

## 可積分系のグラフ論的描像について Graph Theoretical Aspects of Integrable Systems

京都大学情報学研究科 中村 佳正<sup>1</sup>(Yoshimasa Nakamura)

Depart. of Appl. Math. and Phys., Grad. School of Informatics, Kyoto Univ.

京都大学情報学研究科 上岡 修平<sup>2</sup>(Shuhei Kamioka)

Depart. of Appl. Math. and Phys., Grad. School of Informatics, Kyoto Univ.

京都大学情報学研究科 大平 倫宏<sup>3</sup>(Norihiro Ohira)

Depart. of Appl. Math. and Phys., Grad. School of Informatics, Kyoto Univ.

**Abstract.** Graph theoretical aspects of certain integrable systems are discussed including the semi-infinite and the infinite Toda chains, the recurrence relations of the qd and the FG algorithms. Hankel determinants of various combinatorial numbers are computed as tau-function solutions of the Toda chains. Weighted sums of the Dyck paths and the Schröder paths are also computed through Hankel and Toeplitz determinants of certain combinatorial numbers, respectively.

### 1 はじめに

組合せ論的数のなす Hankel 行列式は関連するグラフの重みを表す重要な量として捉えられ、従来は様々な離散数学的手法で計算されてきた (cf. [1, 4]). 一方、可積分系の Lax 対によって直交多項式の 1 パラメータ変形が誘導されることに基づいて、可積分系のタウ関数解のモーメントによる Hankel 行列式表示が得られている。このことから、組合せ論的数のなす Hankel 行列式を通じて、可積分系のグラフ論的描像を論じることが可能になる。

本報告の前半部分では、連続時間の戸田方程式に基づく、種々の組合せ論的数の Hankel 行列式の計算について説明する。第 2 節では、半無限戸田方程式の変数分離解について、Sheffer クラスの直交多項式との密接な関係を述べつつ、Euler 数、Bell 数等の指数型の母関数を持つ組合せ論的数について報告する [9]。第 3 節では、無限戸田方程式の特殊解である 0 ソリトン解 (真空解) について考察し、直交多項式の Geronimus, Christoffel 変換に着目して、Catalan 数を含むクラスの組合せ論的数のなす Hankel 行列式を具体的に書き下す [10]。

後半では、離散可積分系とグラフ論で取り扱われる組合せ論的数の関係を明らかにし、種々の組合せ論的量を離散可積分系を用いた計算方法を定式化する。第 4 節においては、Dyck path に関連した qd アルゴリズムのグラフ論的な解釈を与えた Viennot(2000) の研究 [12] を解説する。Hankel 行列式はグラフの重みの総和というグラフ論的意味をもつ。重みが 1 の場合はグラフの本数の数え上げに相当する。第 5 節では、Schröder path と FG アルゴリズムとの間に、qd アルゴリズムと Dyck path と同様な密接な関係があることを新たに示し、Toeplitz 行列式のグラフ論的意味を考察して、Schröder path の重みの総和の計算等、FG アルゴリズムの組合せ論への応用について論じる。

<sup>1</sup>ynaka@amp.i.kyoto-u.ac.jp

<sup>2</sup>kamioka@amp.i.kyoto-u.ac.jp

<sup>3</sup>ohira@amp.i.kyoto-u.ac.jp

## 2 半無限戸田方程式と Sheffer クラスの組合せ論的数

半無限戸田方程式の変数分離解は, Sheffer クラスの直交多項式によって分類可能となる [9]. さらに, それぞれの直交多項式に組合せ論的数が対応し, それらのなす Hankel 行列式が半無限戸田方程式のタウ関数解として計算可能である.

### 2.1 半無限戸田方程式の変数分離解

3 項漸化式

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + u_n P_{n-1}(x) &= x P_n(x) \\ P_0 &= 1, \quad P_1(x) = x - b_0, \quad (u_n \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (1)$$

で定義されるモノックな  $n$  次多項式  $P_n(x)$  に対して

$$\sigma(P_n(x)P_m(x)) = h_n \delta_{nm} \quad (2)$$

なる直交関係を満たす線形汎関数  $\sigma$  が存在する.  $\sigma$  が定めるモーメント  $c_n = \sigma(x^n)$ , ( $n = 0, 1, \dots$ ) のなす Hankel 行列式

$$D_n = \det(c_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}, \quad D_0 = 1, \quad D_{-1} = 0 \quad (3)$$

は  $D_n > 0$  を満たし, これを用いて直交多項式  $P_n(x)$  の表現

$$P_n(x) = \frac{1}{D_n} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix} \quad (4)$$

が得られる. ここでパラメータ  $t$  によるモーメントの変形

$$\frac{dc_n}{dt} = c_{n+1}, \quad (n = 0, 1, \dots, \quad t \in \mathbf{R}) \quad (5)$$

を導入する. このとき, 直交多項式の係数  $\{u_n, b_n\}$  は Hankel 行列式 (3) を用いて

$$u_n = \frac{D_{n-1}D_{n+1}}{D_n^2}, \quad b_n = \frac{1}{D_{n+1}} \frac{dD_{n+1}}{dt} - \frac{1}{D_n} \frac{dD_n}{dt} \quad (6)$$

と書け, 半無限戸田方程式

$$\frac{du_n}{dt} = u_n(b_n - b_{n-1}), \quad \frac{db_n}{dt} = u_{n+1} - u_n, \quad u_0 = 0, \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (7)$$

を満足する. 半無限戸田方程式を双線形形式で書くと

$$D_{n+1}D_{n-1} = D_n \frac{d^2 D_n}{dt^2} - \left( \frac{dD_n}{dt} \right)^2 \quad (8)$$

となり, これは (5) を通じて Sylvester の行列式恒等式に帰着する.

半無限戸田方程式の特殊解として, モーメントが

$$c_n(t) = T_n(y(t))c_0(t), \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (9)$$

と表されている場合を考察する. ただし,  $T_n(y(t))$  はある未知関数  $y(t)$  の  $n$  次の多項式とする.  $T_n(y(t))$  は直交多項式とは限らない. このとき, 次の定理が成り立つ.

定理 1. ([9]) モーメント  $c_n(t) = T_n(y(t))c_0(t)$  が半無限戸田方程式の解を与えることと以下の A)~C) が成り立つことは同値である.

A) 関数  $y(t)$  は方程式

$$\frac{dy(t)}{dt} = \sigma(y)$$

の解である. ただし,  $\sigma(y)$  は  $\sigma(y) = \xi y^2 + \eta y + \zeta$  なる  $y$  の 2 次以下の (非零) 多項式.

B)  $t(y)$  を  $y(t)$  の逆関数とみての関数  $\phi(y) \equiv c_0(t(y))$  は方程式

$$\phi'(y) = \frac{\tau(y)}{\sigma(y)}\phi(y)$$

の解である. ただし,  $\tau(y)$  は  $\tau(y) = \alpha y + \beta$  なる  $y$  の 1 次式.

C)  $\alpha \neq 0$  と  $\beta$  は任意定数で,  $\alpha$  と  $\xi$  の間には

$$\xi \neq -\frac{\alpha}{n}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

の関係式が成り立つ.

この結果,  $T_n(y(t))$  は  $\sigma(y)$ ,  $\tau(y)$  を用いて逐次的に定まり, このクラスの変数分離解は完全に分類される.

系 1. モーメント  $c_n(t)$  が  $c_n(t) = T_n(y(t))c_0(t)$  を満たすとき, 次の I)~II) が成り立つ,

I) 直交多項式の漸化式の係数は

$$\begin{aligned} b_n(t(y)) &= \tau(y) + n\sigma'(y), \\ u_n(t(y)) &= n\sigma(y) \left( \tau'(y) + \frac{1}{2}(n-1)\sigma''(y) \right) \\ &= n(\alpha + (n-1)\xi)\sigma(y(t)) \end{aligned} \quad (10)$$

と書かれ,  $u_n = u_n(t)$  は半無限戸田方程式

$$\frac{d^2 \log u_n}{dt^2} = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} \quad (11)$$

の変数分離解を与える.

II) 対応する 3 項漸化式 (1) は Sheffer クラス (Meixner, Laguerre, Pollaczek, Charlier, Hermite) の直交多項式 (cf. [3])

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) + (\beta\gamma + n(v_3 + v_4))P_n(x) + n(n + \gamma - 1)v_1v_2P_{n-1}(x) &= xP_n(x), \\ P_0 &= 1, \quad P_1(x) = x - \beta\gamma, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \frac{t^n}{n!} = A(t)e^{xF(t)}, \quad (A(0) = 1, F(0) = 0) \quad (13)$$

を与える.

