数理解析研究所講究録 1422 巻 2005 年 192-203



# 一般化ドリンフェルド・ソコロフ階層の離散化と相似簡約

立教大学 理学部　筧　三郎 (Saburo Kakei)
東北大学 COE フェロー　菊地哲也 (Testuya Kikuchi)

## 1　はじめに – 相似簡約としてのパンルベ方程式 –

数理物理学におけるパンルベ方程式の重要性は，いまさら繰り返すまでもないであろう。古くは Wu らによるイジング模型の研究 [WMTB, J] から，90 年代の 2 次元量子重力の研究を経て現在に至るまで，様々な物理量が満たす微分方程式としてパンルベ方程式が現れるのであった。

数理物理学にパンルベ方程式が現れるもう一つの状況として，ソリトン方程式の相似簡約[1]がある (例えば，文献 [AS1] の 3.7.b. 節に簡単な解説がある)。一例として，変形 KdV 方程式

$$4u_t = u_{xxx} - 6u^2u_x \tag{1.1}$$

を考えてみよう (後の便宜のため，係数のとり方は [AS1, AS2] とは違っている)。方程式 (1.1) を満たす $u = u(x,t)$ が，任意の $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ に対して

$$\frac{u(x,t)}{\lambda} = u(\lambda x, \lambda^3 t) \tag{1.2}$$

を満たすことを要請する。条件 (1.2) において，$\lambda$ で微分してから $\lambda \to 1$ とおくことで，次が得られる：

$$u + xu_x + 3tu_t = 0 \tag{1.3}$$

(1.1), (1.3) から $u_t$ を消去して，$x$ に関して積分すれば，次の 2 階常微分方程式が得られる：

$$4xu + 3t(u_{xx} - 2u^3) = C \qquad (C \text{ は積分定数}). \tag{1.4}$$

さらに，$t = 4/3$ とおけば，パンルベ II 型方程式

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 2u^3 + xu + \frac{C}{4} \tag{1.5}$$

が得られる。

ここでは，パンルベ II 型方程式の場合を述べたが，他の型のパンルベ方程式も，類似の相似簡約の手続きで，ソリトン方程式と関連付けられる。その種の研究は数多いが，例えば論文 [NY] において，野海・山田は，は $A_n^{(1)}$ 型のルート系に付随した，“principal” 型の Drinfeld-Sokolov 階層に対する相似簡約から，$\mathrm{P_{II}}$ ($A_1^{(1)}$ 型ルート系に対応), $\mathrm{P_{IV}}$ ($A_2^{(1)}$ 型), $\mathrm{P_V}$ ($A_3^{(1)}$ 型) を含む枠組みを提出した (日本語での解説もある [N, YY])。引き続く我々[2]の研究では，principal 以外の階層を調べ，その

[1] “Similarity reduction” という用語に対して，本稿では「相似簡約」という訳語を用いることにする。

[2] 「我々」= { 池田岳 (岡山理科大学)，菊地，筧 }

場合でもやはりパンルベ方程式が得られることを示した [KK1, KK2, KK3, KIK]。我々の結果も含めて，これまでに知られている結果をまとめると，次のようになっている。

| ルート系 | 実現 | ソリトン方程式 | → | パンルベ方程式 |
|---|---|---|---|---|
| $A_1^{(1)}$ | principal | 変形 KdV | → | $P_{II}$ [AS2] |
| | homogeneous | NLS | → | $P_{IV}$ [JM1, KK1] |
| $A_2^{(1)}$ | principal | 変形ブシネ | → | $P_{IV}$ [NY] |
| | "$3=2+1$" | 変形矢嶋・及川 | → | $P_V$ [KIK] |
| | homogeneous | 3 波相互作用 | → | $P_{VI}$ [KK3] |
| $A_3^{(1)}$ | principal | 4-reduced KP | → | $P_V$ [NY] |
| | ⋮ | ⋮ | | ⋮ |

