数理解析研究所講究録 1422 巻 2005 年 134-153

幾何学いろいろ, 可積分系もいろいろ

–Geometry, it's a secret ingredient that makes integrable system theory interesing for us–

井ノ口順一 (Jun-ichi Inoguchi)
宇都宮大学教育学部 (Utsunomiya University)

概 要

In this talk, I would like to exhibit some integrable systems derived from non-Eulidean plane geometries.

はじめに

ソリトン方程式の文化人類学的研究を行なうには「陽の当たらない幾何」[17] が有効な手段である[1]. [17] ではサイン・ゴルドン方程式がユークリッド幾何における「負定曲率曲面 (擬球面)」に対応することに立脚し, 等積アフィン幾何で擬球の概念を考えて得られる曲面 (アフィン球面) が Tzitzeica 方程式に対応することを述べ, Tzitzeica 方程式の解空間の構造を調べるには $SL_3\mathbb{R}$ (とそのアフィン化) が有効であることを説明した.

Sine-Gordon: SU(2) :擬球面 $\Leftrightarrow$ Tzitzeica: $SL_3\mathbb{R}$:アフィン球面

という対比は実は他のソリトン方程式 KdV, mKdV, 沢田・小寺, Burgers の間にも存在する. 本稿の目的は, これらの方程式の対称性をつかさどる群を, 古典幾何を用いて説明することである.

1 ユークリッド幾何学

1.1

通常, 平面幾何と言えばそれは「ユークリッド平面幾何」のことである. ユークリッド平面幾何を改めて説明することから始める.

原点 O と直交座標系 (x, y) を一組指定することで, 平面を数平面 $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) |\ x, y \in \mathbb{R}\}$ と思うことができる. このとき $\mathbb{R}^2$ は線型空間の構造が

[1] と昨年度の短期共同研究で力説した

定まったことになる．以後，$\mathbb{R}^2$ の点を O を始点とする位置ベクトルで表すことにする．

2 点 $\boldsymbol{p}_1 = (x_1, y_1)$, $\boldsymbol{p}_2 = (x_2, y_2)$ 間の距離を

$$d(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

で**測ることにする**．距離函数 $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が定められたといってもよい．$\mathbb{R}^2$ にこの距離函数 d を付与したものを**ユークリッド平面**とよび以後 $\mathbb{E}^2$ と表記する．三角形の合同定理「二つの三角形が合同 $\Leftrightarrow$ 対応する三辺の長さが相等しい」を思い出そう．ユークリッド平面上の変換 $\phi : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ が**合同変換**であるための必要十分条件は ϕ が距離を保つこと，即ち，$d(\phi(\boldsymbol{p}), \phi(\boldsymbol{q})) = d(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}), \forall \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{E}^2$ が成立することである．$E(2)$ で $\mathbb{E}^2$ の合同変換全体のつくる集合を表すと，これは合成に関し群を為す．この群を**ユークリッド群**とか**合同** (変換) **群**とよぶ．

学部水準の線型代数から $E(2)$ の具体的な記述が得られる:

$$E(2) = \{(A, \boldsymbol{a}) \mid A \in \mathrm{O}(2), \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2\},$$

ここで $\mathrm{O}(2)$ は 2 次の直交群を表す．$E(2)$ の積構造は

$$(A, \boldsymbol{a}) \cdot (B, \boldsymbol{b}) = (AB, A\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a})$$

で与えられる．ここで $\mu : E(2) \times \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ を次で定めよう．

$$\mu((A, \boldsymbol{a}), P) = A\boldsymbol{p} + \boldsymbol{a}.$$

μ の持っている性質を抽出し抽象化して次の定義をしよう．

定義 1.1 群 G と集合 X が与えられているとき，写像 $\mu : G \times X \to X$ で

$$\mu(ab, x) = \mu(a, \mu(b, x)),\ \mu(e, x) = x,\ \forall a, b \in G,\ \forall x \in X$$

を満たすものを G の X 上の**作用** (action) とよぶ．ここで e は G の単位元．とくに任意の 2 点 $x, y \in X$ に対し $\mu(a, x) = y$ となる $a \in G$ が必ず存在するとき，μ を**推移的作用**とよぶ．

上で挙げた $\mu : E(2) \times \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ は推移的作用の典型例である．$E(2)$ は連結ではないので以後は連結成分

$$SE(2) = \{(A, \boldsymbol{a}) \in E(2)\ | A \in \mathrm{SO}(2)\}$$

を用いることにする．ここで

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \right\}$$

と表せることに注意．$SE(2)$ の作用も推移的である．

1.2

$\mathbb{E}^2$ 上の曲線を考える. $\boldsymbol{p}(t)=(x(t),y(t))$ と径数表示された曲線を考える. もし $\dot{p}\neq 0$ ならば $|d\boldsymbol{p}/ds|=1$ となる新しい径数 s が採れる. この径数を**弧長径数** (arclength parameter) とよぶ. 弧長径数に関する微分演算はプライム $'$ で表す. $T:=\boldsymbol{p}'$, $N:=R(\pi/2)T$ とおくと, SO(2) に値をもつ函数 $F(s)=(T(s),N(s))$ が得られる. F を**フレネ標構** (Frenet frame) とよぶ. F の s に関する変化は

$$\frac{d}{ds}F=F\begin{pmatrix}0 & -\kappa(s)\\ \kappa(s) & 0\end{pmatrix}=FU \tag{1}$$

で与えられる. この方程式を Frenet-Serret 方程式とよぶ. また函数 $\kappa(s)$ を曲率とよぶ. すぐにわかるように「$\kappa\equiv 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{p}$ は直線」であり「κ が零でない定数 $\Leftrightarrow \boldsymbol{p}$ は円」である. 曲率は合同変換で不変な量であり, 曲線は与えられた初期条件に対し曲率で一意的に決まることがわかる. ただしここでいう「一意的」というのは合同変換で互いに移りあう曲線は全て同じものとみなすという約束が入っていることに注意しなければならない. また F がリー群 SO(2) に値をもつことから U はそのリー環 $\mathfrak{so}(2)$(つまり 2 次の交代行列全体) に値をもつことにも注意しよう.

1.3

$\mathbb{E}^2$ 上の曲線 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(u)$ の時間発展 $(u,t)\longmapsto \boldsymbol{p}(u;t)$ を考えることにしよう. 但し u は一般の径数とする. t により径数づけられた曲線の一径数族 $\{\boldsymbol{p}(u;t)\mid t\in\mathbb{R}\}$ を考えているといいかえてもよい.