## 2.2 Sheffer クラスの組合せ論的数のなす Hankel 行列式

定理 1. における  $\sigma(y) = \xi y^2 + \eta y + \zeta$  の選択を通じて変数分離解を分類すれば, 対応するモーメント  $c_0(t)$  が種々の組合せ論的数の母関数となることがわかる. さらに, 半無限戸田方程式のタウ関数解  $D_n(t)$  を通じて, これらの組合せ論的数の Hankel 行列式  $D_n(0)$  を帰納的に書き下すことができる. 表 1 のように対応する組合せ論的数, Sheffer クラス, Hankel 行列式等は 5 つの場合に分類される.

表 1: semi-infinite Toda chain, combinatorial numbers  
and orthogonal polynomials of Sheffer class

	Case 1.	Case 2.	
$\sigma(y)$	$-y^2 + 1$	$-(y-1)^2$	
moment gen. fun. $c_0(t)$	$2e^t/(e^{2t} + 1)$	$(t+1)^\alpha e^{-xt+x}$	
Toda solution $u_n(t)$	$-n(n-\alpha-1)\operatorname{sech}^2(t)$	$n(n-\alpha-1)/(t+1)^2$	
combinat. number	Euler number $E_k$	binomial coeff. $\binom{\alpha}{k}$	
Hankel det. $D_n$	$\left(\prod_{k=0}^{n-1} k!\right)^2$	$(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} \prod_{k=1}^{n-1} k!(\alpha-k+1)^{n-k}$	
Sheffer orth. poly.	Meixner poly.	Laguerre poly.	
	Case 3.	Case 4.	Case 5.
$\sigma(y)$	$-y^2 - 1$	$y + 1$	1
moment gen. fun. $c_0(t)$	$\sec^{-\alpha} t \cdot e^{-t}$	$\exp(e^t - 1)$	$\exp(-t^2 + 2xt)$
Toda solution $u_n(t)$	$n(n-\alpha-1)\sec^2 t$	$n\alpha e^t$	$n\alpha$
combinat. number	Euler number $E_k$	Bell number $B_k$	Hermite poly. $H_k(z)$
Hankel det. $D_n$	$\left(\prod_{k=0}^{n-1} k!\right)^2$	$\prod_{k=0}^{n-1} k!$	$(-2)^{n(n-1)} \prod_{k=0}^{n-1} k!$
Sheffer orth. poly.	Pollaczek poly.	Charlier poly.	Hermite poly.

## 3 無限戸田方程式と Catalan クラスの組合せ論的数

半無限戸田方程式と同様に無限戸田方程式にも組合せ論との対応関係が存在し, 特に 0 ソリトン解 (真空解) は Catalan 数を含む組合せ論的数のクラスと対応している. 本節では直交多項式理論におけるモーメントと直交多項式の Geronimus, Christoffel 変換に着目し, これらの変換によって生成される組合せ論的数のなす Hankel 行列式を導出する [10].

3.1 無限戸田方程式と Geronimus 変換による Catalan クラスの組合せ論的数のなす Hankel 行列式の計算

まず, Catalan 数  $C_n$  の定義, 具体例, 漸化式を与える (図 1 参照).

原点  $(0, 0)$  と点  $(2n, 0)$  を結ぶ格子路のうち, 条件  $y \geq 0$  を満たすものの本数.  
(長さ  $2n$  の Dyck path の本数に一致する)

$$C_0 = 1, C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5, C_4 = 14, C_5 = 42, \dots$$

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}.$$

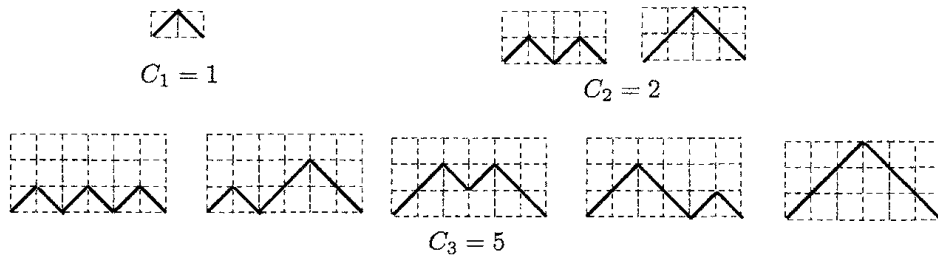


図 1: Catalan number.

同様に, Motzkin 数  $M_n$  の定義, 具体例, 漸化式は以下の通りである (図 2 参照).

原点  $(0, 0)$  と点  $(n, 0)$  を結ぶ格子路のうち, 条件  $y \geq 0$  を満たすものの本数.  
(ただし, 長さ 1 の横方向へのステップを許す)

$$M_0 = 1, M_1 = 1, M_2 = 2, M_3 = 4, M_4 = 9, M_5 = 21, \dots$$

$$M_n = M_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} M_k M_{n-k-2}.$$

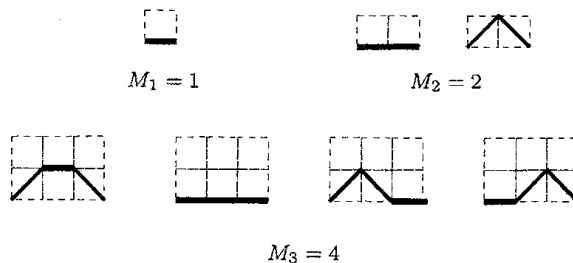


図 2: Motzkin number.

さて, 初期条件

$$\tau_1 = \varphi(t), \quad \tau_0 = 1, \quad \tau_{-1} = \psi(t) \tag{14}$$

(ただし,  $\varphi, \psi$  は  $t$  の任意関数) に対する無限戸田方程式

$$\frac{d^2\tau_n}{dt^2}\tau_n - \left(\frac{d\tau_n}{dt}\right)^2 = \tau_{n-1}\tau_{n+1} - \varphi\psi\tau_n^2, \quad (n \in \mathbf{Z}) \quad (15)$$

のタウ関数解は

$$\tau_n = \begin{vmatrix} a_0 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & \cdots & a_{2n-2} \end{vmatrix}, \quad (n > 0), \quad \tau_n = \begin{vmatrix} b_0 & \cdots & b_{-n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{-n-1} & \cdots & b_{-2n-2} \end{vmatrix}, \quad (n < 0) \quad (16)$$

$$a_n = \frac{da_{n-1}}{dt} + \psi \sum_{k=0}^{n-2} a_k a_{n-k-2}, \quad (a_0 = \tau_1 = \varphi) \quad (17)$$

$$b_n = \frac{db_{n-1}}{dt} + \varphi \sum_{k=0}^{n-2} b_k b_{n-k-2}, \quad (b_0 = \tau_{-1} = \psi) \quad (18)$$

で与えられる [7].

以下では, 特殊解として

$$\psi = \beta e^{-\gamma t}, \quad \varphi = \alpha_0 e^{\gamma t} \quad (\alpha_0, \beta, \gamma: \text{任意定数}) \quad (19)$$

なる  $\varphi, \psi$  によって特徴づけられる 0 ソリトン解 (真空解) を考える. このとき,  $\alpha_n := a_n e^{-\gamma t}$  で定まる  $\alpha_n$  は定数となり, 無限戸田方程式 (15) を帰納的に用いると,  $\alpha_n$  の通常母関数,  $n > 0$  なるタウ関数  $\tau_n$  は, それぞれ,

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n = \frac{1 - \gamma x - \sqrt{(\gamma^2 - 4\alpha_0\beta)x^2 - 2\gamma x + 1}}{2\beta x^2},$$

$$\tau_n(t) = \alpha_0^n (\alpha_0\beta)^{\frac{n(n-1)}{2}} e^{\gamma n t} \quad (20)$$

と表される. 任意定数  $\alpha_0, \beta, \gamma$  の選択により  $\alpha_n$  は種々の組合せ論的数となる.

i)  $\alpha_0 = 1, \beta = 1, \gamma = 0$  ととったとき,  $\alpha_n$  は  $\alpha_{2n} = C_n, \alpha_{2n+1} = 0$  により Catalan 数  $C_n$  と対応する.

ii)  $\alpha_0 = 1, \beta = 1, \gamma = 1$  としたとき,  $\alpha_n$  は  $\alpha_n = M_n$  により Motzkin 数  $M_n$  と一致する.