表 1： 一般化 Drinfeld-Sokolov 階層とパンルベ方程式

(注) 論文 [KIK] での $P_V$ は 2 パラメータのものであるが，実は 3 パラメータにできることが分かっている。

以下，本稿では，アフィン・リー代数による方法で構成したソリトン階層 (我々が「一般化 Drinfeld-Sokolov 階層」と呼んでいるもの) を (多成分) 戸田格子階層 [UT, Ta] の特殊化として捉えて，戸田階層のもつ対称性から相似簡約を理解する方法を解説したい。[KJDM] の言葉で言えば，"sub-sub-holonomic" な場合にまで戻って相似簡約の意味を考えようというものである。このように考える場合には，表 1 は次のように書き換えられる：

| 戸田階層 | 簡約 | ソリトン方程式 | → | パンルベ方程式 |
|---|---|---|---|---|
| 1 成分 | 2 周期簡約 | 変形 KdV | → | $P_{II}$ |
| | 3 周期簡約 | 変形ブシネ | → | $P_{IV}$ |
| | 4 周期簡約 | (名前なし) | → | $P_V$ |
| 2 成分 | $(1,1)$ 簡約 | NLS | → | $P_{IV}$ |
| | $(2,1)$ 簡約 | 変形矢嶋・及川 | → | $P_V$ |
| 3 成分 | $(1,1,1)$ 簡約 | 3 波相互作用 | → | $P_{VI}$ |

表 2： 多成分戸田階層とパンルベ方程式

この考え方の一つの利点として，差分系 (additive)，$q$ 差分系 (multiplicative) への拡張が比較的容易[3]であるということが挙げられる。以下では，1 成分戸田階層から現れる例を中心に，微分方程式，差分方程式，$q$ 差分方程式それぞれについて，「相似簡約」をどのようにして統一的な立場からとらえていくかを述べていく。

## 2 戸田階層の 2 周期簡約 → パンルベ II

本節では，1 節で考えた変形 mKdV 方程式からパンルベ II 型方程式への過程を，戸田階層の持つスケール対称性という立場から理解しなおす。特に，対称性の条

[3]少なくとも，筆者にとっては

件に入っているパラメータが，パンルベ方程式のパラメータとどのようにして結びつくのかに注目して見ていく。

## 2.1 戸田格子階層 → 変形 KdV 方程式

まずは上野・高崎 [UT, Ta] に従って，シフト作用素を用いた方法で，戸田格子階層を定式化しておく。中心となるのは，次の "佐藤-Wilson 作用素" である：

$$W(s;t,\bar{t}) = 1 + w_1(s;t,\bar{t})e^{-\partial_s} + w_2(s;t,\bar{t})e^{-2\partial_s} + \cdots , \tag{2.1}$$

$$\bar{W}(s;t,\bar{t}) = \bar{w}_0(s;t,\bar{t}) + \bar{w}_1(s;t,\bar{t})e^{\partial_s} + \bar{w}_2(s;t,\bar{t})e^{2\partial_s} + \cdots . \tag{2.2}$$

ただし，$w_j = w_j(s;t,\bar{t})$, $\bar{w}_j = \bar{w}_j(s;t,\bar{t})$ は，離散変数 $s \in \mathbb{Z}$，連続変数 $t = (t_n)_{n=1,2,\ldots}$, $\bar{t} = (\bar{t}_n)_{n=1,2,\ldots}$ に依存する関数で，$w_0$ は可逆とする。また，変数 $t, \bar{t}$ についての微分方程式系は，次で与える：

$$\frac{\partial W}{\partial t_n} = -\left(W e^{n\partial_s} W^{-1}\right)_{<0} W, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial t_n} = \left(W e^{n\partial_s} W^{-1}\right)_{\geq 0} \bar{W}, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{t}_n} = \left(\bar{W} e^{-n\partial_s} \bar{W}^{-1}\right)_{<0} W, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{t}_n} = -\left(\bar{W} e^{-n\partial_s} \bar{W}^{-1}\right)_{\geq 0} \bar{W}. \tag{2.6}$$

ここで，$(\cdot)_{\geq 0}$, $(\cdot)_{<0}$ は，それぞれ $e^{\partial_s}$ についての非負ベキ部分，負ベキ部分をとることを意味する。戸田階層では，負の重みを持つ変数 $\bar{t}$ も重要であるが，本稿の議論では用いないので，以下では $t$ のみを考えることにする。$\bar{t}$ を固定して $t$ のみに注目した階層を，以下では「変形 KP 階層」と呼ぶことにする。

変形 KdV 方程式の従属変数が何であるかをはっきりさせるために，次の量を計算しておく：

$$\left(W(s)e^{\partial_s}W(s)^{-1}\right)_{\geq 0} = e^{\partial_s} + u(s), \tag{2.7}$$

$$\left(W(s)e^{3\partial_s}W(s)^{-1}\right)_{\geq 0} = e^{3\partial_s} + u(s)e^{2\partial_s} + v_1(s)e^{\partial_s} + v_0(s). \tag{2.8}$$