各曲線 $\gamma(u;t)$ の弧長函数を $L=L(t)$ とする:

$$L(t):=\int_0^u\sqrt{\langle \boldsymbol{p}_u,\boldsymbol{p}_u\rangle}\,du.$$

時間発展は**弧長函数を保つ** (isoperimetric) という条件を要請しよう. 元の曲線が閉曲線であれば**伸び縮みしない**ということである. 時間発展を

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{p}(s;t)=gN+fT$$

と表示する.

$$\frac{\partial s}{\partial t}=\int_0^u\frac{\langle \boldsymbol{p}_u,\boldsymbol{p}_{ut}\rangle}{\sqrt{\langle \boldsymbol{p}_u,\boldsymbol{p}_u\rangle}}du$$

ここで $\boldsymbol{p}_u=\alpha\,\boldsymbol{p}_s$, $\alpha=\sqrt{\langle \boldsymbol{p}_u,\boldsymbol{p}_u\rangle}$ に注意すれば

$$\boldsymbol{p}_{ut}=\alpha(\boldsymbol{p}_t)_u=\alpha(gT+fN)_s=\alpha\{(g_s-f\kappa)T+(f_s+g\kappa)N\}.$$

より

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \int_0^u \alpha(g_s - f\kappa)du = \int_0^s g_s - f\kappa ds$$

を得る．従って「伸び縮みしない $\Longleftrightarrow g_s = f\kappa$」．

この条件は次のように導くこともできる．

$$T_t = (\boldsymbol{p}_s)_t = (\boldsymbol{p}_t)_s = (gT + fN)_s = (g_s - f\kappa)T + (f_s + g\kappa)N.$$

と計算し，$|T| = 1$ より $\langle T_t, T\rangle = 0$. 従って $g_s = f\kappa$. 次に $V = F^{-1}F_t$ は $\mathfrak{so}(2)$ に値をもつことから $N_t = -(f_2 + g\kappa)T$ とならざるを得ない．

以上より曲線の時間発展より生ずる Lax 対

$$U = F^{-1}F_s = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}, \quad V = F^{-1}F_t = \begin{pmatrix} 0 & -f_s - g\kappa \\ f_s + g\kappa & 0 \end{pmatrix}$$

を得た．この Lax 対の可積分条件 $V_s - U_t + [U, V] = 0$ を計算する[2]と $\kappa_t = f_{ss} + (g\kappa)_s = 0$ を得る． $g_s = f\kappa$ だから

$$\kappa_t = f_{ss} + f\kappa^2 + g\kappa_s = \{\partial_s^2 + \kappa^2 + \kappa_s\partial_s^{-1}(\kappa\cdot)\}f$$

と書き直せる．$f(s) = -\kappa_s$ と選ぶと，$g_s = -\kappa\kappa_s$ なので $g(s) = -\kappa(s)^2/2$ を選ぶことができる．以上より次の結果を得た:

命題 1.2 ([9]) 曲線の時間発展

$$\boldsymbol{p}_t = -\kappa_s N - \frac{1}{2}\kappa^2 T$$

に伴う曲率 $\kappa(s,t)$ の時間発展は変形 KdV 方程式 (mKdV)

$$\kappa_t + \kappa_{sss} + \frac{3}{2}\kappa^2\kappa_s = 0$$

に従う．

Lax 対は

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_{ss} + \frac{1}{2}\kappa^2 \\ -\kappa_{ss} - \frac{1}{2}\kappa^2 & 0 \end{pmatrix}$$

であるがこれは mKdV に対する AKNS 表示でスペクトル径数を 0 にしたものである ([24])．実際

$$U(\zeta) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}\zeta & r \\ q & -\sqrt{-1}\zeta \end{pmatrix}, \quad r = -q = \kappa$$

[2]今の場合 $[U, V] = 0$

より一般に

$$f = -\Omega^{n-1}\kappa_s,\ g = -\partial_s^{-1}(\kappa\Omega^{n-1}\kappa_s),\ \Omega = \{\partial_s^2 + \kappa^2 + \kappa_s\partial_s^{-1}(\kappa\cdot)\},$$

と選べば mKdV 階層を得る．

註 1.3 Curve-shortening flow は $\boldsymbol{p}_t = \kappa N$.

註 1.4 本稿では平面曲線のみ取り扱う．ユークリッド空間内の曲線の陪法線方向の時間発展

$$\boldsymbol{p}_t = \kappa B$$

は非線型シュレディンガー方程式を導く（橋本変換）ことはよく知られている．ユークリッド幾何以外の幾何において空間曲線の時間発展を考えることでさまざまなソリトン方程式が得られる．空間曲線の時間発展については [29] を参照されたい．

2　いろいろな幾何学

数平面 $\mathbb{R}^2$ 上に推移的に働く群は $SE(2)$ だけではない[3]. $\mathbb{R}^2$ 上に推移的群作用 (G, μ) が指定されたとき $(G, \mathbb{R}^2, \mu)$ のことを G を変換群にもつ**平面クライン幾何**とよぶことにする．この講演で扱う幾何はひとつ（中心アフィン幾何）を除きクライン幾何である．

2.1　等積アフィン幾何 (equiaffine geometry)

数平面 $\mathbb{R}^2$ に面積要素 $dA = \det$ を指定しておく．距離函数は与えずにおく．面積要素を保つ変換の全体（**等積変換群**）:

$$SA(2) = \{(A, \boldsymbol{a}) \mid A \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R},\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2\}$$

を考える．$(SA(2), \mathbb{R}^2)$ で定まるクライン幾何を**等積アフィン幾何**とよぶ．曲線 $\boldsymbol{p}(t)$ が条件 $\det(\dot{\boldsymbol{p}}, \ddot{\boldsymbol{p}}) \neq 0$ を満たすとき**非退化**という．非退化のとき $\det(\boldsymbol{p}_s, \boldsymbol{p}_{ss}) = 1$ となる径数 s が採れる．この径数を**アフィン径数**とよぶ．フレネ標構は $F = (T, N), T = \boldsymbol{p}', N = \boldsymbol{p}''$ で与えられ，　フレネ-セレ方程式は

$$F^{-1}\frac{dF}{ds} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = U$$

となる．κ を**アフィン曲率**とよぶ．アフィン曲率が定数の曲線は非退化 2 次曲線である．正確には

[3]本稿で採り上げた古典幾何 (Klein 幾何) の（可積分系研究者向けの）手ごろな解説は見当たらないので（やむなく）[18] を挙げておく．

命題 2.1 (*cf.* [27]) アフィン径数で表示された平面曲線 $\boldsymbol{p}(s)$ において

- κ が正定数 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{p}$ は楕円に $SA(2)$-合同,
- $\kappa = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{p}$ は放物線に $SA(2)$-合同,
- κ が負定数 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{p}$ は双曲線に $SA(2)$-合同.

