega \rangle$ で, 各 X_n は *club set* を含むが, $\bigcap_{n<\omega} X_n = \emptyset$ となるものが存在する. (よって, 可算選択公理は成り立たない.)

Proof. (II) の条件 (i) と Main Lemma (ii) により ω_1 は正則である.

$\langle f_\alpha \mid \omega \leq \alpha < \omega_1 \rangle$ を全単射 $f_\alpha : \omega \longrightarrow \alpha$ からなる列とする. $n < \omega$ と $\xi < \omega_1$ に対して, $X(n,\xi) = \{\alpha \in (\xi, \omega_1) : f_\alpha(n) = \xi\}$ とおく. $\zeta < \xi < \omega_1$ ならば, $X(n,\zeta) \cap X(n,\xi) = \emptyset$ なので, $X(n,\xi)$ が club set を含むような $\xi < \omega_1$ は n ごとに高々1つしかない. そのような ξ を ξ_n とし, すべての ξ_n よりも大きい $\bar{\xi} < \omega_1$ をとる. $\bar{\xi} > \omega$ としてよい. ω_1 の club filter は ultrafilter であると仮定しているので, $X(0) = (\bar{\xi}, \omega_1)$, $X(n+1) = \omega_1 \setminus X(n, \bar{\xi})$ とおけば, すべての $n < \omega$ について, $X(n)$ は club set を含む. 任意の $\alpha \in X(0)$ に対して, $f_\alpha : \omega \longrightarrow \alpha$ は全射なので, $f_\alpha(n) = \bar{\xi}$ となる $n < \omega$ はあり, $\alpha \in X(n, \bar{\xi})$ なので, $\alpha \notin X(n+1)$. よって, $\bigcap_{n<\omega} X(n) = \emptyset$. □

5 順序数の積とその部分空間

ここまでは ω_1 の 2 つの部分空間の積のみを考えてきたが, 最後に一般的な状況を観察する.

2 つの順序数の積の部分空間一般について, ZFC においては次のような状況にある.

FACT 13. [ZFC] μ, ν が順序数で $X \subseteq \mu \times \nu$ とする.

(1) $\mu \leq \omega$ ならば X は正規.

(2) $\mu, \nu < \omega_1$ ならば X は正規.

(3) $(\omega+1) \times \omega_1$ には正規でない部分空間がある.

これまでと同様に順序数の集合 Z を適切にとって, ZFC のモデルである $\mathbf{L}[Z]$ 内の議論に帰着させることによって, 上の Fact は ZF でも成り立つことが示せる.

PROPOSITION 14. Fact 13 は ZF でも成り立つ.

Proof. (1), (2) C_0 と C_1 を X の disjoint な閉集合とする. 順序数の集合 Z を, $X, C_0, C_1 \in \mathbf{L}[Z]$ となるようにとる. さらに, (2) の場合は, $\mathbf{L}[Z]$ の中でも (2) が成り立つようにする. (ω から μ, ν への全射が少なくとも 1 つずつ $\mathbf{L}[Z]$ に入るようにすればよい). $\mathbf{L}[Z]$ は ZFC のモデルなので, Fact 13 より $\mathbf{L}[Z]$ の中では X は正規である. $C_0, C_1 \in \mathbf{L}[Z]$ なので, それらは開集合で分離することができる.

(3) Lim は極限順序数全体のクラスとする. 順序数 α に対して, $X(\alpha) = (\omega+1) \times \alpha \setminus \{\omega\} \times \mathrm{Lim}$, $C_0(\alpha) = \{\omega\} \times (\alpha \setminus \mathrm{Lim})$, $C_1(\alpha) = \omega \times (\alpha \cap \mathrm{Lim})$ とする. $C_0(\alpha)$ と $C_1(\alpha)$ は, $X(\alpha) \subseteq (\omega+1) \times \alpha$ の disjoint な閉集合だが, ZFC の下では, $C_0(\omega_1)$ と $C_1(\omega_1)$ は $X(\omega_1)$ において開集合で分離できないことが PDL を使って容易にわかる. これらが ZF でも分離できないことを示す.