ここで，$u(s), v_1(s), v_0(s)$ は $w_j(s)$ $(s = 1, 2, \ldots)$ の多項式である。例えば，$u(s) = w_1(s) - w_1(s+1)$ として与えられる。

さて，以下では「2 周期簡約」

$$W(s+2) = W(s), \qquad \bar{W}(s+2) = \bar{W}(s) \tag{2.9}$$

を要請する。この条件の下で，方程式 (2.3) の $n = 1, 3$ を考えると，$u(s)$ $(= w_1(s) - w_1(s+1))$ が変形 KdV 方程式 (1.1) を満たすことが示される ($x = t_1$, $t = t_3$)。このこと自体はよく知られた事実であろうが，以下の説明のために計算のあらすじを紹介しよう。

まず，方程式 (2.3) の $n=1,3$ の場合，およびそれらの両立条件

$$\frac{\partial B_1(s)}{\partial t_3}-\frac{\partial B_3(s)}{\partial t_1}+[B_1(s),B_3(s)]=0 \tag{2.10}$$

(零曲率方程式, Zakharov-Shabat 方程式) より，以下の方程式を導く (以下では $'=\partial_{t_1}$ とする)：

$$w_1'(s)=u(s)w_1(s)+w_2(s+1)-w_2(s) \tag{2.11}$$
$$v_1(s)=w_2(s)-w_2(s+1)-u(s)w_1(s) \tag{2.12}$$
$$v_1'(s)=v_0(s+1)-v_0(s)+2v_1(s)u(s) \tag{2.13}$$
$$u_{t_3}=v_0' \tag{2.14}$$

これら4式より $w_1(s), w_2(s), v_0(s), v_1(s)$ を消去することができて，$u(s)$ $(=w_1(s)-w_1(s+1))$ が変形 KdV 方程式 (1.1) を満たすことが示される。

## 2.2 変形 KdV 方程式 → パンルベ II

本節では，戸田階層に対する「スケール対称性」を導入し，その対称性に対する不変条件から，パンルベ II が得られることを述べる。

**命題 1 (2 周期簡約変形 KP 階層に対するスケール対称性).**
$c(s+2)=c(s)$ を満たす $c(s)$ に対して，$W_\lambda(s;t), \bar{W}_\lambda(s;t)$ を，

$$W_\lambda(s;t)=\lambda^s\circ W(s;t_\lambda)\circ\lambda^{-s}, \tag{2.15}$$
$$W_\lambda(s;t)=\lambda^s\circ W(s;t_\lambda)\circ\lambda^{-s-c(s)}, \tag{2.16}$$
$$t_\lambda=(\lambda t_1,\lambda^2 t_2,\lambda^3 t_3,\ldots),$$

で定める。このとき，$W(s;t), \bar{W}(s;t)$ が 2 周期簡約 1 成分変形 KP 階層の解であるなら，すなわち，(2.3), (2.4), (2.9) を満たすならば，$W_\lambda(s;t), \bar{W}_\lambda(s;t)$ も (2.3), (2.4), (2.9) を満たす。

上で定めた $W_\lambda(s;t), \bar{W}_\lambda(s;t)$ が，元の $W(s;t), \bar{W}(s;t)$ と一致する条件を調べてみる。まず，$W_\lambda(s;t)=W(s;t)$ において $e^{-\partial_s}$ の係数を比べると，$w_1(s;t_\lambda)=w_1(s;t)/\lambda$ が得られる。このことから $u(s;t)$ が最初に考えた条件 (1.2) を満たすことが導かれた。

次に，$\bar{W}_\lambda(s;t)=\bar{W}(s;t)$ において，$\lambda$ で微分してから $\lambda\to 1$ とおくと，

$$\sum_n n t_n\frac{\partial\bar{W}(s;t)}{\partial t_n}+\left[s,\bar{W}(s;t)\right]=\bar{W}(s;t)c(s) \tag{2.17}$$

となる。さらに，$t_1$, $t_3$ 以外を全て 0 とおき，$e^{0\partial_s}$ の係数に注目すれば，

$$t_1u(s)+3t_3v_0(s)=c(s) \tag{2.18}$$

という関係式が得られる。(2.11), (2.12), (2.13) に関係式 (2.18) を組み合わせて $u(s)$ についての方程式をつくり，さらに $t=4/3$ とおけばパンルベ II 型方程式 (1.5) が得られる。ただし，(1.5) でのパラメータ $C$ は，$C=2\{c(s)-c(s+1)\}$ として与えられる。ここで強調しておきたいことは，相似簡約でパンルベ方程式を導出する際の積分定数が,「目の子」で積分して見つけることではなく，スケール対称性の条件から自然に導かれたということである。