2.2 中心等積アフィン幾何 (centro-affine geometry)

この幾何では平行移動無しの等積変換 ($\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$) で不変な性質を調べることになる[4]. 曲線は次の性質を満たすものが研究対象である:

"各位置ベクトル $\boldsymbol{p}(t)$ はその点における接線と横断的 (transversal)"

つまり $\det(\boldsymbol{p}(t), \dot{\boldsymbol{p}}(t)) \neq 0$. この条件をみたす曲線を**中心アフィン平面曲線**とよぶ. この幾何における標準的径数は

$$\det\left(\frac{d}{ds}\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}(s)\right) = 1$$

となる s である. これを中心アフィン径数とよぶ. フレネ標構は $F = (T, N), T = \boldsymbol{p}', N = \boldsymbol{p}$ で与えられ, フレネ-セレ方程式は

$$F^{-1}\frac{dF}{ds} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} = U$$

となる. κ を**中心アフィン曲率**とよぶ.

2.3 アフィン幾何

平面アフィン変換群[5]

$$A(2) = \{(A, \boldsymbol{a}) \mid A \in \mathrm{GL}_2\mathbb{R},\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2\}$$

で定まるクライン幾何を**平面アフィン幾何**とよぶ[6].

アフィン幾何では円は意味をもたない (不変概念でない). 学部教育課程[7]の線型代数で 2 次曲線の標準形を扱うが, アフィン幾何の観点で説明しなおすと, "非退化 2 次曲線は楕円・放物線・双曲線のいずれかにアフィ

---

[4] この場合は $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ の作用は推移的でない

[5] 画像処理ではよく知られた概念

[6] 近頃は等積アフィン幾何を単に「アフィン幾何」とよぶ人たちがいて, その流儀ではアフィン幾何を full affine geometry とよぶ. 擬似幾何という邦訳を当てている書物もある

[7] 世代によっては高校生のとき.

ン合同". 楕円・放物線・双曲線はアフィン変換で不変な性質である. 長さ・角度・面積は不変概念ではない. アフィン不変なものには例えば, 点, 線分の中点, 三角形の重心がある. 「三角形 ABC において各頂点 A, B, C とそれらの対辺の中点とを結べば, それら 3 線分は 1 点で交わる」というのはアフィン変換で不変な性質を述べているから, アフィン幾何で意味をもつ (アフィン幾何的定理と言い表す). 一方, 「三角形 ABC において各頂角の 2 等分線は一点で交わる」という定理はアフィン幾何では意味を失う (ユークリッド幾何的定理).

2.4 相似幾何

平面の**相似変換群**

$$\mathrm{Sim}(2) = \{(A, \boldsymbol{a}) \mid A \in \mathrm{CO}(2),\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2\},$$

$$\mathrm{CO}(2) = \{A \in \mathrm{GL}_2\mathbb{R} \mid {}^\exists c \in \mathbb{R};\ {}^tAA = cE\ \}$$

で定まるクライン幾何を**相似幾何** (similarity geometry) とよぶ. 円は相似変換で円に写るから相似不変な概念である. 「いかなる円においても円周/直径は一定の値である」. この事実は次のように言い換えられる:
"円周/直径は相似不変量である" いうまでもなくこの相似不変量は円周率 π である. 典型的な相似不変量は**角度**である. $\mathbb{E}^2$ 上の直線でない曲線 $\boldsymbol{p}$ の相似不変な径数として角函数 $s = \int^s \kappa_E(s)ds_E$ が選べる. ただし s_E, κ_E は弧長径数とユークリッド曲率. **相似** (不変) **曲率**は $\kappa = (\kappa_E)_{s_E}/\kappa_E^2$ で与えられることがわかる (特に円は相似曲率 0). 標構は $F = (T, N) = (\boldsymbol{p}_s, N = T_s + \kappa T)$ で与えられる. フレネーセレ方程式は

$$F^{-1}\frac{dF}{ds} = \begin{pmatrix} -\kappa & -1 \\ 1 & -\kappa \end{pmatrix}.$$

相似曲率 κ とユークリッド曲率 κ_E の関係式を用いて相似曲率一定の曲線を求めてみる. $\kappa_E \neq 0$ の場合, $\kappa =$ 定数 c_1 とおくと $1/\kappa_E = (-c_1)s_E + c_2$, つまりユークリッド曲率の逆数が一次式となる曲線である. 従って**対数螺旋** ($c_1 \neq 0$), 円 ($c_1 = 0, c_2 \neq 0$) を得る. 相似曲率一定曲線は円・対数螺旋 (log-spiral) の 2 種である[8]. 対数螺旋上に柱面を立てると, この柱面は HIMC 曲面[9] の最も単純な例を与える. 等温 HIMC 曲面の構造方程式は (一般に)P_V, P_{VI}(特定のパラメータを指定) であるが, とくに初等函数に落ちるケースの例である ([5],[8]).

[8]直線も含めることがある.
[9]Harmonic inverse mean curvature surface

2.5 射影幾何

$\mathbb{R}^2$ を射影平面 $\mathbb{R}P^2$ のアフィン・チャートとみなす.

$$\mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{p} \longmapsto [1 : \boldsymbol{p}] \in \mathbb{R}P^2$$

射影変換群 $\mathrm{PSL}_3\mathbb{R}$ で不変な径数・曲率が定義される. 詳細は佐々木 [30] を参照. 射影空間の曲面の変換と戸田格子の関連については [16] を参照.

