数理解析研究所講究録 1421 巻 2005 年 44-54

次数 2 の Siegel 保型形式の Fourier 展開と $\mathrm{GSp}(2,\mathbf{R})$ 上の局所 Bessel 関数

上智大学理工学部　森山 知則
(Tomonori Moriyama)

§0. 序

本稿では，一般斜交群 $\mathrm{GSp}(2,\mathbf{R})$ 上の局所 Bessel 関数 (模型) の一意性やその明示公式についてのべる。Bessel 関数は，次数 2 の（非正則）Siegel 保型形式の Fourier 展開で中心的な役割を果たす。この関数については，すでに「定符号指標」に付随する場合には S.Niwa[Ni-2], T.Miyazaki[Mi-2], および T.Ishii[Is] による詳しい研究がある。一方,「不定符号指標」に付随する局所 Bessel 模型については，ほとんど調べられていないようである (但し，[Ni-1],[Mi-1],[Mi-3] を参照)。そこで，手始めに $\mathrm{GSp}(2,\mathbf{R})$ の一般化主系列表現の局所 Bessel 模型を「不定符号指標」に付随するときに調べてみた。具体的には，この模型の一意性を，簡約リー群上の緩増大関数に関する Harish-Chandra の一定理を用いて示すことが出来た。また局所 Bessel 関数の明示公式が部分的ではあるが得られた。これらの結果はもっと広いクラスの $\mathrm{GSp}(2,\mathbf{R})$ の許容表現についても得られると期待している。

§1 で Siegel 保型形式の Fourier 展開における Bessel 関数の役割について説明し，§2 で我々の結果を述べる。

§1. 次数 2 の Siegel 保型形式の Fourier 展開

この節では，次数 2 の Siegel 保型形式の Fourier 展開と Bessel 関数，Whittaker 関数との関係について述べる ([Ps], [Su] も参照)。

(1.1) Fourier 展開の第一段階. G を有理数体 $\mathbf{Q}$ 上定義された次数 2 の一般斜交群とする:

$$\mathsf{G} = GSp(2) := \{g \in GL(4) \,\big|\, {}^t g J_4 g = \nu(g) J_4,\ \exists \nu(g) \neq 0\}, \quad J_4 = \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ -1_2 & 0_2 \end{pmatrix}.$$

G の中心は $\mathsf{Z} := \{z1_4 \in G | z \in \mathbf{G}_m\}$ で与えられる。中心指標 $\omega : \mathbf{Q}^\times \backslash \mathbf{A}^\times \to \mathbf{C}^{(1)}$ をもつ $\mathsf{G}_{\mathbf{A}}$ 上の保型形式及び尖点形式のなす空間をそれぞれ $\mathcal{A}(\mathsf{G}_{\mathbf{Q}}\mathsf{Z}_{\mathbf{A}}\backslash \mathsf{G}_{\mathbf{A}};\omega)$ 及び $\mathcal{A}^{cusp}(\mathsf{G}_{\mathbf{Q}}\mathsf{Z}_{\mathbf{A}}\backslash \mathsf{G}_{\mathbf{A}};\omega)$ で表す。さて，保型形式 $F \in \mathcal{A}(\mathsf{G}_{\mathbf{Q}}\mathsf{Z}_{\mathbf{A}}\backslash \mathsf{G}_{\mathbf{A}};\omega)$ を G の Siegel 放物型部分群 P に沿って Fourier 展開する事を考える。ここで Siegel 放物型部分群 P とその Levi 分解 $\mathsf{P} = \mathsf{MN}$ を次の様に固定する:

$$\mathsf{P} := \left\{ \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline & * \end{array} \right) \in \mathsf{G} \right\};$$

$$\mathsf{M} := \left\{ \left(\begin{array}{c|c} m & \\ \hline & \lambda\, {}^t m^{-1} \end{array} \right) \Big| m \in \mathrm{GL}(2), \lambda \in \mathrm{GL}(1) \right\};$$

$$\mathsf{N} := \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 1_2 & X \\ \hline & 1_2 \end{array} \right) \Big| X \in \mathrm{Sym}^2 \right\}.$$

$\mathsf{N_Q}\backslash\mathsf{N_A}$ はアーベル群で，その指標は $\beta\in\mathrm{Sym}^2(\mathbf{Q})$ を使って

$$\psi_\beta : \mathsf{N_Q}\backslash\mathsf{N_A} \ni \left(\begin{array}{c|c} 1_2 & X \\ \hline & 1_2 \end{array}\right) \mapsto \psi(\mathrm{tr}(\beta X)) \in \mathbf{C}^{(1)}$$

とかける。ここで，$\psi : \mathbf{Q}\backslash\mathbf{A} \to \mathbf{C}^{(1)}$ は $\psi(t_\infty) = \exp(2\pi\sqrt{-1}t_\infty)$ $(t_\infty\in\mathbf{R})$ なる指標である。すると，F は，

$$(1.1) \qquad F(g) = \sum_{\beta\in\mathrm{Sym}^2(\mathbf{Q})} F_\beta(g), \qquad F_\beta(g) := \int_{\mathsf{N_Q}\backslash\mathsf{N_A}} dn\, F(ng)\psi_\beta^{-1}(n)$$

と Fourier 展開される。したがって，保型形式 F は $\{F_\beta|\beta\in\mathrm{Sym}^2(\mathbf{Q})\}$ によって決まるわけだが，F_β たちのもつ情報には重複がある。すなわち，

補題 1. 2つの2次対称行列 $\beta,\beta'\in\mathrm{Sym}^2(\mathbf{Q})$ をとる。$m\in\mathrm{GL}(2)_\mathbf{Q}$ 及び $\lambda\in\mathbf{Q}^\times$ が存在して $\beta'=\lambda^{-1}\,{}^tm\beta m$ が成立すると仮定する。このとき

$$F_{\beta'}(g) = F_\beta(\left(\begin{array}{c|c} m & \\ \hline & \lambda\,{}^tm^{-1} \end{array}\right) g), \quad g\in\mathsf{G_A}$$

が成立する。

また, Fourier 展開 (1.1) より，F がゼロでない尖点形式ならば少なくとも次のいずれかが成立する：

(a): $\det(\beta)=0$ なる 対称行列 $\beta(\neq 0_2)\in M_2(\mathbf{Q})$ に対して，$F_\beta(g)\not\equiv 0$;