これらの場合,  $\alpha_n$  のなす Hankel 行列式は  $\tau_n(0) = 1, (n = 1, 2, \dots)$  となる (cf. [1, 4]).

同じ特殊解について新たに定数  $\alpha'_n$  を  $\alpha'_{n+1} := a_n e^{-\gamma t}, (n = 1, 2, \dots, \alpha'_1: \text{任意定数})$  により導入する. 変換

$$\alpha_n \rightarrow \alpha'_n = \alpha_{n-1} \quad (21)$$

は直交多項式論におけるモーメントの Geronimus 変換である. このとき,  $\alpha'_n$  の通常母関数は

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha'_n x^n = \frac{1 + (2\alpha'_0\beta - \gamma)x - \sqrt{(\gamma^2 - 4\alpha'_1\beta)x^2 - 2\gamma x + 1}}{2\beta x} \quad (22)$$

となる. また, Hankel 行列式  $H_n := \det(\alpha'_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}$  に対して Plücker 関係式

$$\xi_{0 \dots n-1}^0 \xi_{1 \dots n+1}^0 - \xi_{1 \dots n}^0 \xi_{0 \dots n-1, n+1}^0 + \xi_{1 \dots n-1, n+1}^0 \xi_{0 \dots n}^0 = 0, \quad (23)$$

と Sylvester 恒等式

$$D \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ n & n+1 \end{pmatrix} D = D \begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} n+1 \\ n+1 \end{pmatrix} - D \begin{pmatrix} 1 \\ n+1 \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} n+1 \\ n \end{pmatrix} \quad (24)$$

を用いることにより,  $H_n$  の満たす 3 項漸化式

$$H_{n+1} = (\alpha'_1)^n \beta^{n-1} \gamma H_n - (\alpha'_1)^{2n} \beta^{2n-2} H_{n-1}, \quad H_0 = 1, \quad H_1 = \alpha'_0 \quad (25)$$

が得られる.

任意定数  $(\alpha'_0, \alpha'_1, \beta, \gamma)$  を具体的に与えると, i), ii) 以外の組合せ論的数  $\alpha'_n$  のなす Hankel 行列式  $H_n$  が書き下される [10]. 例えば,

iii)  $(\alpha'_0, \alpha'_1, \beta, \gamma) = (a, b, 1, 2a)$  のとき,  $\alpha'_n$  は一般化 Catalan 数  $K_n(a, b)$  に一致する,  $\alpha'_n = K_n(a, b)$ . 3 項漸化式は  $H_{n+1} = 2ab^n H_n - b^{2n} H_{n-1}$  となり, 特に,  $H_n(a = x, b = 1)$  は Chebyshev 多項式である.

iv)  $(\alpha'_0, \alpha'_1, \beta, \gamma) = (1, 1, m+1, m+2)$  のとき,  $\alpha'_n$  は  $m$ -color super Catalan 数  $S_n(m)$  となる,  $\alpha'_n(m) = S_n(m)$ .  $\alpha'_n$  のなす Hankel 行列式  $H_n$  は  $H_n(m) = (m+1)^{n(n-1)/2}$  である.

v)  $(\alpha'_0, \alpha'_1, \beta, \gamma) = (1, w, 1, w+1)$  のとき,  $\alpha'_n$  は Narayama 多項式  $N_n(w)$  に一致する,  $\alpha'_n = N_n(w)$ . Narayama 多項式のなす Hankel 行列式は  $H_n(w) = (w+1)^{n(n-1)/2}$  となる.

vi)  $(\alpha'_0, \alpha'_1, \beta, \gamma) = (1, 1, 1, \gamma)$  のとき,  $\alpha'_n$  は polyomino 数と呼ばれる数となる,  $\alpha'_n(\gamma = 3) = P_n$ . 3 項漸化式は  $H_{n+1} = \gamma H_n - H_{n-1}$  となるが,  $\gamma = 3$  のとき Hankel 行列式は奇数番の Fibonacci 数に一致する.  $H_n(\gamma = 3) = F_{2n-1}$ .

vii)  $(\alpha'_0, \alpha'_1, \beta, \gamma) = (1, 1, m, 2m)$  のとき,  $\alpha'_n$  は Catalan 数を用いて  $\alpha'_n(m) = m^n C_n$  と書かれる. この数のなす Hankel 行列式は  $H_n(m) = m^{n(n-1)}$  である.

ここで, iv) に現れた  $m$ -color super Catalan 数  $S_n(m)$  の定義, 具体例を与える (図 3 参照).

原点  $(0, 0)$  と点  $(2n, 0)$  を結ぶ格子路のうち, 条件  $y \geq 0$  を満たすものの本数.

(ただし,  $m$  種類の長さ 2 の横ステップを含む)

$$S_0(1) = 1, S_1(1) = 1, S_2(1) = 3, S_3(1) = 11, S_4(1) = 45, \dots$$

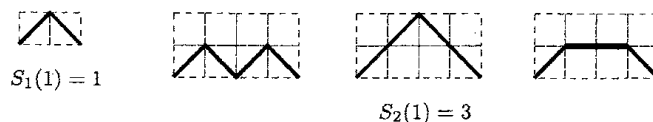


図 3: super Catalan number.

また, vi) の polyomino 数  $P_n$  の定義, 具体例は次のように与えられる (図 4 参照).

斜線付きの正六角形を元に,  $n$  個の正六角形を隣接させる場合の数

(ただし, 六角形の隣り合う 2 辺が同ときに他の六角形に接してはならない)

$$P_0 = 1, P_1 = 1, P_2 = 3, P_3 = 10, P_4 = 36, \dots$$

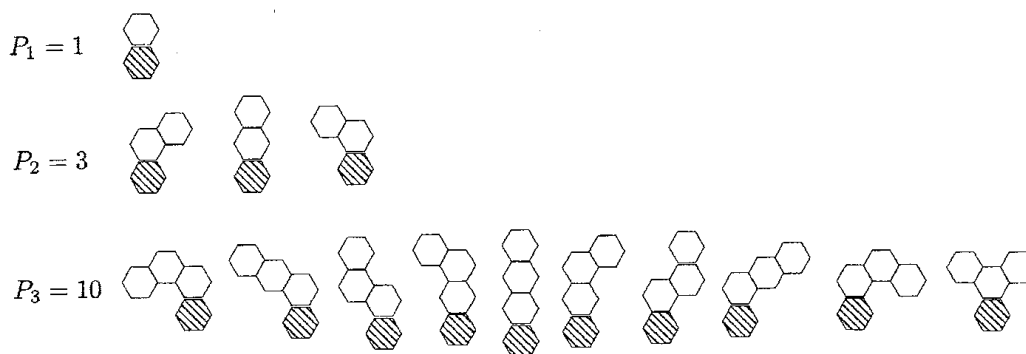


図 4: polyomino number.

3.1 節の結果は以下の表 2 のようにまとめられる. 2 節で扱った Sheffer クラスの直交多項式ではなく, Chebyshev 多項式のクラスが現れている. 表 2 では, 既存の組合せ論的数のなす Hankel 行列式を与えているが, これ以外にも名前のわからない組合せ論的数のなす Hankel 行列式も多数導出されている.