2.6 メビウス幾何

$\mathbb{R}^2$ の共形構造[10]のみを考える. 共形構造は複素構造と等価なので $\mathbb{R}^2$ を複素平面とみなすということと同じである. 複素函数論で周知のように $\mathbb{C}$ の共形変換群 $\mathrm{M\ddot{o}b}(2)$ は射影変換群 $\mathrm{PSL}_2\mathbb{C} = \mathrm{SL}_2\mathbb{C}/\{\pm E\}$ である. $A \in \mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ は一次分数変換で $\mathbb{C}$ に作用する:

$$A \cdot z = \frac{az+b}{cz+d},\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$(\mathrm{PSL}_2\mathbb{C}, \mathbb{C},)$ で定まるクライン幾何を 2 次元**メビウス幾何** (Möbius geometry) とよぶ. [11]

註 2.2 (四元数の行列式) 4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}^4$ の共形変換群 $\mathrm{M\ddot{o}b}(4)$ は四元数 $\mathbb{H}$ を用いて $\mathrm{M\ddot{o}b}(4) = \mathrm{PSL}_2\mathbb{H}$ と表すことができる. ここで $\mathrm{SL}_2\mathbb{H}$ は次のように定義される: 四元数を成分にもつ 2 行 2 列の行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2\mathbb{H}$$

に対し複素数 $\mathcal{D}(A)$ を

$$\mathcal{D}(A) := |a|^2|d|^2 + |b|^2|c|^2 - \bar{a}b\bar{d}c - \bar{c}d\bar{b}a$$

と定める. これを A の**シュテュディ行列式** (Study determinant) とよぶ[12]. $\mathcal{D}$ は次の性質をもつ:

$$\mathcal{D}(AB) = \mathcal{D}(A)\mathcal{D}(B),\ \ {}^{\exists}A^{-1} \Leftrightarrow \mathcal{D}(A) \neq 0$$

---

[10] 向きを保つ共形変換を**等角写像**とよぶ. 等角写像の定義で「向きをひっくり返してもよい」と緩めたもの.

[11] ユークリッド平面の共形幾何を研究するときは無限遠点 ∞ を付け加えて一点コンパクト化 (共形コンパクト化) したリーマン球面 $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{P}_1$ を用いるのがよい. そして複素射影直線 $\mathbb{P}_1$ と $\mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$ の組をメビウス幾何とよぶ.

[12] 香取 [21] で扱われているものとは別もの

$$\mathcal{D}(A) \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\mathcal{D}(A)} \begin{pmatrix} |d|^2\bar{a} - \bar{c}d\bar{b} & |b|^2\bar{c} - \bar{a}b\bar{d} \\ |c|^2\bar{b} - \bar{d}c\bar{a} & |a|^2\bar{d} - \bar{b}a\bar{c} \end{pmatrix}.$$

そこで

$$\mathrm{SL}_2\mathbb{H} = \{A \in \mathrm{M}_2\mathbb{H} \mid \mathcal{D}(A) = 1\}$$

とおくとこれは実 15 次元の非コンパクト・リー群である. $\mathbb{E}^4$ に無限遠点を加えて (共形コンパクト化) 四元数射影直線 $\mathbb{H}P^1$ をつくる[13]ことで $\mathrm{M\ddot{o}b}(4) = \mathrm{PSL}_2\mathbb{H}$. であることが確かめられる. $\mathrm{PSL}_2\mathbb{H}$ は $\mathbb{H}P^1$ に一次分数変換として作用する ([2], [10]). :

$$A \cdot \xi = (a\xi + b)(c\xi + d)^{-1}.$$

$\mathbb{H}P^1$ は数理物理では既に用いられたことがあることを注意しておく.

4 次元のとき Yang-Mills 汎函数は共形不変であったから S^4 上の Yang-Mills 場を考えるときは $\mathbb{H}P^1$ 上の話に書き換えてよい ([2], [22] を参照). さらに SU(2) は $\mathrm{Sp}(1) = \{\xi \in \mathbb{H} \mid \xi\bar{\xi} = 1\}$ という**四元数の円**に書き直せることに注意する. $\mathbb{H}P^1$ を 2 枚のチャート $(U_1, \zeta_1), (U_2, \zeta_2)$ で覆う.

$$U_1 = \{[\xi_1, \xi_2] \mid \xi_1 \neq 0\},\ U_2 = \{[\xi_1, \xi_2] \mid \xi_2 \neq 0\},$$

$$\zeta_1 : U_1 \to \mathbb{H};\ \zeta_1([\xi_1, \xi_2]) = \frac{\xi_2}{\xi_1},$$

$$\zeta_2 : U_2 \to \mathbb{H};\ \zeta_1([\xi_1, \xi_2]) = \frac{\xi_1}{\xi_2}.$$

$f : U_1 \cap U_2 \to \mathrm{Sp}(1)$ を $f(\zeta) = \bar{\zeta}/|\zeta|$ で定めると f はコサイクル条件を満たすので f を変換函数 (貼り合わせ函数) とし SU(2) をゲージ群とする主ファイバー束 P が定まる. A_1, A_2 を

$$A_j(\zeta) := \mathrm{Im}\left\{\frac{\bar{\zeta}d\zeta}{1 + |\zeta|^2}\right\},\ \zeta \in U_j$$

とおくと A_1, A_2 は P 上のゲージポテンシャル (接続)A を定めている.

$$F(A) = dA + \frac{1}{2}[A \wedge A] = \frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{(1 + |\zeta|^2)^2}$$

であることから A は反インスタントン (反自己双対接続) であることがわかる. この反インスタントンは **BPST 反インスタントン** (BPST-anti instanton) とよばれるものである[14] [3]. インスタントンの四元数を用いた具体的構成については Atiyah のレクチャーノート [2] を参照[15].

[13] $\mathbb{P}_1$ が 2 次元球面 S^2 と共形同値なように $\mathbb{H}P^1$ は 4 次元球面 S^4 と共形同値である. $\mathbb{H} = \mathbb{C}^2$ と見ることで $\mathbb{P}_3 \to S^4$ というファイバー束が定まる. これが Penrose の (オリジナルの)twistor 空間.

[14] Belavin-Polyakov-Schwartz-Tyupkin

[15] 「ハミルトンに敬意を表し四元数体を $\mathbb{H}$ と表記しよう」と書かれている.