(b): $\det(\beta)>0$ なる対称行列 $\beta\in M_2(\mathbf{Q})$ に対して，$F_\beta(g)\not\equiv 0$;

(c): $\det(\beta)<0$ なる対称行列 $\beta\in M_2(\mathbf{Q})$ に対して，$F_\beta(g)\not\equiv 0$。

実は，尖点形式に対しては，**(b)** または **(c)** が必ず成立する ([Li])。正則 Siegel 尖点形式では，**(b)** のみが成立し，**(a)**,**(c)** は成立しない。一般には3条件は排反ではない。

(1.2) Fourier 展開の第2段階. さて，保型的 L-関数等への応用を考えると，上述の Fourier 展開をさらに細分化した展開を考える必要がある。まず $\det(\beta)\neq 0$ のときを考える。$GL(2)$ の部分群 T_β を

$$\mathsf{T}_\beta := \{u\in GL(2)|\ {}^tu\beta u = \det(u)\beta\}$$

で定義する。これは similitude 付きの直交群 $\mathrm{GO}(\beta)$ の (Zariski 位相に関する) 単位元連結成分に同型である。また，$\mathbf{Q}$ 上の2次分離代数 K_β を

$$K_\beta := \mathbf{Q}[t]/(t^2+\det\beta) \cong \begin{cases} \mathbf{Q}(\sqrt{-\det\beta}) & -\det\beta\notin(\mathbf{Q}^\times)^2; \\ \mathbf{Q}\oplus\mathbf{Q} & -\det\beta\in(\mathbf{Q}^\times)^2, \end{cases}$$

で定めれば，$-\det\beta\notin(\mathbf{Q}^\times)^2$ または $-\det\beta\in(\mathbf{Q}^\times)^2$ に応じて，$\mathsf{T}_\beta\cong\mathrm{Res}_{K_\beta/\mathbf{Q}}\mathrm{GL}(1)$ または $\mathsf{T}_\beta\cong\mathrm{GL}(1)\times\mathrm{GL}(1)$ となる。T_β を埋め込み

$$\mathsf{T}_\beta \ni u \mapsto \left(\begin{array}{c|c} u & \\ \hline & \det(u)\,{}^tu^{-1} \end{array}\right) \in \mathsf{G}$$

によって，G の部分代数群とみなす。さて，補題 1.1 より

$$F_\beta(ug) = F_\beta(g), \qquad \forall u\in\mathsf{T}_{\beta,\mathbf{Q}}$$

が成立する。そこで,

$$\Xi_\omega := \{\chi \in \mathsf{T}_{\beta,\mathbf{Q}}\backslash\mathsf{T}_{\beta,\mathbf{A}} \to \mathbf{C}^{(1)} |\ 指標,\ \chi(z)=\omega(z)\ (z\in \mathsf{Z}_\mathbf{A})\}$$
$$\Xi_0 := \{\chi \in \mathsf{T}_{\beta,\mathbf{Q}}\backslash\mathsf{T}_{\beta,\mathbf{A}} \to \mathbf{C}^{(1)} |\ 指標,\ \chi(z)=1\ (z\in \mathsf{Z}_\mathbf{A})\}$$

と置き，指標 $\chi \in \Xi_\omega$ に対して，大域 Bessel 関数 $B_F^{\chi\cdot\psi_\beta}(g)$ を

$$B_F^{\chi\cdot\psi_\beta}(g) := \int_{\mathsf{Z}_\mathbf{A}\mathsf{T}_{\beta,\mathbf{Q}}\backslash\mathsf{T}_{\beta,\mathbf{A}}} F_\beta(ug)\chi(u)^{-1}du, \qquad g\in \mathsf{G}_\mathbf{A} \tag{1.2}$$

で (積分が収束するときに) 定義する。大域 Bessel 関数について，次が成立する：

命題 2. (i) $-\det(\beta)\notin (\mathbf{Q}^\times)^2$ とする。このとき，積分 (1.2) は絶対収束する。$\mathsf{Z}_\mathbf{A}\mathsf{T}_{\beta,\mathbf{Q}}\backslash\mathsf{T}_{\beta,\mathbf{A}}$ の体積を 1 となるように正規化すると，次の反転公式

$$F_\beta(g) = \sum_{\chi\in\Xi_\omega} B_F^{\chi\cdot\psi_\beta}(g)$$

が成立する。
(ii) $-\det(\beta)\in (\mathbf{Q}^\times)^2$ とする。このとき，F が尖点形式ならば，積分 (1.2) は絶対収束する。$\chi_0\in\Xi_\omega$ を任意に一つ固定し，全単射 $\Xi_0 \ni \chi \mapsto \chi_0\chi \in \Xi_\omega$ を通じて指標群 Ξ_0 上の *Haar* 測度を Ξ_ω に移す (この Ξ_ω 上の測度は，χ_0 のとり方によらない)。すると，次の反転公式

$$F_\beta(g) = \int_{\chi\in\Xi_\omega} B_F^{\chi\cdot\psi_\beta}(g)d\chi.$$

が成立する。

注意 (i) $-\det(\beta)\notin (\mathbf{Q}^\times)^2$ のときには，$\mathsf{Z}_\mathbf{A}\mathsf{T}_{\beta,\mathbf{Q}}\backslash\mathsf{T}_{\beta,\mathbf{A}} \cong \mathbf{A}^\times K_\beta^\times\backslash\mathbf{A}_{K_\beta}^\times$ はコンパクトである。一方，$-\det(\beta)\in (\mathbf{Q}^\times)^2$ のときには $\mathsf{Z}_\mathbf{A}\mathsf{T}_{\beta,\mathbf{Q}}\backslash\mathsf{T}_{\beta,\mathbf{A}} \cong \mathbf{Q}^\times\backslash\mathbf{A}^\times$ は非コンパクトであるが，F を尖点形式ならば積分 (1.2) は収束する。
(ii) 文献によっては，Bessel 関数を一般化 Whittaker 関数 ([Ni-1],[Mi-2]), Siegel-Whittaker 関数 ([Is]), ないしは 一般化 Bessel 関数 ([No], [No-Ps]) と呼んでいる。