$C_0(\omega_1)$ と $C_1(\omega_1)$ が $X(\omega_1)$ の開集合 U_0 と U_1 で分離できたとして, 矛盾を導く. $U_0, U_1 \in \mathbf{L}[Z]$ となるような $Z \subseteq \omega_1$ をとる. $\kappa = \omega_1^{\mathbf{L}[Z]}$ とおくと, $\mathbf{L}[Z]$ は ZFC のモデルなので, $C_0(\kappa)$ と $C_1(\kappa)$ は $\mathbf{L}[Z]$ 内の $X(\kappa)$ の開集合で分離されない. $\kappa \leq \omega_1$ で, $X(\kappa) = X(\omega_1) \cap (\omega+1) \times \kappa$, $C_i(\kappa) = C_i(\omega_1) \cap X(\kappa)$ $(i = 0, 1)$ なので, $C_0(\kappa)$ と $C_1(\kappa)$ は $X(\kappa)$ の開集合 $U_0 \cap X(\kappa), U_1 \cap X(\kappa) \in \mathbf{L}[Z]$ で分離される. これは矛盾である. □

今度は順序数そのものの積について考える.

FACT 15. [ZFC]

(1) $\mu < \omega_1$ か $\nu < \omega_1$ ならば, $\mu \times \nu$ は正規である.

(2) $\omega_1 \times \omega_1$ は正規である.

(3) $\omega_1 \times (\omega_1 + 1)$ は正規でない.

これは, [3] 内の定理により得られる次の Fact から簡単に導かれる.

FACT 16. [ZFC] 順序数 μ, ν について, 次は同値である.

(a) $\mu \times \nu$ は正規でない.

(b) $\omega < \mathrm{cf}\,\mu < \nu$, または, $\omega < \mathrm{cf}\,\nu < \mu$.

ZF でも同様のことが成り立つ.

PROPOSITION 17. Fact 16 は ZF でも成り立つ.

Proof. (a)→(b) $C_0, C_1 \subseteq \mu \times \nu$ を $\mu \times \nu$ 内の開集合で分離できない disjoint な閉集合とする. C_0, C_1 および, $\mathrm{cf}\,\mu$ から μ への cofinal sequence, $\mathrm{cf}\,\nu$ から ν への cofinal sequence が $\mathbf{L}[Z]$ の元となるように順序数の集合 Z をとる. C_0, C_1 は $\mathbf{L}[Z]$ においても $\mu \times \nu$ の開集合で分離できないのは明らかなので, $\mathbf{L}[Z]$ においても $\mu \times \nu$ は正規でない. $\mathbf{L}[Z]$ は ZFC のモデルなので, Fact 16 より, $\omega < \mathrm{cf}^{\mathbf{L}[Z]}\mu < \nu$, または, $\omega < \mathrm{cf}^{\mathbf{L}[Z]}\nu < \mu$. $\mathrm{cf}^{\mathbf{L}[Z]}\mu = \mathrm{cf}\,\mu$ かつ $\mathrm{cf}^{\mathbf{L}[Z]}\nu = \mathrm{cf}\,\nu$ なので, (b) が成り立つ.

(b)→(a) 順序数 κ, μ と, κ から μ への strictly increasing かつ cofinal な連続写像 f に対して, $C_0(f) = \{\langle f(\xi), \xi\rangle : \xi < \kappa\}$, $C_1(f) = \mu \times \{\kappa\}$ とおく. ZFC の下で, κ が正則非可算基数, かつ, $\nu > \kappa$ ならば, $C_0(f)$ と $C_1(f)$ は $\mu \times \nu$ の開集合で分離できないことは PDL を使って容易に示すことができる.