3 いろいろな平面幾何における曲線の時間発展

本節ではいろいろな平面クライン幾何で曲線の時間発展を考えることにしよう．

3.1 中心アフィン幾何

まず最も計算が簡単な中心アフィン曲線の時間発展を調べよう．
$\boldsymbol{p}_t = gT + fN$ と表せるから

$$V = F^{-1}F_t = \begin{pmatrix} f + g_s & g \\ -g\kappa + f_s & f \end{pmatrix}$$

を得るが $F \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ だから $\mathrm{tr}V = 0$．従って $g_s + 2f = 0$ を得る．これが中心アフィン幾何における isoperimatric condition である．可積分条件を計算すると，$\kappa_t - 2\kappa g_s - g\kappa_s + f_{ss} = 0$．$g_s = -2f$ を使うと $\kappa_t + 4\kappa f - g\kappa_s + f_{ss} = 0$ と書き直せる．ここで $f = \kappa_s$ と選ぶと

$$\kappa_t + 6\kappa\kappa_s + \kappa_{sss} = 0$$

これは KdV 方程式である．

$$\kappa_t = -\Omega f,\ \Omega = \partial_s^2 + 4\kappa + 2\kappa_s\partial_s^{-1},\ f = \kappa_s$$

と表せることにも注意しよう．Ω は KdV 方程式の recursion operator そのものである．ユークリッド平面曲線論のときのように $\kappa_t = -\Omega^{n-1}\kappa_s$ により中心アフィン平面曲線の時間発展から KdV 階層が導かれる[16]．

命題 3.1 (Pinkall [28]) 中心アフィン曲線の時間発展

$$\boldsymbol{p}_t = \kappa_s N - 2\kappa T$$

に伴う中心アフィン曲率 $\kappa(s,t)$ の時間発展は KdV 方程式

$$\kappa_t + 6\kappa\kappa_s + \kappa_{sss} = 0$$

に従う．

以下，他の幾何についても平面曲線の時間発展からよく知られたソリトン方程式が導かれることを説明する．以下の結果はいつ頃から知られているのか，誰が最初なのかは，現時点で筆者には断言できないので，“誰それ

[16]筆者の知る限りで，この事実を最初に発表したのは U. Pinkall 氏である．古典には見当たらないようである．

による結果”という説明 (Credit title) は付けないことにする. (「19 世紀の微分幾何学でとっくに知られていた」という可能性があるが, チェックすることが筆者には困難なので) 比較的新しい論文で, これらの結果がまとめて書いてあるものが存在する [7] ので, より詳しいことを知りたい方は引用文献 [7] に当たるとよい. (この原稿を書く上でも参考にした)

3.2 等積アフィン幾何

次に等積アフィン幾何を調べる. 時間発展 $\boldsymbol{p}_t = fN + gT$ に対し

$$V = \begin{pmatrix} g_s - \kappa f & g_{ss} - 2\kappa f_s - \kappa_s f - \kappa g \\ f_s + g & f_{ss} + 2g_s - \kappa f \end{pmatrix}$$

より isoperimetric condition は $g_s = -(1/3)f_{ss} + (2/3)\kappa f$. である. 積分可能条件と isoperimetric condition から

$$\kappa_t = \frac{1}{3}\left(\partial_s^4 + 5\kappa\partial_s^2 + 4\kappa_s\partial_s + \kappa_{ss} + 4\kappa^2 + 2\kappa_s + \partial^{-1}(\kappa\cdot)\right) f.$$

とくに $f = -3\kappa_s$ と選ぶと, アフィン曲率 $\kappa(s,t)$ の時間発展は
沢田・小寺方程式

$$\kappa_t + \kappa_{sssss} + 5\kappa\kappa_{sss} + 5\kappa_s\kappa_{ss} + 5\kappa^2\kappa_s = 0$$

に従うことがわかる. このとき曲線の時間発展は $\boldsymbol{p}_t = -\kappa_s N - \frac{1}{2}\kappa^2 T$ となっている[17].

あとの幾何学については具体的な計算は省略する.

3.3 相似幾何

この場合,

$$\kappa_t = f_{sss} - 2\kappa\kappa_{ss} - (3\kappa_s - \kappa^2 - 1)f_s + (-\kappa_{ss} + \kappa\kappa_s)f + a\kappa_s, \ a \in \mathbb{R}$$

を得る. $f = -1, a = 0$ と選ぶと**バーガース方程式** (Burgers equation)

$$\kappa_t = \kappa_{ss} - 2\kappa\kappa_s$$

[17] [7] では, どの幾何の場合もユークリッド幾何の量に直して計算しているので, 時間発展を導くのが面倒になってしまっている. 例えば等積アフィン幾何の場合,

$$ds = \kappa_E^{\frac{1}{3}}\, ds_E,\ \kappa = \kappa_E^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{3}\left\{\kappa_E^{-\frac{5}{3}}(\kappa_E)_{s_E}\right\}_{s_E},$$

$$T = \kappa_E^{\frac{1}{3}} T_E,\ N = \frac{1}{3}\kappa_E^{-\frac{5}{3}}(\kappa_E)_{s_E} T_E + \kappa_E^{-\frac{1}{3}} N_E.$$

を使っている.

バーガース方程式のHopf-Cole変換 $\kappa = -(\log q)_s$ の意味を考えよう．ユークリッド曲率 κ_E と相似曲率 κ の関係式と比較すると $q = 1/\kappa$ であることに気づく．以上よりわかったことは，"相似不変な時間発展 $\boldsymbol{p}_t = -\kappa T - N$ は，ユークリッド幾何に移行するとユークリッド曲率の逆数 q の時間発展 $q_t = q_{ss}$(線型拡散方程式) で規定される" (s_E でなく s を使っていることに注意)．κ と q はHopf-Cole変換で結ばれている．拡散方程式の空間変数は $s(\neq s_E)$ なので，Hopf-Cole変換で mKdV の解 κ_E(ユークリッド曲率) が Burgers の解 κ(相似曲率) に変換されると誤解しないように[18]．

3.4 アフィン幾何

この幾何では，defoucusing KdV 方程式

$$\kappa_t + \kappa_{sss} - \frac{3}{8}\kappa^2\kappa_s = 0$$

が得られる．

3.5 メビウス幾何

複素射影直線内の曲線 $\gamma(u)$ を考える．γ の斉次座標ベクトルを $\boldsymbol{p} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ と表記しよう．中心アフィン曲線論を真似て

$$\det(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}_u) = 1$$

という規格化をしよう．この規格化で定まる径数を s で表し**共形弧長径数** (conformal arclength parameter) とよぶ．共形弧長径数を用いると $\boldsymbol{p}'' = q\,\boldsymbol{p}$ と表せる．係数 q はシュワルツ微分 (黒微分) を使って

$$-2q = S(\gamma) = \frac{\gamma'''}{\gamma''} - \frac{3}{2}\left(\frac{\gamma''}{\gamma'}\right)^2$$