(1.3) 局所 Bessel 関数. $\mathsf{R}_\beta = \mathsf{T}_\beta\mathsf{N}$ と置き，$\mathsf{R}_{\beta,\mathbf{A}}$ の指標 $\chi\cdot\psi_\beta$ を

$$(\chi\cdot\psi_\beta)(un) = \chi(u)\psi_\beta(n), \qquad (u,n)\in \mathsf{T}_{\beta,\mathbf{A}}\times \mathsf{N}_\mathbf{A}$$

で定める。上述の大域 Bessel 関数 $B_F^{\chi\cdot\psi_\beta}(g)$ は，次の誘導表現の空間に属す:

$$C^\infty(\mathsf{R}_{\beta,\mathbf{A}}\backslash\mathsf{G}_\mathbf{A};\chi\cdot\psi_\beta) := \{B:\mathsf{G}_\mathbf{A}\to\mathbf{C} | B(rg) = (\chi\cdot\psi_\beta)(r)B(g), \quad (r,g)\in \mathsf{R}_{\beta,\mathbf{A}}\times\mathsf{G}_\mathbf{A}\}$$

より詳しく，保型形式 F が緩増大であることから，$B_F^{\chi\cdot\psi_\beta}(g)$ は

$$C_{mg}^\infty(\mathsf{R}_{\beta,\mathbf{A}}\backslash\mathsf{G}_\mathbf{A};\chi\cdot\psi_\beta) := \{B\in C^\infty(\mathsf{R}_{\beta,\mathbf{A}}\backslash\mathsf{G}_\mathbf{A};\chi\cdot\psi_\beta) | B\ は緩増大\ \}$$

に属すことが分かる。保型形式の空間 $\mathcal{A}(\mathsf{G}_\mathbf{Q}\mathsf{Z}_\mathbf{A}\backslash\mathsf{G}_\mathbf{A};\omega)$ の (既約) 部分加群 $\Pi = \otimes'\Pi_v \hookrightarrow \mathcal{A}(\mathsf{G}_\mathbf{Q}\mathsf{Z}_\mathbf{A}\backslash\mathsf{G}_\mathbf{A};\omega)$ を一つとる。すると，

$$\Pi \ni F \mapsto B_F^{\chi\cdot\psi_\beta} \in C_{mg}^\infty(\mathsf{R}_{\beta,\mathbf{A}}\backslash\mathsf{G}_\mathbf{A};\chi\cdot\psi_\beta)$$

は $(\mathfrak{g},K_\infty)\times\mathsf{G}_{\mathbf{A}_\mathrm{f}}$-加群の間の準同型を定める。つまり，$\Pi$ が $C_{mg}^\infty(\mathsf{R}_{\beta,\mathbf{A}}\backslash\mathsf{G}_\mathbf{A};\chi\cdot\psi_\beta)$ の部分加群として実現される。一般に，Π と同型な $C_{mg}^\infty(\mathsf{R}_{\beta,\mathbf{A}}\backslash\mathsf{G}_\mathbf{A};\chi\cdot\psi_\beta)$ の部分加群を Π の大域 Bessel 模型と呼ぶ。ここで，大域 Besse 模型の一意性すなわち，絡空間

$$\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K_\infty)\times\mathsf{G}_{\mathbf{A}_\mathrm{f}}}(\Pi, C_{mg}^\infty(\mathsf{R}_{\beta,\mathbf{A}}\backslash\mathsf{G}_\mathbf{A};\chi\cdot\psi_\beta),$$

が高々1次元であることが望まれる。大域Bessel模型の一意性を考察するために，対応する局所的な問題を考える。指標 $\chi\cdot\psi_\beta$ の $R_{\beta,\mathbf{Q}_v}$ への制限を $(\chi\cdot\psi_\beta)_v$ と書き，誘導表現の空間

$$C^\infty(\mathsf{R}_{\beta,\mathbf{Q}_v}\backslash\mathsf{G}_{\mathbf{Q}_v};(\chi\cdot\psi_\beta)_v):=\{B:\mathsf{G}_{\mathbf{Q}_v}\to\mathbf{C}|B(rg)=(\chi\cdot\psi_\beta)_v(r)B(g),\quad (r,g)\in\mathsf{R}_{\beta,\mathbf{Q}_v}\times\mathsf{G}_{\mathbf{Q}_v}\}$$

を定める。$\mathbf{Q}_v\cong\mathbf{R}$ のときには，

$$C^\infty_{mg}(\mathsf{R}_{\beta,\mathbf{R}}\backslash\mathsf{G}_{\mathbf{R}};(\chi\cdot\psi_\beta)_\infty):=\{B\in C^\infty(\mathsf{R}_{\beta,\mathbf{R}}\backslash\mathsf{G}_{\mathbf{R}};(\chi\cdot\psi_\beta)_\infty)|B \text{ は緩増大}\}$$

なる部分空間も考える。このとき次が知られている：

命題 3 (([No], [No-Ps])). $v=p<\infty$ を有限素点とする。$\mathsf{G}_{\mathbf{Q}_p}$ の任意の既約許容表現 π に対して，絡空間 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{G}_{\mathbf{Q}_p}}(\pi,C^\infty(\mathsf{R}_{\beta,\mathbf{Q}_p}\backslash\mathsf{G}_{\mathbf{Q}_p};(\chi\cdot\psi_\beta)_p)$ は高々1次元である。

ゼロでない絡作用素

$$\Psi\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{G}_{\mathbf{Q}_p}}(\pi,C^\infty(\mathsf{R}_{\beta,\mathbf{Q}_p}\backslash\mathsf{G}_{\mathbf{Q}_p};(\chi\cdot\psi_\beta)_p))$$

が存在するとき，$B_\xi(g_p):=\Psi(\xi)(g)\in C^\infty(\mathsf{R}_{\beta,\mathbf{Q}_p}\backslash\mathsf{G}_{\mathbf{Q}_p};(\chi\cdot\psi_\beta)_p)$ $(\xi\in\pi,g_p\in\mathsf{G}_{\mathbf{Q}_p})$ を局所Bessel関数といい，その全体 $\{B_\xi|\xi\in\pi\}$ を π の局所Bessel模型という。π が標準的極大コンパクト部分群 $K_p:=\mathsf{G}_{\mathbf{Q}_p}\cap\mathrm{GL}(4;\mathbf{Z}_p)$ についての不変ベクトル $\xi_0\in\pi^{K_p}$ をもつときには，B_{ξ_0} の公式が T.Sugano [Su, Proposition 2-5 (i)] によって得られている。
上の命題から，標準的な議論によって，もし保型形式 $F\in\Pi$ が制限テンソル積の中で $\otimes'\xi_v\in\otimes'\Pi_v$ と分解しているのならば，大域Bessel関数 $B_F^{\chi\cdot\psi_\beta}(g)$ は

$$B_F^{\chi\cdot\psi_\beta}(g)=B^{(\infty)}(g_\infty)\times\prod_{p<\infty}B^{(p)}_{\xi_p}(g_p),\quad g=(g_v)\in\mathsf{G}_{\mathbf{A}}$$