表 2: infinite Toda chain and combinatorial numbers

	$\{\alpha'_0, \alpha'_1, \beta, \gamma\}$	combinat. number $\alpha'_n$	Hankel det. $H_n$
i)	$\{1, 1, 1, 2\}$	Catalan number $C_n$	1
ii)	$\{1, 1, 1, 1\}$	Motzkin number $M_n$	1
iii)	$\{a, b, 1, 2a\}$ $\{x, 1, 1, 2x\}$	gen. Catalan number $K_n(a, b)$	$H_{n+1} = 2ab^n H_n - b^{2n} H_{n-1}$ Chebyshev poly.
iv)	$\{1, 1, m+1, m+2\}$	$m$ -color super Catalan number	$(m+1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$
v)	$\{1, w, 1, w+1\}$ $\{1, 2, 1, 3\}$	Narayana poly. $N_n(w)$ Schröder number	$w^{\frac{n(n-1)}{2}}$ $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$
vi)	$\{1, 1, 1, \gamma\}$ $\{1, 1, 1, 3\}$	polyomino number	$H_{n+1} = \gamma H_n - H_{n-1}$ Fibonacci number $F_{2n-1}$
vii)	$\{1, 1, m, 2m\}$	$m^n C_n$	$m^{n(n-1)}$



### 3.2 無限戸田方程式と Christoffel 変換による Catalan クラスの組合せ論的数のなす Hankel 行列式の計算

前節では主に直交多項式論における Geronimus 変換に対応する Hankel 行列式について紹介した。直交多項式論では Geronimus 変換の逆変換として、

$$\alpha_n \rightarrow \alpha'_n = \alpha_{n+1} - x\alpha_n \quad (26)$$

なる Christoffel 変換が存在する。本節では Christoffel 変換で定義される組合せ論的数  $\alpha'_n$  のなす Hankel 行列式を考察する。

$\alpha_n$  をモーメント列としてもつ線形汎関数  $\sigma$  とそれに付随する  $n$  次直交多項式  $Q_n(x)$

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(x) &= (a_n x + b_n)Q_n(x) - c_n Q_{n-1}(x), \quad Q_0 = 1, \quad (n = 1, 2, \dots) \\ \sigma(Q_n(x)Q_m(x)) &= \delta_{nm}, \quad \alpha_n = \sigma(x^n), \quad (n = 0, 1, \dots) \end{aligned} \quad (27)$$

を考える。直交多項式  $Q_n(x)$  は行列式を用いて

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{H_{n-1}H_n}} \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n-1} & \alpha_n & \cdots & \alpha_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix} \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{H_{n-1}H_n}} \begin{vmatrix} \alpha_1 - x\alpha_0 & \alpha_2 - x\alpha_1 & \cdots & \alpha_n - x\alpha_{n-1} \\ \alpha_2 - x\alpha_1 & \alpha_3 - x\alpha_2 & \cdots & \alpha_{n+1} - x\alpha_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_n - x\alpha_{n-1} & \alpha_{n+1} - x\alpha_n & \cdots & \alpha_{2n-1} - x\alpha_{2n-2} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

と表わすことができる。 $\alpha'_n = \alpha_{n+1} - x\alpha_n$  とおけば、(28) は直交多項式  $Q_n(x)$  は Christoffel 変換されたモーメント  $\alpha'_n$  のなす Hankel 行列式と (定数倍を除いて) 等しいことを示している。このことから  $\alpha'_n$  のなす Hankel 行列式が

$$H'_n(x) := \begin{vmatrix} \alpha'_0 & \alpha'_1 & \cdots & \alpha'_{n-1} \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & \cdots & \alpha'_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha'_{n-1} & \alpha'_n & \cdots & \alpha'_{2n-1} \end{vmatrix} (x) = (-1)^n \sqrt{H_{n-1}H_n} Q_n(x) \quad (29)$$

と計算される。

例として、 $x = -1$  とおき、Catalan 数の隣接和  $\alpha'_n = \alpha_{n+1} + \alpha_n = C_{n+1} + C_n$  を考える。直交多項式の係数は行列式  $H_n=1$  から計算され  $a_n = 1$ ,  $b_n = -2$  ( $n \geq 1$ ),  $b_0 = -1$ ,  $c_n = 1$  となり、3 項漸化式は  $Q_{n+1}(x) = -(x-2)Q_n(x) - Q_{n-1}(x)$  と書き下される。 $x = -1$  とすれば Catalan 数の隣接和のなす Hankel 行列式は Fibonacci 数を用いて

$$H'_n := \det(C_{i+j+1} + C_{i+j})|_{i,j=0}^{n-1} = F_{2n+1}, \quad H'_n := \det(C_{i+j+2} + C_{i+j+1})|_{i,j=0}^{n-1} = F_{2n+2}$$

と表される。

## 4 qd アルゴリズムと重み付き Dyck path

qd アルゴリズムのグラフ論的解釈が Viennot[12] によって与えられている. その過程において, 連分数や Hankel 行列式のグラフ論的な解釈が可能となり, この結果, qd アルゴリズムを用いた path の重みの総和等の計算方法が定式化されている. qd アルゴリズムは離散時間半無限戸田方程式に他ならない. 本節では, [12] に基づいて qd アルゴリズムの重み付き Dyck path への応用を解説する.

### 4.1 重み付き Dyck path

NE(右斜め上) ステップ, SE(右斜め下) ステップのみによって構成される  $(0,0)$  から  $(2n,0)$  までの長さ  $2n$  の格子路を Dyck path という. NE, SE ステップについては図 5,6 参照.



図 5: NE step.



図 6: SE step.

今, 高さ  $h$  から始まる NE ステップには重み 1 が SE ステップには重み  $\beta_h (1 \leq h < \infty)$  が付いているとする (重み付き Dyck path). Dyck path の性質より 1 つの NE ステップの後には必ず 1 つの SE ステップが来なければならない. よって, このように SE ステップだけに重みを付けても一般性を失わない. 以下, 1 本の格子路を  $w$  で表し, その path の長さを  $\text{length}(w)$  とかく. これは NE, SE ステップの数の和と一致する. path の重みを  $\text{weight}(\beta; w)$  とする. これは path を構成するステップの重みの積である. さらに, 長さ  $n$  の path の重みの総和を

$$\mu_n^D(\beta) := \sum_{\text{length}(w)=2n} \text{weight}(\beta; w), \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (30)$$

と表す. 例として,  $\beta_h = 1$  とおくと  $\mu_n^D(\beta)$  は Catalan 数  $C_n$  に,  $\beta_{2h} = 1, \beta_{2h+1} = m$  とすると  $\mu_n^D(\beta)$  は  $m$ -color super Catalan 数となる. また, この  $\mu^D(\beta)$  に対する母関数を

$$g^D(\beta; z) := \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^D(\beta) z^n \quad (31)$$

と定義する. 図 7 に重み付き Dyck path の例を示す.

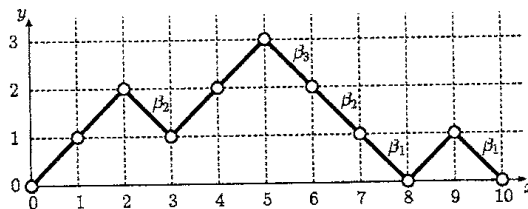


図 7: A weighted Dyck path with  $\text{length}(w) = 10$  and  $\text{weight}(\beta; w) = (\beta_1)^2(\beta_2)^2\beta_3$ .

### 4.2 重み付き Motzkin path

NE, SE ステップだけでなく E ステップを加えて構成される格子路を Motzkin path と呼ぶ. E ステップについては図 8 参照. Motzkin path の長さ  $\text{length}(w)$  は NE, SE, E ステップの数の和として定義される. Motzkin path の重み  $\text{weight}(b, c; w)$  は path を構成するステップの重みの積とする.



図 8: NE, SE and E steps.

以下では, NE ステップの重みを 1, 高さ  $h$  から始まる SE ステップの重みを  $b_h$ , 高さ  $h$  の E ステップの重みを  $c_h$  とする. さらに, 長さ  $n$  の path の重みの総和を

$$\mu_n^M(b, c) := \sum_{\text{length}(w)=n} \text{weight}(b, c; w), \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{32}$$

$\mu^M(b, c)$  に対する母関数  $g^M(b, c; z)$  を

$$g^M(b, c; z) := \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^M(b, c) z^n \tag{33}$$

と表す. 図 9 は重み付き Motzkin path の一例である.

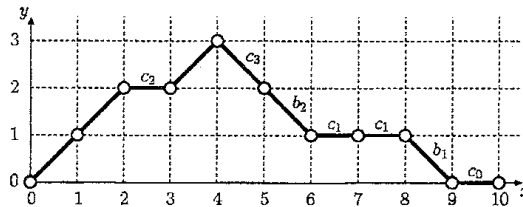


図 9: A weighted Motzkin path with  $\text{length}(w) = 10$  and  $\text{weight}(b, c; w) = b_1 b_2 b_3 c_0 (c_1)^2 c_2$ .

### 4.3 重み付き Dyck path と連分数

Dyck path の解析において基本となるのは次の定理である.