と表せることを注意しておこう．p は共形変換で不変な量である (シュワルツ微分だから！)．これを仮に**共形曲率** (conformal curvature) とよんでおく[19]．曲線の時間発展 $\boldsymbol{p}(s) \mapsto \boldsymbol{p}(s;t)$;

$$\boldsymbol{p}_t = f\boldsymbol{p} + g\boldsymbol{p}'$$

[18] 実際 s_E を使うと拡散方程式は

$$q_t = qq_{s_E}^2 + q^2 q_{s_E s_E} \Longleftrightarrow (\kappa_E)_t = \frac{(\kappa_E)_{s_E s_E}}{\kappa_E^2} - \frac{3\kappa_{s_E}^2}{\kappa_E^3}$$

となる

[19] この量は複素数値である．実数値の共形曲率とよばれる量は別にある．ユークリッド曲率 κ とユークリッド弧長係数 u を用いて $\kappa^c := \kappa_{uuu}/\kappa_u^2 - (5\kappa_{uu}^2/4\kappa_u^3) - \kappa^2/\kappa_u$ で与えられる量である．以下で見るように本来の共形曲率よりも q の方が我々の立場からは扱いやすい．

を考えよう．共形弧長に関する isoperimetric condition は $2f+g_s=0$ である．共形曲率の時間発展は

$$q_t = -\frac{g_{sss}}{2} + q_s p + g q_s + 2g_s q$$

に従う．とくに $g=-2q$ と選ぶと KdV 方程式 $q_t - q_{sss} + 6qq_s = 0$ を得る．メビウス曲線論とユークリッド曲線論を見比べよう．曲線 γ が無限遠点を通らないとしよう．従って γ は複素平面 $\mathbb{C}$ に収まっている．このとき $\boldsymbol{p}$ は

$$\boldsymbol{p} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma'}}(\gamma, 1)$$

で与えられる．時間発展を γ で書き直すことができて

$$\gamma_t = g\gamma_s$$

となる．

ここで平面をユークリッド平面としよう．さらに s は弧長係数であるとしよう．つまり $|\gamma_s|=1$. シュワルツ微分を計算しよう．T, N をユークリッド幾何での単位接ベクトル場と単位法線ベクトル場とすると，$N=\sqrt{-1}T$, $\gamma'=T$, $\gamma''=\kappa N$, $\gamma'''=\kappa' N - \kappa^2 T$ だから

$$S(\gamma) = \frac{\kappa'\sqrt{-1}T - \kappa^2 T}{T} - \frac{3}{2}\left(\frac{-\kappa\sqrt{-1}T}{T}\right)^2 = \frac{\kappa^2}{2} + \sqrt{-1}\kappa'$$

を得る．そこで $g=2q$ と選ぶとユークリッド平面曲線 γ の時間発展は

$$\gamma_t = -S(\gamma)\gamma' = -\left(\frac{\kappa^2}{2} + \kappa'\sqrt{-1}\right)T = -\frac{\kappa^2}{2}T - \kappa' N$$

となるから，これはユークリッド幾何でみた mKdV を導く時間発展である．従って既に見たようにユークリッド曲率は mKdV 方程式 $\kappa_t + \kappa_{sss} + \frac{3}{2}\kappa^2\kappa_s = 0$ に従う．ここで改めてシュワルツ微分の計算結果を振り返ろう．この式は共形曲率 q(KdV の解) とユークリッド曲率 κ(mKdV の解) の関係式を与えている．その形から Miura 変換とよんでもよいことに気づく[20]．但し，p は複素数値 (複素化 KdV の解), κ は実 mKdV の解であることに注意しよう．メビウス曲線論からユークリッド曲線への逓減は複素 KdV から実 mKdV への Miura 変換を誘導することが示された．

$$\kappa \longmapsto q = -\frac{1}{4}\kappa^2 - \frac{1}{2}\sqrt{-1}\kappa,$$

$$\kappa_t + \kappa_{sss} + \frac{3}{2}\kappa^2\kappa_s = 0 \longmapsto q_t - q_{sss} + 6qq_s = 0.$$

[20]通常 Miura 変換とよばれる変換には $\sqrt{-1}$ がついていないが今の場合は κ が実数値，q が複素数値であるために κ' の前に虚数単位がつく．

3.6 射影幾何

射影幾何 $(\mathbb{R}P^2, \mathrm{PSL}_3\mathbb{R})$ では **Kaup-Kuperschmidt 方程式**:

$$\kappa_t = -2\kappa_{sssss} + \frac{10}{9}\kappa\kappa_{sss} + \frac{25}{9}\kappa_s\kappa_{ss} - \frac{10}{81}\kappa^2\kappa_s - \frac{1}{3}\kappa_{ss} + \frac{1}{18}\kappa^2 + \frac{7}{81}\kappa_s.$$

が得られる．

註 3.2 (KdV が等積中心アフィン幾何とメビウス幾何に登場する訳)
平面 $\mathbb{R}^2$ 内の等積中心アフィン曲線は実射影直線 $\mathbb{R}P^1$ 内の曲線を誘導する．$(\mathbb{R}^2, \mathrm{SL}_2\mathbb{R})$ はクライン幾何ではないが, $(\mathbb{R}P^1, \mathrm{PSL}_2\mathbb{R})$ はクライン幾何である．等積中心アフィン曲線のときの結果を $(\mathbb{R}P^1, \mathrm{PSL}_2\mathbb{R})$ で書き直すと "$\mathbb{R}P^2$ 内の曲線の時間発展に伴う射影不変曲率は KdV 方程式に従う"．もちろん $\mathbb{R}P^2$ の射影不変曲率は実数値函数である．メビウス幾何は複素射影直線 $\mathbb{P}_1$ の $\mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$ を変換群とする幾何であった．実 KdV は実射影直線内の射影幾何 (等積中心アフィン幾何), 複素 KdV は複素射影直線の射影幾何 (メビウス幾何) の時間発展に由来する．

3.7 まとめ

幾何	群	方程式
ユークリッド	$E(2)$	mKdV
中心アフィン	$\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$	KdV
等積アフィン	$SA(2)$	沢田・小寺
相似	$\mathrm{Sim}(2)$	Burgers
アフィン	$A(2)$	defoucusing KdV
メビウス	$\mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$	KdV
射影	$\mathrm{PSL}_3\mathbb{R}$	Kaup-Kuperschmidt

4 差分曲線論

これまでに見てきたように様々なソリトン方程式が曲線の時間発展に由来する．ではそれらの差分化を導くような幾何学（差分曲線論[21]）はどのようなものだろうか．現時点で「差分曲線の時間発展」ができているのはユークリッド幾何と共形幾何だけである．このどちらも Tim Hoffmann 氏の学位論文 [14] で得られている．