と局所Bessel関数 $B^{(p)}_{\xi_p}$ たちを用いて書ける。ここで，$B^{(\infty)}\in C^\infty_{mg}(\mathsf{R}_{\beta,\mathbf{R}}\backslash\mathsf{G}_{\mathbf{R}};(\chi\cdot\psi_\beta)_\infty)$ である。しかしながら，ここで問題となるのは，命題3の無限素点での対応物

$$\dim_{\mathbf{C}}\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g},K}(\Pi_\infty,C^\infty_{mg}(\mathsf{R}_{\beta,\mathbf{R}}\backslash\mathsf{G}_{\mathbf{R}};(\chi\cdot\psi_\beta)_\infty)\leqslant 1 \tag{1.3}$$

が一般にはまだ示されていないということである。そのため，$B^{(\infty)}$ が Π_∞ と ξ によって定数倍を除いて一意に定まるか分からない。第2節では，この局所Bessel模型の一意性 (1.3) が π_∞ がある一般化主系列表現では成立していることを示す。

(1.4) $\det(\beta)=0$ **のとき–大域Whittaker模型と定数項–.** $\det(\beta)=0$ のときにも，F_β をさらに展開する事を考える。まず，$\beta\neq 0_2$ のときだが，補題1.1によって，$\beta=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ と仮定してよい。すると，$\mathbf{Q}\backslash\mathbf{A}$ 上の関数

$$h_F(x_0;g)=F_\beta(\left(\begin{array}{cc|cc}1&x_0&&\\&1&&\\\hline&&1&\\&&-x_0&1\end{array}\right)g)$$

に Fourier 逆変換公式を適用して，

$$F_\beta(g)=\int_{\mathbf{Q}\backslash\mathbf{A}}h_F(x_0;g)dx_0+\sum_{\alpha\in\mathbf{Q}^\times}\mathcal{W}_F(\left(\begin{array}{cc|cc}\alpha&&&\\&1&&\\\hline&&\alpha^{-1}&\\&&&1\end{array}\right)g)$$

を得る。ここで，$\mathcal{W}_F$ は

$$\mathcal{W}_F(g)=\int_{\mathbf{Q}\backslash\mathbf{A}} h_F(x_0;g)\psi(x_0)^{-1}dx_0$$

で定義される関数で，$h_F(x_0;g)$ の定義を代入してみれば分かるように，これはいわゆる大域 Whittaker 関数に他ならない。一方，$\int_{\mathbf{Q}\backslash\mathbf{A}} h_F(x_0;g)dx_0$ は，F の定数項をさらに積分したものだから，F が尖点形式ならばゼロである。ここまでの議論で次の命題のうち (i) $\Leftrightarrow$ (ii) が示されたことに注意:

命題 4. 尖点形式 $F\in\mathcal{A}^{cusp}(\mathsf{G}_{\mathbf{Q}}\mathsf{Z}_{\mathbf{A}}\backslash\mathsf{G}_{\mathbf{A}};\omega)$ について，次の 3 条件は同値である：
(i) 条件 **(a)** がなりたつ;
(ii) F の大域 *Whittaker* 関数 $\mathcal{W}_F$ が消えない;
(iii) $-\det(\beta)\in(\mathbf{Q}^{\times})^2$ なる $\beta\in\mathrm{Sym}^2(\mathbf{Q})$ に対して，$F_\beta\neq 0$.

Proof. (iii) $\Rightarrow$ (ii) は，例えば [K-R-S, Lemma 8.2] にある。(ii) $\Rightarrow$ (iii) を示そう。$w_2\in\mathsf{G}_{\mathbf{Q}}$ を置換 $(2,4)$ に対応する Weyl 群の元する。$\mathcal{W}_F(gw_2)\neq 0$ から，

$$\int_{(\mathbf{Q}\backslash\mathbf{A})^2} F(\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & x_1 & x_2\\ & 1 & x_2 & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1\end{array}\right) g)\psi(x_2)\,dx_1dx_2\neq 0$$

である。これを, 2 行 4 列の成分についてさらにフーリエ展開すれば, 適当な $a\in\mathbf{Q}$ が存在して $\beta=\begin{pmatrix}0 & 1/2\\ 1/2 & a\end{pmatrix}$ に対して $F_\beta\neq 0$ となることがわかる。 □

最後に，$\beta=0_2$ のときを考える。F が尖点形式ならば，$F_{0_2}=0$ である。F が尖点形式でないときには，上と同様にして $h_F(x_0;g)$ を定義し，その x_0 に関するフーリエ展開を書くことがもちろんできる。この場合には、「退化指標に関する Whittaker 関数」が出てくる。

§2. 局所 Bessel 関数の一意性と明示公式

(2.1) 主結果 主結果を述べるために，ここで問題とする一般化主系列表現を定義する。G の Jacobi 型放物型部分群 P_1 は

$$\mathsf{P}_1:=\left\{\left(\begin{array}{cc|cc} * & * & * & *\\ & * & * & *\\ \hline & & * & \\ & & * & *\end{array}\right)\in\mathsf{G}\right\}$$

で与えられる。その $\mathbf{R}$-値点のなす群 $P_1 := \mathsf{P}_{1,\mathbf{R}}$ の Langlands 分解 $P_1 = M_1A_1N_1$ を次の様に固定する:

$$M_1 := \left\{ \mathrm{diag}(\epsilon_0\epsilon_1, \epsilon_0, \epsilon_1, 1) \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & a & & b \\ \hline & & 1 & \\ & c & & d \end{array}\right) \Big| \epsilon_0, \epsilon_1 = \pm 1, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbf{R}) \right\};$$

$$A_1 := \left\{ z_\infty \mathrm{diag}(a_1, 1, a_1^{-1}, 1) | z_\infty, a_1 > 0 \right\}$$

$$N_1 := \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & * & * & * \\ & 1 & * & \\ \hline & & 1 & \\ & & * & 1 \end{array}\right) \in \mathsf{G}_\mathbf{R} \right\}.$$