定理 2. (Flajolet[4]) 列  $\beta$  によって重み付けられた Dyck path について, その組合せ論的量  $\mu^D(\beta)$  に対する母関数  $g^D(\beta; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^D(\beta) z^n$  は Stieltjes 型の連分数に展開される.

$$g^D(\beta; z) = S(\beta; z) := \frac{1}{1 - \frac{\beta_1 z}{1 - \frac{\beta_2 z}{1 - \dots}}} \tag{34}$$

証明. Dyck path は図 10 のように (a) 長さが 0 のものと (b) 長さが 2 以上 (NE ステップで始まる) のものに分類することができる. ここで  $\delta^k \beta = \delta(\beta_1, \beta_2, \dots) = (\beta_{k+1}, \beta_{k+2})$  なるずらし演算子  $\delta$  を導入すると, 母関数  $g^D(\beta; z)$  は

$$g^D(\beta; z) = 1 + \beta_1 z \times g^D(\delta\beta; z) \times g^D(\beta; z) \quad (35)$$

$$g^D(\beta; z) = \frac{1}{1 - \beta_1 z g^D(\delta\beta; z)} \quad (36)$$

と書ける. ここに (35) 式右辺第 1 項の 1 は長さ 0 の Dyck path, 右辺第 2 項の  $g^D(\delta\beta; z)$  は図 10(b) の左の山に対応し,  $g^D(\beta; z)$  は右の山に対応する. 同様にして,  $g^D(\delta\beta; z)$  も 2 つの Dyck path に分けて考えることができる. この操作を繰り返すと,

$$g^D(\beta; z) = \frac{1}{1 - \beta_1 z g^D(\delta\beta; z)} = \frac{1}{1 - \frac{\beta_1 z}{1 - g^D(\delta^2\beta; z)}} = \frac{1}{1 - \frac{\beta_1 z}{1 - \frac{\beta_2 z}{1 - g^D(\delta^3\beta; z)}}} = \dots \quad (37)$$

となり, 定理 2 は証明される. □

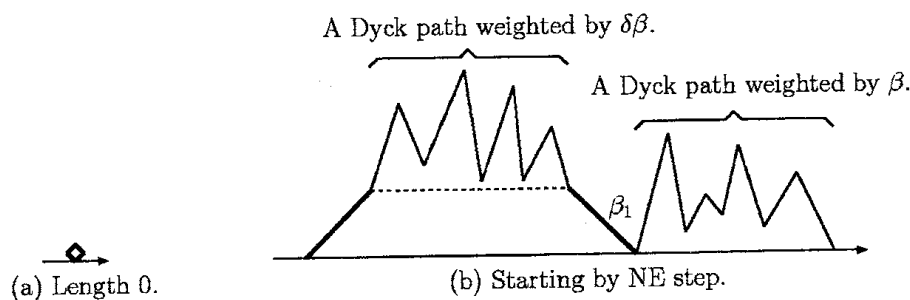


図 10: A classification of Dyck paths.

#### 4.4 重み付き Dyck path と Hankel 行列式

重みの総和  $\mu^D(\beta)$  のなす Hankel 行列式  $H_k^{(n)}(\beta)$

$$H_k^{(n)}(\beta) := |\mu_{n+i+j}^D(\beta)|_{0 \leq i, j \leq k-1} = \begin{vmatrix} \mu_n^D(\beta) & \mu_{n+1}^D(\beta) & \cdots & \mu_{n+k-1}^D(\beta) \\ \mu_{n+1}^D(\beta) & \mu_{n+2}^D(\beta) & \cdots & \mu_{n+k}^D(\beta) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{n+k-1}^D(\beta) & \mu_{n+k}^D(\beta) & \cdots & \mu_{n+2k-2}^D(\beta) \end{vmatrix}, \quad (38)$$

$(n = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, 2, \dots)$

について次のような組合せ論的な解釈が可能となる.

定理 3. (Viennot[12], Gessel-Viennot[5]) 列  $\beta$  によって重み付けられた Dyck path について, その組合せ論的量  $\mu^D(\beta)$  のなす Hankel 行列式の小行列式

$$H_{(c_1, \dots, c_k)}^{(r_1, \dots, r_k)}(\beta) := |\mu_{r_i+c_j}^D(\beta)|_{1 \leq i, j \leq k}, \quad (0 \leq r_1 < \dots < r_k, \quad 0 \leq c_1 < \dots < c_k) \quad (39)$$

は, グラフの重みの積和として

$$H_{(c_1, \dots, c_k; \beta)}^{(r_1, \dots, r_k)} = \sum_{\theta=(w_1, \dots, w_k) \in \Theta^d} \text{weight}(\beta; w_1) \cdots \text{weight}(\beta; w_k) \quad (40)$$

のように組合せ論的に表現できる. ただし,  $\Theta^d$  は, Dyck path の  $k$  個組  $\theta = (w_1, \dots, w_k)$  で次の 2 つの条件を満たすものの集合である.

- $w_i$  は  $(-2r_i, 0)$  で始まり  $(2c_i, 0)$  で終わる長さ  $2(r_i + c_i)$  の Dyck path.
- $k$  個の Dyck path  $w_1, \dots, w_k$  は, どの相異なる Dyck path も節点を共有しない.

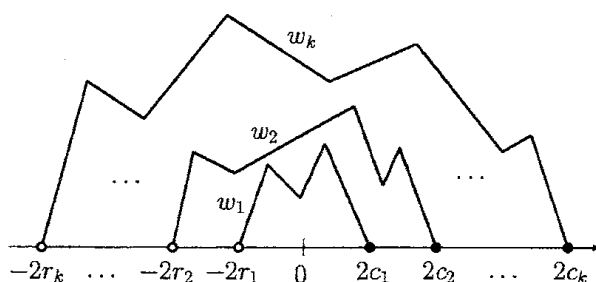


図 11: An element of  $\Theta^d$ .

証明. 行列式の定義より

$$\begin{aligned} H_{(c_1, \dots, c_k; \beta)}^{(r_1, \dots, r_k)} &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \text{sign}(\sigma) \mu_{r_1+c_{\sigma(1)}}^D(\beta) \mu_{r_2+c_{\sigma(2)}}^D(\beta) \cdots \mu_{r_k+c_{\sigma(k)}}^D(\beta) \\ &= \sum_{\xi=(\sigma, \theta) \in \Xi} \text{sign}(\sigma) \text{weight}(\beta; w_1) \text{weight}(\beta; w_2) \cdots \text{weight}(\beta; w_k) \end{aligned}$$

と書ける. ここで,  $\mathfrak{S}_k$  は  $\{1, 2, \dots, k\}$  の置換の集合,  $\Xi$  は置換  $\sigma \in \mathfrak{S}_k$  と Dyck path の  $k$  個組  $\theta = (w_1, \dots, w_k)$  の対の集合,  $\Xi^d \subset \Xi$  は  $\Xi^d := \{(\iota_k, \theta) \mid \theta \in \Theta^d\}$  ( $\iota_k$ : 恒等置換) を表しているとする. このとき,  $\Xi^d$  の余集合上の全単射  $\phi: \Xi - \Xi^d \rightarrow \Xi - \Xi^d$  で, 次の性質を持つものを構成できる.  $\xi' = \phi(\xi)$ ,  $\xi = (\sigma, \theta = (w_1, \dots, w_k))$ ,  $\xi' = (\sigma', \theta' = (w'_1, \dots, w'_k))$  とすると,

$$\begin{cases} \text{sign}(\sigma) = -\text{sign}(\sigma') \\ \text{weight}(\beta; w_1) \cdots \text{weight}(\beta; w_k) = \text{weight}(\beta; w'_1) \cdots \text{weight}(\beta; w'_k). \end{cases}$$

この集合  $\Xi - \Xi^d$  は Dyck path の  $k$  個組の中で少なくとも 2 組が交わるような集合となっている. path の組合せの集合  $\Xi$  を

$$H_{(c_1, \dots, c_k; \beta)}^{(r_1, \dots, r_k)} = \left( \sum_{\xi \in \Xi^d} + \sum_{\xi \in \Xi - \Xi^d} \right) \text{sign}(\sigma) \text{weight}(\beta; w_1) \text{weight}(\beta; w_2) \cdots \text{weight}(\beta; w_k) \quad (41)$$

のように 2 つに分けると, 全単射  $\phi$  の性質より右辺第 1 項は消えるので,

$$H_{(c_1, \dots, c_k; \beta)}^{(r_1, \dots, r_k)} = \sum_{\theta \in \Theta^d} \text{weight}(\beta; w_1) \cdots \text{weight}(\beta; w_k)$$

となる.