本節の最後に，リー代数的な定式化との関係を述べておこう。差分作用素 $A(s;e^{\partial_s})=\sum_n a_n(s)e^{n\partial_s}$ が 2 周期条件 $A(s+2;e^{\partial_s})=A(s;e^{\partial_s})$ を満たすときには，$A(s;e^{\partial_s})$ と $2\times 2$ 行列 $A(s;z)$ とを次のように対応付けることができる：

$$A(s;e^{\partial_s})=\sum_n a_n(s)e^{n\partial_s} \quad \leftrightarrow \quad A(s;z)=\sum_n \begin{bmatrix} a_n(0) & 0 \\ 0 & a_n(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ z & 0 \end{bmatrix}^n . \tag{2.19}$$

このとき，特に $e^{(2n-1)\partial_s}$ は

$$e^{(2n-1)\partial_s} \quad \leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & z^{n-1} \\ z^n & 0 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

と対応し，$\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の Heisenberg 代数の principal 実現の際に現れる $2\times 2$ 行列と一致する。また，この対応の下で，差分作用素の次数と principal gradation による次数付けも一致している。それぞれでの次数付け作用素は，次のように対応付けられる：

$$-s \quad \leftrightarrow \quad 2z\frac{d}{dz}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{2.21}$$

# 3　$q$-KP 階層，差分 KP 階層の相似簡約

相似簡約を考える場合，実は $q$ 差分のほうが扱いやすい。以下ではまず 3.1 節で $q$ 差分系を議論し，差分系は 3.2 節で扱う。

## 3.1　$q$ 差分系

以下では，変数 $x$ に関する $q$ シフト作用素を $T_{q,x}$ で表すことにする：

$$T_{q,x}f(x)=f(qx) \tag{3.1}$$

$q$ 差分系の場合の独立変数を $\{x_n\}_{n=1,\dots,M}$ として，(2.3), (2.4) にあたるものを次で与える：

$$\frac{1-T_{q,x_j}}{x_j}W=-\left((T_{q,x_j}W)e^{\partial_s}W^{-1}\right)_{<0}W, \tag{3.2}$$

$$\frac{1-T_{q,x_j}}{x_j}\bar{W}=\left((T_{q,x_j}W)e^{\partial_s}W^{-1}\right)_{\geq 0}\bar{W}. \tag{3.3}$$

$x_j$ を $(1-q)x_j$ で置き換えて $q \to 1$ という極限をとれば，(3.2), (3.3) はそれぞれ (2.3), (2.4) において $n=1$ としたものに移行することは明らかであろう。

論文 [KNY] との対応をはっきりさせるためには，(3.2) を次のように書き換えるとよい：

$$\left(T_{q,x_j} W\right)\left(1 - x_j e^{\partial_s}\right) = B_{x_j} W, \tag{3.4}$$

$$B_j = 1 - x_j \left(\left(T_{q,x_j} W\right) e^{\partial_s} W^{-1}\right)_{\geq 0}. \tag{3.5}$$

この場合，

$$B_j(s) = v_j(s) - x_j e^{\partial_s} \tag{3.6}$$

$$(\text{ただし，}\quad v_j(s) = 1 - x_j \left\{T_{q,x_j} w_1(s) - w_1(s+1)\right\})$$

となる。このとき，(3.4) の両立条件

$$\left(T_{q,x_k} B_j(s)\right) B_k(s) = \left(T_{q,x_j} B_k(s)\right) B_j(s) \tag{3.7}$$

より，次の方程式系が得られる：

$$\frac{T_{q,x_k} v_j(s)}{v_j(s)} = \frac{x_j v_k(s+1) - x_k v_j(s+1)}{x_j v_k(s) - x_k v_j(s)} \tag{3.8}$$

これは，[KNY] で "$q$-KP 階層" と呼ばれているものに他ならない[4]。

この系に対する相似簡約を，スケール対称性の言葉で定式化しよう。

**命題 2 ($q$-KP 階層に対するスケール対称性).**
$W_\lambda(s;x)$, $\bar{W}_\lambda(s;x)$ を，

$$W_\lambda(s;x) = \lambda^s \circ W(s;\lambda x) \circ \lambda^{-s}, \tag{3.9}$$

$$W_\lambda(s;x) = \lambda^s \circ W(s;\lambda x) \circ \lambda^{-s}, \tag{3.10}$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \ldots),$$