$\sigma \in \widehat{M_1}$ を $\sigma|_{SL(2,\mathbf{R})} = D_n \oplus D_{-n}$ $(n \geqslant 1)$ および $\sigma|_{SL(2,\mathbf{R})}(\mathrm{diag}(-1,1,-1,1)) = (-1)^n$ で特徴付けられる M_1 の既約ユニタリ表現とする。但し，D_m は極小 $SO(2)$-type m をもつ $SL(2,\mathbf{R})$ の離散系列表現またはその極限を表す。また，A_1 の quasi-character

$$A_1 \ni z_\infty \mathrm{diag}(a_1, 1, a_1^{-1}, 1) \mapsto a_1^{\nu_1} \in \mathbf{C}^\times$$

を $a_1^{\nu_1}$ と書く。このとき誘導表現 $I(\mathsf{P}_{1,\mathbf{R}}; \sigma, \nu_1) = \mathrm{Ind}(\mathsf{G}_\mathbf{R}, \mathsf{P}_{1,\mathbf{R}}; \sigma \otimes a_1^{\nu_1} \otimes 1_{N_1})$ を一般化主系列表現 (あるいは P_1-主系列表現) という。$\mathsf{G}_\mathbf{R}$ のリー環を $\mathfrak{g}$ とし，極大コンパクト部分群 K を $K = \mathsf{G}_\mathbf{R} \cap O(4)$ ととる。$Sp(2,\mathbf{R})$ の極大コンパクト部分群 $K_0 := K \cap Sp(2,\mathbf{R})$ は

$$K_0 = \left\{ k_{A,B} := \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in \mathsf{G}_\mathbf{R} | A + \sqrt{-1}B \in U(2) \right\}$$

となる。$\xi_0 \in I(\mathsf{P}_{1,\mathbf{R}}; \sigma, \nu_1)$ を

$$k_{A,B} \cdot \xi_0 = \det(A + \sqrt{-1}B)^n \xi_0, \qquad k_{A,B} \in K_0$$

で特徴付けられるベクトルとする。本稿の主結果は次の通り：

定理 5. $\pi_\infty = I(\mathsf{P}_{1,\mathbf{R}}; \sigma, \nu_1)$ であるとする。$\beta \in \mathrm{Sym}^2(\mathbf{R})$ を不定符号実対称行列とする。$\mathsf{T}_{\beta,\mathbf{R}}$ の指標 χ を「一般の位置」にとる *(i.e.* 後述の条件 (2.6) を満たすようにとる*)*。
(i) 絡空間 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g},K}(\pi_\infty, C^\infty_{mg}(\mathsf{R}_{\beta,\mathbf{R}} \backslash \mathsf{G}_\mathbf{R}; (\chi \cdot \psi_\beta)_\infty))$ は高々 1 次元である。
(ii) 上の絡空間の元 Ψ に対して，$B_{\xi_0} := \Psi(\xi_0) \in C^\infty_{mg}(\mathsf{R}_{\beta,\mathbf{R}} \backslash \mathsf{G}_\mathbf{R}; (\chi \cdot \psi_\beta)_\infty$ のある 1 次元トーラス上での値は *Meijer* の G 関数で書ける ((2.10) を見よ)。

注意 $\beta \in \mathrm{Sym}^2(\mathbf{R})$ を定符号実対称行列のときには，対応する事実は [Mi-2] で実質的に示されている。[Mi-2] では，本稿とは，増大度条件のつけ方等が異なるが，上の定理と同様の定式化も可能である ($supp(B_{\xi_0}) \subset \mathsf{G}^+_\mathbf{R} := \{g \in \mathsf{G}_\mathbf{R} | \nu(g) > 0\}$ を示す必要があるが，これも [Mi-2] の計算から分かる)。

(2.2) 局所 Bessel 関数の満たす微分方程式. T. Miyazaki([Mi-2]) は，ξ_0 から生じる局所 Bessel 関数 $B^{(\infty)}_{\xi_0} \in C^\infty_{mg}(R_{\beta,\mathbf{R}} \backslash \mathsf{G}_\mathbf{R}; (\chi \cdot \psi_\beta)_\infty)$ の満たす微分方程式系を構成した。まず，$\beta = \begin{pmatrix} c_1 & \\ & c_2 \end{pmatrix}$ とすると，

$$Lie(\mathsf{T}_\beta) = \mathbf{R} \cdot Z \oplus \mathbf{R} \cdot Y_\beta, \qquad Y_\beta := \left(\begin{array}{cc|cc} & c_1^{-1} & & \\ -c_2^{-1} & & & \\ \hline & & & c_2^{-1} \\ & & -c_1^{-1} & \end{array}\right).$$

補題 6. $A := \{\mathrm{diag}(a_1, a_2, a_1^{-1}, a_2^{-1}) | a_i > 0\}$ と置く。
(i) $c_1c_2 > 0$ とする。$\mathsf{T}_{\beta,\mathbf{R}} \cong \mathbf{C}^\times$ は連結である。また，次の分解が成立する：

$$\mathsf{G}_{\mathbf{R}} = \mathsf{R}_{\beta,\mathbf{R}} A \langle \begin{pmatrix} & -1_2 \\ 1_2 & \end{pmatrix} \rangle K_0.$$

(ii) $c_1c_2 < 0$ とする。$c := |c_2/c_1| > 0$ と置くと，

$$\mathsf{T}_{\beta,\mathbf{R}} = \mathsf{T}^\circ_{\beta,\mathbf{R}} \times \langle -1_4, \epsilon_\beta \rangle \cong \mathbf{R}^\times \times \mathbf{R}^\times, \qquad \epsilon_\beta := \left(\begin{array}{cc|cc} & \sqrt{c} & & \\ 1/\sqrt{c} & & & \\ \hline & & & -1/\sqrt{c} \\ & & -\sqrt{c} & \end{array}\right)$$

が成立する。また，分解 $\mathsf{G}_{\mathbf{R}} = \mathsf{R}_{\beta,\mathbf{R}} A K_0$ が成立する.