□

系 2. 定理 3 より,  $H_k^{(0)}(\beta), H_k^{(1)}(\beta)$  に対応する Dyck path の  $k$  個組はそれぞれ 1 つだけ存在し, 図 12 のようになる. よって

$$H_k^{(0)}(\beta) = \prod_{i=1}^{k-1} (\beta_{2i-1}\beta_{2i})^{k-i}, \quad H_k^{(1)}(\beta) = (\beta_1)^k \prod_{i=1}^{k-1} (\beta_{2i}\beta_{2i+1})^{k-i}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (42)$$

が成り立つ.

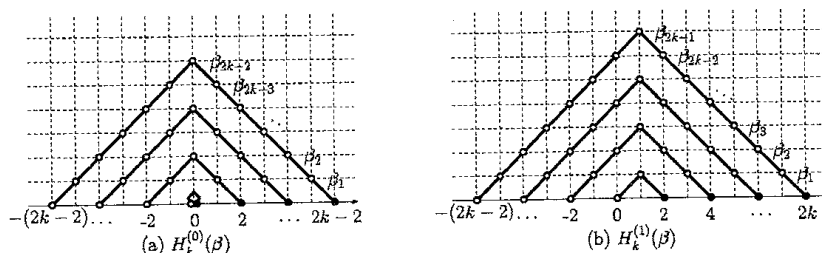


図 12: Geometrical representations of the Hankel determinants with tuples of Dyck paths.

#### 4.5 qd アルゴリズムのグラフ論への応用

重みの列  $\beta, \beta'$  に対して母関数  $g^D(\beta; z)$  が

$$g^D(\beta; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^D(\beta) z^n = 1 + \beta_1 z g^D(\beta'; z) \quad (43)$$

なる関係式を満たしているとする. ある定められた  $\beta$  に対して関係式 (43) を満たす  $\beta'$  は母関数の定義より, 存在する場合は, 一意に定まる. qd アルゴリズムのグラフ論的な解釈として次の定理が成り立つ.

定理 4. (Viennot[12]) Dyck path を重み付ける 2 つの列  $\beta$  と  $\beta'$  が, 上の関係式 (43) を満たすための必要十分条件は, qd アルゴリズムの漸化式

$$\beta_{2h+1} + \beta_{2h+2} = \beta'_{2h} + \beta'_{2h+1}, \quad \beta_{2h}\beta_{2h+1} = \beta'_{2h-1}\beta'_{2h}, \quad (44)$$

ただし,  $\beta'_0 = 0$  が成り立つことである.

証明. (i) Dyck path から Motzkin path への変換 (contraction)  $T$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dyck path } w \\ \text{length}(w) = 2n \\ \text{weighted by } \beta' \end{array} \right. \xrightarrow{T} \left\{ \begin{array}{l} \text{Motzkin path } T(w) \\ \text{length}(T(w)) = n \\ \text{weighted by } (b', c') \end{array} \right.$$

を考える. ここで変換  $T$  として図 13 に表される変換を考え, Motzkin path  $T(w)$  の重み  $(b', c')$  を

$$b'_h = \beta'_{2h-1}\beta'_{2h}, \quad c'_h = \beta'_{2h} + \beta'_{2h+1}$$

とする。このとき, Dyck path と Motzkin path  $T(w)$  について

$$\begin{cases} \text{weight}(b', c'; w^M) = \sum_{T(w^D)=w^M} \text{weight}(\beta'; w^D) \\ \mu_n^M(b', c') = \mu_n^D(\beta'), \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ g^M(b', c'; z) = g^D(\beta'; z) \end{cases} \quad (45)$$

が成り立つ。

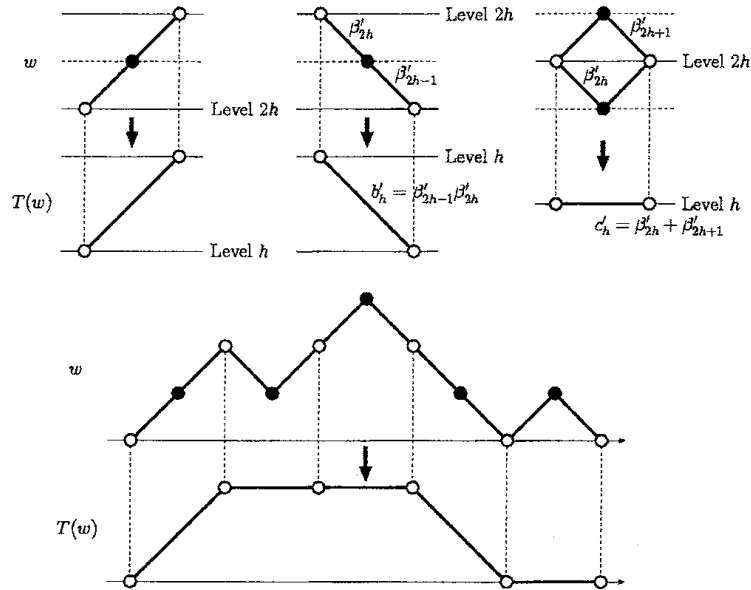


図 13: The contraction  $T$ .

(ii) 次に Dyck path の Motzkin path への変換  $T^+$  として

$$\begin{cases} \text{Dyck path } w \\ \text{length}(w) = 2n \ (n \geq 1) \\ \text{weighted by } \beta \end{cases} \xrightarrow{T^+} \begin{cases} \text{Motzkin path } T(w) \\ \text{length}(T(w)) = n - 1 \\ \text{weighted by } (b, c) \end{cases}$$

を考える。ここで変換  $T^+$  は図 14 に表される変換とし, Motzkin path  $T^+(w)$  の重み  $(b, c)$  を

$$b_h = \beta_{2h} \beta_{2h+1}, \quad c_h = \beta_{2h+1} + \beta_{2h+2} \quad (46)$$

とする。このとき, Dyck path と Motzkin path  $T^+(w)$  の間に

$$\begin{cases} \beta_1 \text{weight}(b, c; w^M) = \sum_{T(w^D)=w^M} \text{weight}(\beta; w^D) \\ \beta_1 \mu_{n-1}^M(b, c) = \mu_n^D(\beta'), \quad (n = 1, 2, \dots) \\ 1 + \beta_1 z g^M(b, c; z) = g^D(\beta; z) \end{cases} \quad (47)$$

なる関係式が成り立つ。

(i)(ii) より

$$\begin{cases} b_h = \beta_{2h} \beta_{2h+1}, \quad c_h = \beta_{2h+1} + \beta_{2h+2} & \implies g^D(\beta; z) = 1 + \beta_1 z g^M(b, c; z) \\ b'_h = \beta'_{2h-1} \beta'_{2h}, \quad c'_h = \beta'_{2h} + \beta'_{2h+1} & \implies g^M(b', c'; z) = g^D(\beta'; z) \end{cases} \quad (48)$$

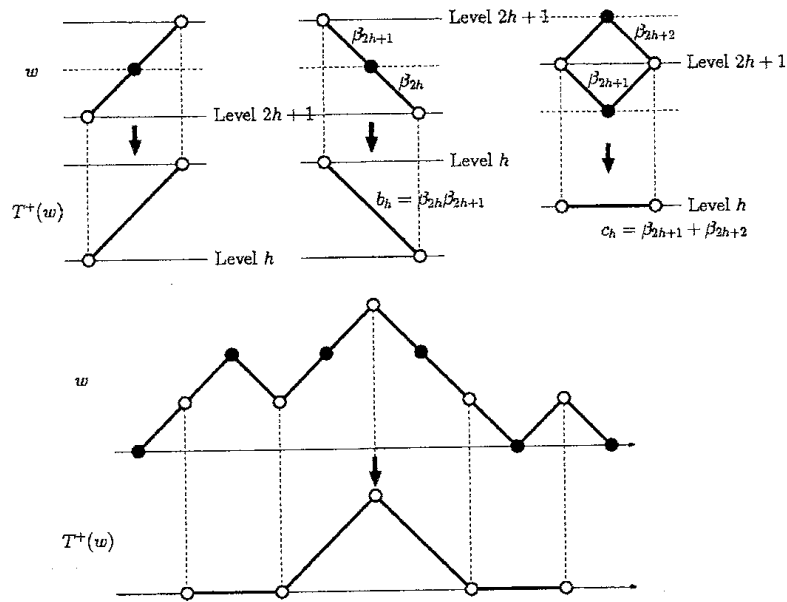


図 14: The contraction  $T^+$ .