で定める。このとき，$W(s;x)$, $\bar{W}(s;x)$ が $q$-KP 階層の解であるなら，すなわち，(3.2), (3.3) を満たすならば，$W_\lambda(s;x)$, $\bar{W}_\lambda(s;x)$ も (3.2), (3.3) を満たす。

このとき，条件 $W_\lambda(s;x) = W(s;x)$ を具体的に計算すれば，

$$w_j(s;\lambda x) = \frac{w_j(s;x)}{\lambda^j} \tag{3.11}$$

が得られるので，(3.6) の $v_j(s)$ が

$$v_j(s; qx_1, \ldots, qx_M) = v_j(s; x_1, \ldots, x_M) \qquad (j = 1, \ldots, M) \tag{3.12}$$

を満たすことが分かる。この (3.12) と，$N$ 周期条件 $v(s+N;x) = v(s;x)$ を (3.8) に課した物が，[KNY] の意味での "$q$ パンルベ系" である。

[4]同様の $q$ 差分階層は，例えば [HI] などでも扱われている。

## 3.2 差分系

本節では，加法的な差分の場合の“相似簡約”を扱う。簡単のため，1 成分階層として扱うことにする。階層の構成自体は，いわゆる“三輪変換”[Mi] を行えばよく，佐藤-Wilson 作用素による定式化も可能である [D, Tsuj2]。ここでは，次のように離散変数 $l_j$ $(j=1,2,\ldots)$ に対する依存性を定めよう：

$$\frac{e^{\partial_{l_j}}-1}{\delta_j}W(s;l)=\left(\bar{W}(s;l_j+1)e^{-\partial_s}\bar{W}(s;l)^{-1}\right)_{<0}W(s;l), \tag{3.13}$$

$$\frac{e^{\partial_{l_j}}-1}{\delta_j}\bar{W}(s;l)=-\left(\bar{W}(s;l_j+1)e^{-\partial_s}\bar{W}(s;l)^{-1}\right)_{\geq 0}\bar{W}(s;l). \tag{3.14}$$

差分間隔 $\delta_j\to 0$ という極限をとれば，(3.13), (3.14) はそれぞれ (2.5), (2.6) において $n=1$ としたものに移行することは明らかであろう。より具体的に，

$$\delta_j\left(\bar{W}(s;l_j+1)e^{-\partial_s}\bar{W}(s;l)^{-1}\right)_{<0}=u_j(s;l)e^{-\partial_s} \tag{3.15}$$

により $u_j(s;l)$ を定めると，$l_1$, $l_2$ に対する (3.13) の両立条件より，次が得られる：

$$u_1(s;l_1,l_2)+u_2(s;l_1+1,l_2)=u_1(s;l_1,l_2+1)+u_2(s;l_1,l_2) \tag{3.16}$$

$$u_1(s-1;l_1,l_2)u_2(s;l_1+1,l_2)=u_1(s;l_1,l_2+1)u_2(s-1;l_1,l_2) \tag{3.17}$$

さらに，条件

$$u_1(s-1)=\frac{1}{u_1(s)},\qquad u_2(s-1)=\frac{-1}{u_2(s)} \tag{3.18}$$

を要請すると[5]，(3.17) は次のように書き換えられる。

$$u_1(s;l_1,l_2+1)u_1(s;l_1+1,l_2)+u_2(s;l_1,l_2+1)u_2(s;l_1+1,l_2)=0 \tag{3.19}$$

一方 (3.16) より，ある $f(l_1,l_2)$ を用いて

$$u_1(s;l_1,l_2)=f(l_1,l_2)-f(l_1+1,l_2),\quad u_2(s;l_1,l_2)=f(l_1,l_2)-f(l_1,l_2+1) \tag{3.20}$$

と表すことができるので，(3.19) と合わせて

$$\frac{\{f(l_1,l_2)-f(l_1+1,l_2)\}\{f(l_1,l_2+1)-f(l_1+1,l_2+1)\}}{\{f(l_1,l_2)-f(l_1,l_2+1)\}\{f(l_1+1,l_2)-f(l_1+1,l_2+1)\}}=-1 \tag{3.21}$$