ユークリッド幾何の場合は次のように差分曲線を定義する．$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{E}^2$ が条件 $|\Delta_+ \boldsymbol{p}_n| = 1$ $(\Delta_+ \boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{p}_{n+1} - \boldsymbol{p}_n)$ をみたすとき discrete arclength parametrised curve とよぶ．このとき

$$\kappa_n := 2\tan\{\angle(\Delta_+ \boldsymbol{p}_{n-1}, \Delta_+ \boldsymbol{p}_n)/2\}$$

と定め，**差分ユークリッド曲率**とよぶ．差分曲線の場合にも離散時間発展を考えることで差分ユークリッド曲率が差分 mKdV に従うことが導ける．

メビウス幾何の場合には $\det(\boldsymbol{p}_n, \Delta_+ \boldsymbol{p}_n) = 1$ という規格化を考えればよい．差分汎の複素メビウス曲率は差分 KdV [12] に従う．

紙数の都合で詳細は割愛するので Hoffmann 氏の学位論文 [14] か論文 [15] を参照されたい．

他の幾何の場合に差分化がなぜ難しいかだけは説明しておく必要があるだろう．曲線論の差分化自体は他の幾何，例えばアフィン幾何や中心アフィン幾何でもできている．問題は曲線の時間発展である（我々の関心は可積分系にある！）半離散，つまり時間変数については連続のままであれば，さほど問題ではないのだが，時間変数を離散化することがかなり困難であり，それぞれの幾何ごとに工夫しなければならない．(半離散であれば，例えば中心アフィン幾何の場合に松浦望氏の結果 [23] がある) Hoffmann 氏の学位論文では巧妙な手続きを使って差分化を行っている．アフィン幾何（沢田・小寺方程式）の場合でもまだ差分曲線論は，できていない．今まで説明してきたように種々の幾何から各種のソリトン方程式が導かれた．幾何とソリトン方程式の関係を調べることの最大の利点は，**その方程式の対称性をつかさどる群が何であるか**を明確にしてくれる点にある．例えば非線型シュレディンガー方程式 (NLS) は球面 $S^2 = \mathrm{SU}(2)/\mathrm{U}(1)$ 内の曲線に関する Heisenberg 強磁性体方程式と等価 (橋本変換) だから SU(2) が対称性の群であり，それをアフィン化したアフィン・リー群[22]を用いて解空間 (グラスマン模型) が記述される．一方，暗いソリトンをもつ NLS の符号違いの方程式は双曲平面 $H^2 = \mathrm{SU}(1,1)/\mathrm{U}(1)$ 内の曲線に関する Heisenberg 強磁性体方程式と等価で，SU(1,1) が対称性の群である．(詳細は [17])

---

[21]数学教育用語では「折れ線の幾何」

[22]ループ群 ΛSU(2) を中心拡大したもの

本稿で挙げてきた“曲線の時間発展”ではラックス形式が自動的に得られ, 対称性の群も明らかになるが, スペクトル径数が導入できていない. Hoffmann の学位論文では KdV, mKdV の場合に, 曲線の同伴族 (associated family または spectral family) を巧妙に導入し, スペクトル径数込みのラックス形式を得ている. さらに曲線のベックルンド変換を構成している. スペクトル径数・ベックルンド変換は他の幾何の場合にはかなり難しいものであり, それぞれの幾何学特有の変換論を考察しなければならないが, それらはまだ未開拓である.

Hoffmann-Kutz の論文ではメビウス差分曲線論・ユークリッド差分曲線論と差分ボルテラ方程式 (辻本・廣田・大石 [32]), 戸田格子階層（上野・高崎 [31]）との関係も調べられていることを付記しておく.

5 今後の課題

いろいろな幾何学に応じて様々なソリトン方程式が得られた. これはどういうことを我々に教えてくれるのだろうか？

たとえば mKdv は 3 階微分, 沢田・小寺方程式は 5 階微分を含む可積分方程式である. この階数の意味が説明される. ユークリッド幾何ではそもそも曲率が 2 次微分量であるから, その時間発展をとることにより 3 階の微分方程式になる. アフィン曲率は, ユークリッド幾何に似せて記述したので 2 階微分量と誤解しやすいが実は **4 階微分量**である. 故に沢田・小寺方程式は 5 階微分方程式なのである. (中心アフィン変換群は $E(2)$ を含んでいないので例外にあたる. 実際, 中心アフィン曲率は 2 次微分量)

平面曲線だけでなく, 空間曲線や曲面の場合にも言えることであるが, 群を合同変換群からもっと大きな群にすると微分不変量の階数は 2 より真に大きくなる. 従って「階数の高いソリトン方程式」は合同変換群より大きな群 G が, その方程式の対称性をつかさどる. その対称性を具現化するものが G を変換群にもつクライン幾何[23]である.

また “メビウス $\longrightarrow$ ユークリッド” という逓減 (荒い幾何から細かい幾何へ) が誘導する変換がミウラ変換であった. 同様に種々の大きい群の幾何からユークリッド幾何への逓減により, ミウラ型の変換が誘導される.

ミウラ変換の幾何学的定義・一般化を与えられるといえる.

いくつかの課題を挙げて本稿を閉じよう.

[23] 多くの場合 “陽のあたらない幾何”

課題

1. **差分曲線論を各々の古典幾何に対してつくり Lax 対を与えよ.**
この課題は, それぞれの差分方程式に対し「最も自然な Lax 対は何か」という問いへの幾何学的回答を与えるのがねらい.
2. **超離散曲線論を作れ.**
いろいろな幾何に対する超離散曲線論を使って, 超離散ができていない方程式を超離散化するのが目標. 最初は超離散ができている方程式 (例えばバーガース方程式 [26]) から始めるべきであろう.
3. **超離散曲面論を作れ.** とくにガウス曲率 -1 の曲面と橋本曲面".
どちらも差分曲面は出来ており可和分条件は差分サイン・ゴルドン方程式[24], 差分 NLS 方程式である. この課題には次のねらいがある.

   これらの曲面の超離散化をつくり, **(懸案の) 超離散サイン・ゴルドン方程式, 超離散 NLS 方程式を導く.**
4. **弾性体への応用はあるか.**
ユークリッド幾何 (空間曲線) の場合については西成 [25] 参照. 他の幾何の場合の弾性体, 差分弾性体は工学への応用があるだろうか. (アフィン幾何の画像処理への応用などが考えられるだろうか)
5. **超離散等角写像をつくれ**
差分等角写像は既につくられている [4], [6], [11]. (筧三郎氏の講演 [20] にも登場したことに注意.) 超離散曲線論・超離散曲面論は手がかりすらない現状を鑑みると, まず最初にとりかかるべきは等角写像の超離散化であろう.