が言える.

(iii) qd アルゴリズムの漸化式

$$\beta_{2h+1} + \beta_{2h+2} = \beta'_{2h} + \beta'_{2h+1}, \quad \beta_{2h}\beta_{2h+1} = \beta'_{2h-1}\beta'_{2h}$$

が成立しているとき、(48) より

$$\begin{aligned} b &= b', \quad c = c' \\ g^M(b, c; z) &= g^M(b', c'; z) \\ g^D(\beta; z) &= 1 + \beta_1 z g^D(\beta'; z) \end{aligned}$$

となる.

一意性より qd アルゴリズムの漸化式 (44) は (43) が成り立つための必要十分条件となる。□

定理 3 より、(43) は母関数を用いた qd アルゴリズムの表現と捉えることができる。以下、初期値  $\beta^{(0)} = \beta$ , 境界値  $\beta_0^{(n)} = 0$  として qd アルゴリズムの 1 反復  $\beta \rightarrow \beta'$  を  $\beta^{(0)} \rightarrow \beta^{(1)}$  と表す。  $\beta^{(n)}$  は  $\beta$  から  $n$  回 qd アルゴリズムで反復計算したものとする。このとき、(43) より

$$\begin{aligned} g^D(\beta; z) &= 1 + \beta_1^{(0)} z g^D(\beta^{(1)}; z) \\ &= 1 + \beta_1^{(0)} z + \beta_1^{(0)} \beta_1^{(1)} z^2 + \dots + \beta_1^{(0)} \beta_1^{(1)} \dots \beta_1^{(n-2)} z^{n-1} \\ &\quad + \underbrace{\beta_1^{(0)} \beta_1^{(1)} \dots \beta_1^{(n-1)} z^n g^D(\beta^{(n)}; z)}_{O(z^n)} \end{aligned}$$

となり、長さ  $n$  の Dyck path の重みの総和  $\mu_n^D(\beta)$  は qd アルゴリズムの変数を用いて

$$\mu_n^D(\beta) = \beta_1^{(0)} \beta_1^{(1)} \dots \beta_1^{(n-1)}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{49}$$



と表される。また, Hankel 行列式  $H_k^{(n)}(\beta)$  についても,

$$H_k^{(0)}(\beta^{(n)}) = \prod_{i=1}^{k-1} (\beta_{2i-1}^{(n)} \beta_{2i}^{(n)})^{k-i}, \quad \mu_{n+k}^D(\beta) = \mu_n^D(\beta) \mu_k^D(\beta^{(n)}) \quad (50)$$

より

$$H_k^{(n)}(\beta) = \left( \prod_{i=0}^{n-1} \beta_1^{(i)} \right)^k \prod_{j=1}^{k-1} (\beta_{2j-1}^{(n)} \beta_{2j}^{(n)})^{k-j} \quad (51)$$

となる。これらは, グラフ論的量である  $\mu_n^D(\beta)$  や  $H_k^{(n)}(\beta)$  が qd アルゴリズムを用いて計算可能であることを示している。

## 5 FG アルゴリズムと Schröder path

前節でみたように qd アルゴリズムと Dyck path には密接な関係が存在する。qd アルゴリズムは  $z=0$  の周りでの母関数  $g^D(\beta; z)$  の 1 点 Padé 近似の計算アルゴリズムである。本節では, 2 点 Padé 近似の計算アルゴリズムである FG アルゴリズムを取り上げ, FG アルゴリズムのグラフ論的意味を考察して, FG アルゴリズムと Schröder path について, 前節と同様の議論が成り立つことを報告する。

### 5.1 重み付き Schröder path

NE, SE ステップ, および, 図 15 の EE ステップによって構成される格子路を Schröder path という。

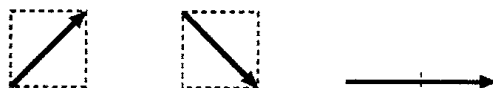


図 15: NE, SE and EE steps.

以下, Dyck path のときと同様に高さ  $h$  から始まる NE ステップには重み 1, SE ステップには重み  $\beta_h$ , EE ステップには重み  $\gamma_h$  が付いているとする。path の長さ  $\text{length}(w)$  は (SE, NE ステップの数) + 2 × (EE ステップの数) とし, path の重みは path を構成するステップの重みの積とする。また, 長さ  $n$  の path の重みの総和を

$$\mu_n^S(\beta, \gamma) := \sum_{\text{length}(w)=n} \text{weight}(\beta, \gamma; w), \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (52)$$

と表す。図 16 に Schröder path の一例をあげる。  $\beta_h = 1, \gamma_h = w - 1$  として得られる  $\mu_n^S(\beta, \gamma)$  は 3.1 節の Narayana 多項式  $N_n(w)$  に一致し, Schröder path に関連する組合せ論的数の例となっている。

### 5.2 重み付き Schröder path と連分数

Schröder path  $S$  に対して, 最初のステップが NE, 最後のステップが SE であり, かつ始点と終点以外に高さ 0 とならない Schröder path  $S^*$  を考える。NE ステップの重みを 1, 高さ  $h+1$  から

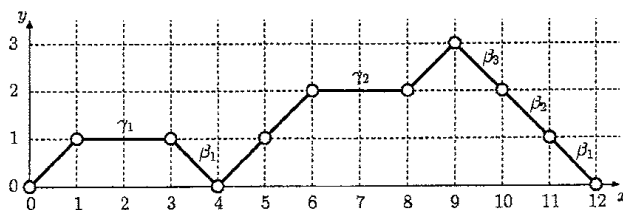


図 16: A weighted Schröder path weighted by  $(\beta, \gamma)$ ,  $\text{length}(w) = 12$ ,  $\text{weight}(\beta, \gamma; w) = (\beta_1)^2(\beta_2)^2\beta_3\gamma_1\gamma_2$ .

始まる SE ステップの重みを  $\beta_h^*$ , EE ステップの重みを  $\gamma_h^*$  とし, S の重み  $(\beta, \gamma)$  を用いて

$$\beta_0^* = \frac{1}{\gamma_0}, \quad \beta_k^* = \frac{\beta_k}{\gamma_{k-1}\gamma_k}, \quad \gamma_k^* = \frac{1}{\gamma_k}. \quad (53)$$

なる重みの関係式を満たすとする. さらに, 長さ  $n$  の path  $S^*$  の重みの総和を

$$\mu_{-n}^S(\beta, \gamma) := \sum_{\text{length}(w)=n} \text{weight}(\beta^*, \gamma^*; w), \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (54)$$

と負の添字を用いて表す.

この時, Dyck path についての Flajolet の定理 (定理 2) の類似が成り立つ.

定理 5. 列  $(\beta, \gamma)$  によって重み付けられた Schröder path について, その組合せ論的量  $\mu^S(\beta, \gamma)$  に対する母関数

$$g^S(\beta, \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^S(\beta) z^n, \quad g^{S^*}(\beta, \gamma; z) = - \sum_{n=-\infty}^{-1} \mu_n^S(\beta) z^n \quad (55)$$

は, T-連分数の形に展開され,

$$g^S(\beta, \gamma; z) = T(\beta, \gamma; z), \quad g^{S^*}(\beta, \gamma; z) = T(\beta, \gamma; z) \quad (56)$$

$$T(\beta, \gamma; z) := \frac{1}{1 - \gamma_0 z - \frac{\beta_1 z}{1 - \gamma_1 z - \frac{\beta_2 z}{1 - \gamma_2 z - \dots}}} \quad (57)$$

となる.

5.3 重み付き Schröder path と Toeplitz 行列式

path の重みの総和  $\mu^S(\beta, \gamma)$  のなす Toeplitz 行列式  $T_k^{(n)}(\beta, \gamma)$  :

$$T_k^{(n)}(\beta, \gamma) := |\mu_{n-i+j}^S(\beta, \gamma)|_{0 \leq i, j \leq k-1} \tag{58}$$

$$= \begin{vmatrix} \mu_n^S(\beta, \gamma) & \mu_{n+1}^S(\beta, \gamma) & \cdots & \mu_{n+k-1}^S(\beta, \gamma) \\ \mu_{n-1}^S(\beta, \gamma) & \mu_n^S(\beta, \gamma) & \cdots & \mu_{n+k-2}^S(\beta, \gamma) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{n-k+1}^S(\beta, \gamma) & \mu_{n-k+2}^S(\beta, \gamma) & \cdots & \mu_n^S(\beta, \gamma) \end{vmatrix} \tag{59}$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad k = 0, 1, 2, \dots)$$

について, Dyck path に対する Viennot の第 1 定理 (定理 3) の系と同様に, 以下が成り立つ. (証明は図 17 を利用して行われる).