いま, β が不定符号なので，$c_1 > 0 > c_2$ として一般性を損なわない。補題 6 の (ii) から，$B^{(\infty)}_{\xi_0}$ は A 上の値で決まる。

$$x = 2\pi(c_1a_1^2 - c_2a_2^2), \qquad y = 2\pi(c_1a_1^2 + c_2a_2^2)$$

によって新しい座標 (x, y) を導入し，

$$B_{\xi_0}(\mathrm{diag}(a_1, a_2, a_1^{-1}, a_2^{-1})) = (\sqrt{|c_1|}a_1)^{n+1}(\sqrt{|c_2|}a_2)^{n+1}\exp(-2\pi(c_1a_1^2 + c_2a_2^2))\varphi(x, y)$$

によって，関数 $\varphi(x, y)$ を定める。[Mi, page 260, (7.3), (7.4)] によれば，$\varphi(x, y)$ は

$$\Big\{x^2\big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\big) + x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{c_1c_2\chi(Y_\beta)^2}{4}\Big\}\varphi(x, y) = 0;$$
$$\Big\{x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + (n+1)\big(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\big)$$
$$- (x^2 + y^2)\frac{\partial}{\partial y} - 2xy\frac{\partial}{\partial x} - y + \frac{n^2 - \nu_1^2}{4}\Big\}\varphi(x, y) = 0.$$

を満たす。$\varphi(x, y) = \sum_{m=0}^\infty \varphi_m(x)y^m$ と展開すると，$\varphi_m(x)$ は次の微分差分方程式系を満たす:

$$\Big\{\big(x\frac{\partial}{\partial x}\big)^2 + \chi(Y_\beta)^2\frac{c_1c_2}{4}\Big\}\varphi_m(x) = (m+2)(m+1)x^2\varphi_{m+2}(x), \qquad m \geqslant 0;$$
$$\big(2x\frac{\partial}{\partial x} + m\big)\varphi_{m-1}(x) - \Big\{\big(x\frac{\partial}{\partial x}\big)^2 + (n+2m)x\frac{\partial}{\partial x} + m(m+n) + \frac{n^2 - \nu_1^2}{4}\Big\}\varphi_m(x)$$
$$+ (m+1)x^2\varphi_{m+1}(x) = 0, \quad m \geqslant 0.$$

これらの関係式から，$\varphi_0(x)$ を決めれば，次々に $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots$ が決まる。また，$\varphi_0(x)$ は次の単独方程式を満たす:

$$\tag{2.4} \begin{aligned} &\Big\{\big(x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{n-2+\nu_1}{2}\big)\big(x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{n-2-\nu_1}{2}\big)\big(x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{n+\nu_1}{2}\big)\big(x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{n-\nu_1}{2}\big) \\ &- x^2\big(x\frac{\partial}{\partial x} + 1 + \rho_\infty\big)\big(x\frac{\partial}{\partial x} + 1 - \rho_\infty\big)\Big\}\varphi_0(x) = 0. \end{aligned}$$

但し，ここで $\rho_\infty := \dfrac{\chi(Y_\beta)\sqrt{-c_1c_2}}{2} \in \sqrt{-1}\mathbf{R}$ と置いた。

(2.3) 局所 Bessel 関数の明示公式. 方程式 (2.4) は一般化超幾何方程式なので, その解空間はいわゆる Meijer の G-関数 ([Er],[Me]) で張られる。まず,

$$(2.5)\quad \begin{aligned}
\varphi_0^{<1>}(x) &= G_{2,4}^{4,0}\left(\frac{x^2}{4}\Big|\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2 & & \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \beta_4\end{matrix}\right)\\
\varphi_0^{<2>}(x) &= G_{2,4}^{4,0}\left(\frac{x^2}{4}e^{2\pi\sqrt{-1}}\Big|\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2 & & \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \beta_4\end{matrix}\right)\\
\varphi_0^{<3>}(x) &= G_{2,4}^{4,1}\left(\frac{x^2}{4}e^{\pi\sqrt{-1}}\Big|\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2 & & \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \beta_4\end{matrix}\right)\\
\varphi_0^{<4>}(x) &= G_{2,4}^{4,1}\left(\frac{x^2}{4}e^{\pi\sqrt{-1}}\Big|\begin{matrix}\alpha_2, & \alpha_1 & & \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \beta_4\end{matrix}\right).
\end{aligned}$$

と置こう。ここで、パラメータ $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \cdots, \beta_4$ は

$$\alpha_1 = \frac{1+\rho_\infty}{2}, \qquad \alpha_2 = \frac{1-\rho_\infty}{2},$$

$$\beta_1 = \frac{2-n+\nu_1}{2}, \quad \beta_2 = \frac{2-n-\nu_1}{2}, \quad \beta_3 = \frac{-n+\nu_1}{2}, \quad \beta_4 = \frac{-n-\nu_1}{2}$$

である。以下, 指標 $\chi : \mathsf{T}_{\beta,\mathbf{R}} \to \mathbf{C}^{(1)}$ が

$$(2.6)\qquad \alpha_j - \beta_k \notin \{1,2,3,\cdots\} \quad (1 \leqslant j \leqslant 2, 1 \leqslant k \leqslant 4), \qquad \alpha_1 - \alpha_2 \notin \mathbf{Z}.$$

を満たすことを仮定する。この仮定の下で上の 4 つの解が線型独立なことは, 次の Barnes による $\varphi_0^{(k)}(x)$ たちの漸近挙動 ([Me, §2]) から従う。まず, $\varphi_0^{(1)}(x)$, $\varphi_0^{(2)}(x)$ について, $x \to \infty$ のとき,

$$(2.7)\quad \begin{aligned}
\varphi_0^{<1>}(x) &= e^{-x}(\frac{x^2}{4})^{-(2n+1)/4}(\sqrt{\pi} + O(x^{-2}));\\
\varphi_0^{<2>}(x) &= e^{x}(\frac{x^2}{4})^{-(2n+1)/4}(\sqrt{\pi} + O(x^{-2}));
\end{aligned}$$

である。また, $\varphi_0^{(3)}(x)$, $\varphi_0^{(4)}(x)$ について, $x \to \infty$ のとき, 次の漸近展開が成立する：