謝辞 講演の機会をくださった西成活裕先生, 有益なコメントをいただいた広田良吾・上野喜三雄・中村佳正・高橋大輔・香取眞理・筧三郎の諸先生方, 講演内容の相談に乗ってくださった矢島徹先生・藤岡敦先生・松浦望先生, まとまりのない講演を操縦してくださった座長の野海正俊先生に感謝いたします.

参考文献

[1] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problem, Stud. Appl. Math. **53** (1974) 249–315.

[2] M. F. Atiyah, *Geometry of Yang-Mills Fields*, (Fermi Lectures), Accad. Naz. Lincei, Scoula Norm. Sup., Pisa, 1979.

[24] [6],[13], 差分曲面の日本語による解説には [19] がある.

[3] A. Belavin, A. Polyakov, A. Schwartz and Yu. Tyupkin, Pseudo-particle solutions of the Yang-Mills equations, Phys. Letter **59B** (1975), no. 1, 85–87.

[4] A. I. Bobenko, Discrete conformal maps and surfaces, *Symmetries and Integrability of Difference Equations*[25] (Canterbury, 1996), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **255** (1999), Cambridge Univ. Press, Cambridge, pp. 97–108.

[5] A. I. Bobenko and U. Eitner, *Painlevé Equations in Differential Geometry of Surfaces*, Lecture Notes in Math., Springer Verlag.

[6] A. I. Bobenko and U. Pinkall, Discretization of surfaces and integrable systems, in: *Discrete Integrable Geometry and Physics*, (A. I. Bobenko and R. Seiler eds.), Oxford Lecture Series in Math. and Appl. **16** , Oxford Unv. Press, 1999., pp. 3–58.

[7] K. S. Chou and C. Qu, Integrable equations arising from motions of plane curves, Phisica D **162** (2002), 9–23.

[8] A. Fujioka (藤岡敦) and J. Inoguchi, Bonnet surfaces of constant curvature, Results Math. **33** (1998), no. 3-4, 288–293.

[9] R. E. Goldstein and D. M. Petrich, The Korteweg-de Vries hierarchy as dynamics of closed curves in the plane, Phys. Rev. Lett. **67** (1991), no. 23, 3203–3206.

[10] U. Hertrich-Jeromin, *Introduction to Möbius Differential Geometry*, London Math. Soc. Lecture Note Series **300**, Camnridge Univ. Press, 2003.

[11] U. Hertrich-Jeromin, I. McIntosh, P. Norman and F. Pedit, Periodic discrete conformal maps, J. reine angew. Math. **534** (2001), 129–153.

[12] R. Hirota (広田良吾), Nonlinear partail difference equations. I. A difference analogue of the Korteweg-de Vries equation, J. Phys. Soc. Japan **43** (1977), 1424–1433.

[13] R. Hirota, Nonlinear partail difference equations. III. Discrete Sine-Gordon equation, J. Phys. Soc. Japan **43** (1977), 2079–2086.

[25]SIDE 2

[14] T. Hoffmann, *Discrete curves and surfaces*, Ph. D. Thesis, TU-Berlin, 2000.

[15] T. Hoffmann and N. Kutz, Discrete curves in $\mathbb{C}P^1$ and the Toda lattice, preprint, 2002, math.DG/0208190.

[16] J. Inoguchi, 離散射影微分幾何はやわかり, 離散可積分系の研究の進展—超離散化・量子化, (筧三郎編集), 数理解析研究所講究録 **1221** (2001), pp. 112–124.

[17] J. Inoguchi, Integrable systems in unfashionable geometries, 数理解析研究所講究録 (増田哲氏編集),

[18] J. Inoguchi, 数学科教員をめざす人のための「距離と合同」, 宇都宮大学講義用ノート.

[19] J. Inoguchi, S. P. Kobayashi (小林真平[26]) and N. Matsuura (松浦望), 曲面の微分幾何学とソリトン方程式, 立教大学数学レクチャーノート, 2005.

[20] S. Kakei (筧三郎), 本講究録.

[21] M. Katori (香取眞理), 本講究録.

[22] S. Kobayashi (小林昭七), 接続の微分幾何とゲージ理論, 裳華房, 1989.

[23] N. Matsuura, 離散 KdV 方程式, 第 51 回幾何学シンポジウム予稿 (2004), pp. 184–186.

[24] K. Nakayama, H. Segur and M. Wadati, Integrability and the motion of curves, Phys. Rev. Letters **69** (1992), 2603–2606.

[25] K. Nishinari (西成活裕), 幾何と可積分性, およびその弾性体への応用, 第 51 回幾何学シンポジウム予稿 (2004), pp. 55–65.

[26] K. Nishinari and D. Takahashi, Analytical properties of ultradiscrete Burgers equations and rule-184 cellur automaton, J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998), 5439–5450.

[27] K. Nomizu (野水克己) and T. Sasaki (佐々木武), アファイアン微分幾何学–アファインはめ込みの幾何, 裳華房, 1994.

[28] U. Pinkall, Hamiltonian flows on the space of star-shaped curves, Results in Math. **27** (1995), 328–332.

[26] 神戸大学大学院生

[29] C. Rogers and W. Schief, *Bäcklund and Darboux Transformations. Geometry and Modern Applications in Soliton Theory*, Cambridge Texts in Applied Math., Cambridge Univ, Press, 2002.

[30] T. Sasaki (佐々木武), *Projective Differential Geometry and Linear Homogeneous Differential Equations*, Rokko Lectures in Mathematics **5** (1999), Kobe University.

[31] K. Ueno (上野喜三雄) and K. Takasaki (高崎金久), Toda lattice hierarchy, *Group Representations and Systems of Differential Equations* (Tokyo, 1982), Adv. Stud. Pure Math., **4**, North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 1–95.

[32] S. Tsujimoto (辻本諭), R. Hirota (広田良吾) and S. Oishi (大石進一), An extension and discretization of Volterra equation, Techn. Report IEICE,NLP 92-90 (1993).

〒321-8505 宇都宮市峰町 350 宇都宮大学教育学部
inoguchi@cc.utsunomiya-u.ac.jp