定理 6. Toeplitz 行列式は連分数の係数を用いて

$$T_k^{(0)}(\beta, \gamma) = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \prod_{i=1}^{k-1} \left( \frac{\beta_i}{\gamma_{i-1}} \right)^{k-i},$$

$$T_k^{(-1)}(\beta, \gamma) = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} (\gamma_0^*)^k \prod_{i=1}^{k-1} \left( \frac{\beta_i^*}{\gamma_{i-1}^*} \right)^{k-i}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \tag{60}$$

と表される.

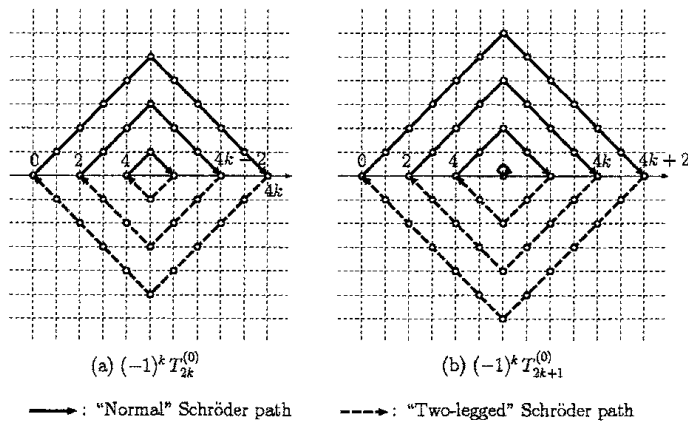


図 17: Geometrical representations of the Toeplitz determinants with tuples of Schröder paths.

#### 5.4 FG アルゴリズムの組合せ論への応用

FG アルゴリズム (cf. [6, 8]) は関数の原点と無限遠点における 2 点 Padé 近似を T-連分数の形で与えるためのアルゴリズムであり, その漸化式は

$$F_{k+1}^{(n)} + G_k^{(n)} = F_k^{(n+1)} + G_k^{(n+1)}, \quad F_{k+1}^{(n)} G_{k+1}^{(n+1)} = F_{k+1}^{(n+1)} G_k^{(n)},$$

$$F_0^{(n)} = 0, \quad G_0^{(n)} = \frac{c_n}{c_{n-1}}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad k = 0, 1, 2, \dots)$$

で与えられる. 添字をみると qd アルゴリズムとの違いは明らかであるが, FG アルゴリズムもまた離散時間可積分系とみなせる. qd アルゴリズムと Dyck path の場合と同様の議論により, 母関数を用いた FG アルゴリズムの表現として

$$\begin{cases} g^S(\beta, \gamma; z) = 1 + (\beta_1 + \gamma_0)z g^S(\beta', \gamma'; z) \\ g^{S^*}(\beta, \gamma; z) = 1 + (\beta_1 + \gamma_0)z g^{S^*}(\beta', \gamma'; z) \end{cases} \quad (61)$$

$$\begin{cases} g^S(\beta', \gamma'; z) = -(\gamma'_0)^{-1}z^{-1} + (\gamma'_0)^{-1}z^{-1} g^S(\beta, \gamma; z) \\ g^{S^*}(\beta', \gamma'; z) = -(\gamma'_0)^{-1}z^{-1} + (\gamma'_0)^{-1}z^{-1} g^{S^*}(\beta, \gamma; z) \end{cases} \quad (62)$$

が得られる. ここに,  $(\beta, \gamma) \leftrightarrow (\beta', \gamma')$  は FG アルゴリズムの 1 反復に対応している. Viennot の第 2 定理 (定理 4) の類似として以下が証明される.

定理 7. Schröder path を重み付ける 2 つの列の組  $(\beta, \gamma)$  と  $(\beta', \gamma')$  が, 上の関係 (61), (62) を満たすための必要十分条件は, 次が成り立つことである.

$$\beta_{h+1} + \gamma_h = \beta'_h + \gamma \neq 0, \quad \beta_{h+1}\gamma'_{h+1} = \beta'_{h+1}\gamma_h, \quad (h = 0, 1, 2, \dots) \quad (63)$$

ただし,  $\beta'_0 = 0$ .

FG アルゴリズムを用いると組合せ論的諸量が計算可能となる. とりわけ, path の重み  $\beta_h, \gamma_h$  が全て 1 であるとき, path の重みの総和は条件を満たす path の本数の数え上げになっていることに注意する. ここでは結果のみ記す.

path の重みの総和  $\mu^S(\beta, \gamma)$  について

$$\mu_n^S(\beta, \gamma) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{|n|} \gamma_0^{(i)}, & (n = 0, 1, 2, \dots) \\ \prod_{i=0}^{|n|-1} \gamma_0^{*(-i)}, & (n = -1, -2, \dots) \end{cases}$$

が成り立つ. また, Toeplitz 行列式  $T_k^{(n)}(\beta, \gamma)$  は FG アルゴリズムの係数を用いて

$$T_k^{(n)}(\beta, \gamma) = (\mu_n^S(\beta, \gamma))^k \prod_{i=1}^{k-1} \left( -\frac{\beta_i^{(n)}}{\gamma_{i-1}^{(n)}} \right)^{k-i}$$

と表わされる.

## 6 おわりに

本稿の前半では半無限、無限戸田方程式のタウ関数と直交多項式論に基づいて、種々の組合せ論的数のなす Hankel 行列式を導出した。後半では可積分系のグラフ論的な解釈を考察し、qd アルゴリズムと FG アルゴリズムを通じて、path の重みの総和がこれらの離散可積分系のタウ関数として計算されることを示した。本研究により、戸田型可積分系の特殊解と個々の組合せ論的数やグラフとの対応が明らかになった。しかし、未だ可積分系のグラフ論的な全体像は見えてはいない。新しい分野であり、今後この方面の研究が大きく発展することを願いたい。

## 参考文献

- [1] M. Aigner, Catalan-like numbers and determinants, *J. Combin. Theory Ser. A* **87**(1999), 33–51.
- [2] A. I. Aptekarev, A. Branquinho and F. Marcellan, Toda-type differential equations for the recurrence coefficients of orthogonal polynomials and Freud transformation, *J. Comput. Appl. Math.* **78**(1997), 139–160.
- [3] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [4] P. Flajolet, Combinatorial aspects of continued fractions, *Discrete Math.* **58**(1980), 125–161.
- [5] I. Gessel and G. Viennot, Binomial determinants, paths and hook length formulae, *Adv. in Math.* **58**(1985), 300–321.
- [6] W. B. Jones and W. J. Thron, *Padé and Rational Approximation*, Academic Press, New York, 1977, pp.163–171.
- [7] K. Kajiwara, T. Masuda, M. Noumi, Y. Ohta and Y. Yamada, Determinant formulas for the Toda and discrete Toda equations, *Funkcialaj Ekvacioj*, **44**(2001), 291–307.
- [8] J. H. McCabe, A formal extension of the Padé table to include two point Padé quotients. *J. Inst. Math. Appl.* **15**(1975), 363–372.
- [9] Y. Nakamura and A. Zhedanov, Special solutions of the Toda chain and combinatorial numbers, *J. Phys. A, Math. Gen.* **37**(2004), 5849–5862; 中村, 組合せ論的整数のなす Hankel 行列式, 数学会 2002 秋季総合分科会, 無限可積分系セッション, 島根大学; 中村, 大平, A. Zhedanov, 組合せ論的数のなす Hankel 行列式と戸田方程式の変数分離解, 数学会 2004 年度年会, 無限可積分系セッション, 筑波大学.
- [10] 大平, 中村, 一般化された Catalan 数のなす Hankel 行列式と戸田方程式, 数学会 2004 年度年会, 無限可積分系セッション, 筑波大学.
- [11] F. Peherstorfer, On Toda lattices and orthogonal polynomials, *J. Comput. Appl. Math.* **133**(2001), 519–534.
- [12] X. G. Viennot, A combinatorial interpretation of the quotient-difference algorithm, *Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (Moscow, 2000)*, Springer-Verlag, Berlin, 2000, pp. 379–390.