$\omega < \mathrm{cf}\,\mu < \nu$ のとき, $\kappa = \mathrm{cf}\,\mu$ とおけば, κ から $\mathrm{cf}\,\mu$ への strictly increasing かつ cofinal な連続写像 f がある. $C_0(f)$ と $C_1(f)$ は $\mu \times \nu$ の disjoint な閉集合である. $\mu \times \nu$ が正規でないことを示すためには, $C_0(f)$ と $C_1(f)$ が $\mu \times \nu$ の開集合 U_0, U_1 で分離されたと仮定して, 矛盾を導けばよい. $U_0, U_1, f \in \mathbf{L}[Z]$ となるような順序数の集合 Z をとる. $\mathbf{L}[Z]$ は ZFC のモデルで, κ はそこで正則非可算基数であるが, $C_0(f)$ と $C_1(f)$ が $\mu \times \nu$ の開集合 $U_0, U_1 \in \mathbf{L}[Z]$ で分離されているので矛盾である. □

このことから, 次の Proposition が得られる.

PROPOSITION 18. [ZF] 非可算正則基数があれば, その最小のものを θ とし, なければ $\theta = \infty$ とする. ∞ はすべての順序数より大きいものとする. 順序数 μ, ν について, 以下が成り立つ.

(1) $\mu < \theta$ か $\nu < \theta$ ならば, $\mu \times \nu$ は正規である.

(2) $\theta < \infty$ ならば, $\theta \times \theta$ は正規である.

(3) $\theta < \infty$ ならば, $\theta \times (\theta + 1)$ は正規でない.

COROLLARY 19. [ZF] 次の2つの条件は同値である.

(i) 正則非可算基数は存在しない.

(ii) 順序数 μ, ν の積 $\mu \times \nu$ はかならず正規.

条件 (i) は一見奇異に見えるかもしれないが, 十分強い large cardinal がたくさんあればそのようなモデルが構成できることが知られている.

THEOREM 20. (Gitik [1]) ZFC+ "コンパクト基数からなる *proper class* が存在する" が無矛盾ならば, ZF+ "正則非可算基数は存在しない" も無矛盾である.

順序数の部分空間 A, B の積について再びみてみると, [3] 内の定理から, 次の Fact が得られる.

FACT 21. [ZFC]

(1) 順序数の部分空間 A, B について, $\sup A < \omega_1$ か $\sup B < \omega_1$ ならば, $A \times B$ は正規である.

(2) ω_1 の部分空間 A, B で, その積 $A \times B$ が正規でないものがある.

Main Theorem より, ZF では次のようになる.

PROPOSITION 22. [ZF]

(1) 順序数の部分空間 A, B について, $\sup A < \omega_1$ か $\sup B < \omega_1$ ならば, $A \times B$ は正規である.

(2) *Main Theorem* の条件 *(II)* が成り立たなければ, ω_1 の部分空間 A, B で, その積 $A \times B$ が正規でないものがある.

(3) *Main Theorem* の条件 *(II)* が成り立てば, ω_1 の2つの部分空間の積は常に正規だが, $\omega_1 \times (\omega_1 + 1)$ は正規でない.

Proof. (1) $\mu = \sup A < \omega_1$ とする. $A \times B$ の disjoint な閉集合 C_0, C_1 に対して, A, B, C_0, C_1 および, ω から μ への全射が少なくとも 1 つ $\mathbf{L}[Z]$ の元となるように, 順序数の集合 Z をとる. ZFC のモデル $\mathbf{L}[Z]$ 内で, $\mu = \sup A < \omega_1$ となるので, Fact 21 より $A \times B$ は $\mathbf{L}[Z]$ で正規, よって, C_0 と C_1 は $A \times B$ の開集合で分離される.

(2) Main Theorem より明らか.

(3) 前半は Main Theorem より明らか. 後半は, (II) (i) より ω_1 が正則なので, Proposition 18 (3) より, $\omega_1 \times (\omega_1 + 1)$ は正規でない. □

参考文献

[1] M. Gitik, *All uncountable cardinals can be singular*, IJM. 35 (1980), 61-88.

[2] A. Kanamori, *The Higher Infinite*, Springer-Verlag, 1997.

[3] N. Kemoto, H. Ohta and K. Tamano, *Products of spaces of ordinal numbers*, Topology Appl. 45 (1992), 119-130.

[4] K. Kunen, *Set theory*, North-Holland, Amsterdam, 1980.