(2.8)

$$\varphi_0^{<3>}(x) \sim C_3 \times (x^2)^{-1+\alpha_1} {}_4F_1\left(\begin{matrix}1-\beta_1-\alpha_1, 1-\beta_1-\alpha_1, 1-\beta_1-\alpha_1, 1-\beta_1-\alpha_1 \\ 1+\alpha_1-\alpha_2\end{matrix}\Big| -\frac{4}{x^2}\right);$$

$$\varphi_0^{<4>}(x) \sim C_4 \times (x^2)^{-1+\alpha_2} {}_4F_1\left(\begin{matrix}1-\beta_1-\alpha_2, 1-\beta_1-\alpha_2, 1-\beta_1-\alpha_2, 1-\beta_1-\alpha_2 \\ 1+\alpha_2-\alpha_1\end{matrix}\Big| -\frac{4}{x^2}\right).$$

ここで, C_3, C_4 は non-zero constant である。漸近挙動 (2.7) と緩増大条件から, $\varphi_0(x) = \sum_{k=1}^4 A_k \varphi_0^{<k>}(x)$ と書いたときに, $A_2 = 0$ が出る。さらに, $A_3 = A_4 = 0$ を示そう。そのために, 次の『Harish-Chandra の補題』([HC-2, Lemma 14, page15], [HC-1, Theorem 1]) を用いる。

命題 7 (Harish-Chandra). $G \subset GL(N, \mathbf{R})$ を簡約線型リー群とし, K をその極大コンパクト部分群とする。G 上のノルムを $||g|| := \max\{g_{i,j}, (g^{-1})_{i,j} | 1 \leqslant i,j \leqslant N\}$ で定める。G 上の C^∞ 関数 F が緩増大, すなわち, ある正定数 $C, R > 0$ が存在して, $|F(g)| < C||g||^R$

を満たすとする。このとき，さらに F が，$Z(\mathrm{Lie}(G))$-有限かつ右 K-有限ならば，F は一様に緩増大 (*uniformly of moderate growth*) である。ここで，F が一様に緩増大とは，

$$\exists r > 0,\ \forall X \in U(\mathrm{Lie}(G))\ s.t.\ \sup\{\frac{|F(g;X)|}{||g||^r} | g \in G\} < \infty$$

が成立する事をいう (r が X によらず一様にとれる)。

いま，$B_{\xi_0}(g)$ は命題の仮定を満たすから，一様に緩増大である。$E_{2,0} := (\delta_{1,i}\delta_{3,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 4} \in \mathfrak{g}$ でリー環の元を定義し，

$$\widetilde{a} := \mathrm{diag}(\sqrt{a}, \sqrt{a/c}, \sqrt{1/a}, \sqrt{c/a}) \in A, \qquad a > 0$$

と置く。すると，

$$\begin{aligned} B_{\xi_0}(\widetilde{a}; E_{2,0}) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\, B_{\xi_0}(\widetilde{a}\exp(tE_{2,0})) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\, B_{\xi_0}(\exp(atE_{2,0})\widetilde{a}) \\ &= 2\pi\sqrt{-1}ac_1 B_{\xi_0}(\widetilde{a}) \end{aligned} \tag{2.9}$$

なので，十分大なる $N > 0$ が存在して，

$$B_{\xi_0}(\widetilde{a}; E^l_{2,0}) = (2\pi\sqrt{-1}ac_1)^l B^{(\infty)}_{\xi_0}(\widetilde{a}) = O(a^N), \quad (a \to +\infty, \forall l \in \mathbf{Z})$$

が成立する。一方で，$B_{\xi_0}(\widetilde{a}) = a^{n+1} \times \varphi_0(4\pi c_1 a)$ であるので，上の漸近展開 (2.7), (2.8) から，$A_3 = A_4 = 0$ がでる。従って，B_{ξ_0} の一意性が分かる。同時に，次の公式

$$\begin{aligned} B_{\xi_0}(\widetilde{a}) = const \times &\int_{-\sqrt{-1}\infty}^{\sqrt{-1}\infty} \frac{\Gamma(\frac{n+2+\nu_1}{2} - 2s_1)\Gamma(\frac{n+2-\nu_1}{2} - 2s_1)}{\Gamma(\frac{n+2+\rho_\infty}{2} - s_1)\Gamma(\frac{n+2-\rho_\infty}{2} - s_1)} \\ &\times (8\pi c_1 a)^{2s_1} \frac{ds_1}{2\pi\sqrt{-1}} \end{aligned} \tag{2.10}$$

も得られ定理 5 の証明が終わる。

注意 B_{ξ_0} が尖点形式 F から生じている場合には，F が急減少なので，B_{ξ_0} も急減少であり，命題 7 や (2.9) を持ち出さずに，(2.10) が得られる。ただし，尖点形式の急減少性の (標準的) 証明には，[HC-1, Theorem 1] が用いられることに注意する。

付録 1 Bessel 関数と Novodvorsky 積分. $W : G_{\mathbf{R}} \to \mathbf{C}$ を π_∞ の ξ_0 に関する局所 Whittaker 関数とする。このとき，次の「局所 Novodvorsky 積分」を考える:

$$Z^{(\infty)}_N(W;s;g) := \int_{\mathbf{R}^\times} d^\times y \int_{\mathbf{R}} dx W(\left(\begin{array}{cc|cc} y & & & \\ & y & & \\ \hline & & 1 & \\ & x & & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & & & -1 \\ \hline & & 1 & \\ & 1 & & \end{array}\right) g)|y|^{s-3/2}$$

$(s \in \mathbf{C}, g \in G_{\mathbf{R}})$。容易に確かめられるように，

$$Z^{(\infty)}_N(W;s;\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & x_1 & x_2 \\ & 1 & x_2 & x_3 \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} u & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & u \end{array}\right) g) = e^{2\pi\sqrt{-1}x_2}|u|^{-s+1/2} Z^{(\infty)}_N(W;s;g)$$

よって，$Z^{(\infty)}_N(W;s;g)$ は，もし緩増大関数であれば，不定符号指標指標 $\beta = \begin{pmatrix} & 1/2 \\ 1/2 & \end{pmatrix}$ に関する Bessel 関数である。従って，$Z^{(\infty)}_N(W;\rho_\infty + 1/2;\mathrm{diag}(a,a,1,1))$ と $B_{\xi_0}(\widetilde{a})$ で $c_1 = -c_2 = 1/2$ としたものに等しいことが期待される。ところで，$Z^{(\infty)}_N(W;s;\mathrm{diag}(a,a,1,1))$

は, Novodvorsky の局所ゼータ積分に他ならず, Whittaker 関数の明示式を用いて計算することができる ([Mo-2])。結果は, $\rho_\infty \gg 0$ で積分は収束し,

$$
\begin{aligned}
&Z_N^{(\infty)}(W;\rho_\infty+1/2;\mathrm{diag}(a,a,1,1))\\
&= const \times \Gamma_{\mathbf{C}}(\rho_\infty+\frac{n+\nu_1}{2})\Gamma_{\mathbf{C}}(\rho_\infty+\frac{n-\nu_1}{2})\\
&\times \int_{-\sqrt{-1}\infty}^{+\sqrt{-1}\infty}\frac{dz}{2\pi\sqrt{-1}}(4\pi a)^{2z}\frac{\Gamma(-2z+\frac{\nu_1+n+2}{2})\Gamma(-2z+\frac{-\nu_1+n+2}{2})}{\Gamma(-z+\frac{\rho_\infty+n+2}{2})\Gamma(-z+\frac{-\rho_\infty+n+2}{2})}
\end{aligned}
$$

となって上述の期待が確かに成立していることが分かる。このように, 局所 Novodovrsky 積分が spinor L-関数の Γ 因子と完全には等しくはならず, むしろその比として局所 Bessel 関数が現れるのは興味深いと思う。さらに, (筆者にとって) 面白いことに, この比は $GSp(2)\times GL(2)$ の Novodovrsky 積分からも意味がつく ([I-M] を参照)。

付録 2 Andrianov の局所ゼータ積分. Andrianov の局所ゼータ積分を,

$$
Z_A^{(\infty)}(s,B_{\xi_0}) := \int_0^\infty B_{\xi_0}(\widetilde{a})|a|^{s-3/2}d^\times a
$$

で定義する ([An], [Su], [Ps])。$B_{\xi_0}(\widetilde{a})$ が Mellin-Barnes 型積分 (2.10) で表示されているので, これは容易に計算できて

$$
Z_A^{(\infty)}(s,B_{\xi_0}) = const \times \frac{\Gamma(s+\frac{n-1+\nu_1}{2})\Gamma(s+\frac{n-1-\nu_1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}(s+n+\rho_\infty+\frac{1}{2}))\Gamma(\frac{1}{2}(s+n+\rho_\infty+\frac{1}{2}))}
$$

となる。これから, 尖点形式の spinor L-関数の解析接続や関数等式を出すことができるが, 詳しくは別の機会に述べたい。

References

[An] Andrianov, A. N., Dirichlet series with Euler product in the theory of Siegel modular forms of genus two, Trudy Mat. Inst. Steklov. **112** (1971), 73-94.

[B] Bump, D., The Rankin-Selberg method: a survey. In: Number theory, trace formulas and discrete groups, Academic Press (1989), 49-109.

[Er] Erdelyi, A. et al, *Higher tanscendental functions, vol I.*, (1953), McGrawHill.

[HC-1] Harish-Chandra., Discrete series for semisimple Lie groups, II. Acta Math **166** (1966), 1–111.

[HC-2] Harish-Chandra., *Automorphic forms on semisimple Lie groups*, Lecture notes in Math. **62** (1968), Springer.

[Ho] Hori, A., Andrianov's L-functions associated to Siegel wave forms of degree two, Math. Ann. **303** (1995), 195-226.

[Is] Ishii, T., Siegel-Whittaker functions on $\mathrm{Sp}(2,R)$ for principal series representations, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **9** (2002), 303–346.

[Is-Mo] Ishii, T. and Moriyama, T., this volume.

[K-R-S] Kudla, S., Rallis, S and Soudry, D., On the degree 5 L-function for $\mathrm{Sp}(2)$, Invent. Math. **107** (1992), 483–541.

[Li] Li, J. S, Nonexistence of singular cusp forms, Compositio Math. **83** (1992), 43–51.

[Me] Meijer, C. S., On the G-functions I., II, Indagationes Math. **8**, 124–134, 213–225 (1946).

[Mi-1] Miyazaki, T., Slowly increasing generalized Whittaker funcions for derived functor modules of $Sp(2,\mathbf{R})$ and nilpotent orbits, 京都大学数理解析研究所講究録 **1094** (1999) 83-87.

[Mi-2] Miyazaki, T., The generalized Whittaker functions for $Sp(2,\mathbf{R})$ and the gamma factor of the Andrianov L-functions, J. Math. Sci. Univ. Tokyo. **7** (2000), 241–295.

[Mi-3] Miyazaki, T., Nilpotent orbits and Whittaker functions for derived functor modules of $\mathrm{Sp}(2,\mathbf{R})$, Canad. J. Math. **54** (2002), 769–794.

[Mo-1] Moriyama, T., A remark on Whittaker functions on $\mathrm{Sp}(2,\mathbf{R})$, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **9** (2002), no. 4, 627–635.

[Mo-2] MORIYAMA, T., Entireness of the Spinor L-functions for certain generic cusp forms on $GSp(2)$, Amer J. Math. **126** (2004), 899–920.

[Ni-1] NIWA, S., On Siegel wave forms on the covering groupon $Sp(2, \mathbf{R})$, 京都大学数理解析研究所講究録 **843** (1993), 36–44 .

[Ni-2] NIWA, S., On generalized Whittaker functions on Siegel's upper half space od degree 2. Nagoya Math. J. **121** (1991), 171-184.

[No] NOVODVORSKY, M. E., On uniqueness theorems for generalized Bessel models. Math. USSR Sb. **19** (1973), 275–286.

[No-Ps] NOVODVORSKY, M. E. AND PIATETSKI-SHAPIRO, I. I., Generalized Bessel models for a symplectic group of rank 2. Math. USSR Sb. **19** (1973), 243–255.

[Ps] PIATETSKI-SHAPIRO, I. I., L-functions for GSp_4. Olga Taussky-Todd: in memoriam. Pacific J. Math. (1997), Special Issue, 259-275.

[Su] SUGANO, T., On holomorphic cusp forms on quaternion unitary groups of degree 2, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **31** (1985), 521–568.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SOPHIA UNIVERSITY, 7-1 KIOI-CHO, CHIYODA-KU, TOKYO, 102-8554 JAPAN

E-mail address: moriyama@mm.sophia.ac.jp