という非線形偏差分方程式が得られる。この方程式は，論文 [N] で“格子 Schwarzian KdV 方程式”と呼ばれているものに他ならない。

方程式 (3.13), (3.14) に対して，命題 1 のように $\lambda^s\circ W(s)\circ\lambda^{-s}$ と変換することを考える場合，変換の前後で方程式の形が不変であるためには，離散変数 $l_j$ ではなく「差分間隔」$\delta_j$ を変更しなくてはならない。

[5] 条件 (3.18) は 2 周期条件 $u_j(s+2)=u_j(s)$ と矛盾しない。

**命題 3 (2 周期簡約 1 成分離散 KP 階層のスケール対称性).**
$W_\lambda(s;l,\delta)$, $\bar{W}_\lambda(s;l,\delta)$ を，改めて

$$W_\lambda(s;l,\delta) = \lambda^{-s} \circ W(s;l,\lambda\delta) \circ \lambda^{s}, \tag{3.22}$$

$$\bar{W}_\lambda(s;l,\delta) = \lambda^{-s} \circ \bar{W}(s;l,\lambda\delta) \circ \lambda^{s}, \tag{3.23}$$

$$\lambda\delta = (\lambda\delta_1, \lambda\delta_2, \ldots)$$

と定める。このとき，$W(s;t)$, $\bar{W}(s;t)$ が 2 周期簡約 1 成分離散 KP 階層の解であるなら，すなわち，(3.13), (3.14), および (2.9) を満たすならば，$W_\lambda(s;t)$, $\bar{W}_\lambda(s;t)$ も (3.13), (3.14), (2.9) を満たす。

この命題自体はほとんど自明であろう。そこで，離散の場合の「相似簡約」を $W_\lambda(s;l,\delta) = W(s;l,\delta)$ とすることにして，例によって $\lambda$ で微分してから $\lambda \to 1$ とおくと，

$$[s, W] = \sum_j \delta_j \frac{\partial W}{\partial \delta_j} \tag{3.24}$$

なる方程式が得られ，$\delta_j$ についての発展方程式を考えなければならなくなる。これを実行するために，$e^{\partial_l}$ に対応する佐藤-Wilson 作用素を導入する：

$$W^{(l_j)}(s;l) = 1 + w_1^{(l_j)}(s;l)e^{-\partial_{l_j}} + w_2^{(l_j)}(s;l)e^{-2\partial_{l_j}} + \cdots, \tag{3.25}$$

$$\bar{W}^{(l_j)}(s;l) = \bar{w}_0^{(l_j)}(s;l) + \bar{w}_1^{(l_j)}(s;l)e^{\partial_{l_j}} + \bar{w}_2^{(l_j)}(s;l)e^{2\partial_{l_j}} + \cdots. \tag{3.26}$$

これらに対する $\delta_j$ 依存性を，次のように定める：

$$\frac{\partial W^{(l_j)}(s;l,\delta)}{\partial \delta_j} = -\frac{l_j}{\delta_j}\left(\bar{W}^{(l_j)}(1 - e^{-\partial_{l_j}})(\bar{W}^{(l_j)})^{-1}\right)_{<0}^{(l_j)} W^{(l_j)}(s;l,\delta), \tag{3.27}$$

$$\frac{\partial \bar{W}^{(l_j)}(s;l,\delta)}{\partial \delta_j} = \frac{l_j}{\delta_j}\left(\bar{W}^{(l_j)}(1 - e^{-\partial_{l_j}})(\bar{W}^{(l_j)})^{-1}\right)_{\geq 0}^{(l_j)} \bar{W}^{(l_j)}(s;l,\delta). \tag{3.28}$$

さらに，関係式

$$e^{\partial_{l_j}} = 1 + \delta_j e^{-\partial_s} \tag{3.29}$$

によって，$W(s;l)$ と $\bar{W}^{(l_j)}(s;l)$ とを同一視する (cf. [KS])。こうすると，相似条件 (3.24) を，より具体的に書き下ろすことができる。相似簡約後の常差分方程式を導くと，[B] で議論されている “discrete conformal map” のうちの “discrete $Z^\gamma$” が得られる。

# 4 おわりに

本稿では，様々なタイプ (連続，差分，$q$ 差分) のパンルベ方程式を，ソリトン方程式のスケール不変な解としてとらえることを議論してきた。そうすることで，例えばシューア函数解のような特殊解を議論することができるが，まだまだよく分からない点が多い。例えばパンルベ IV の場合，表 1，表 2 で述べたように，変

形ブシネ方程式と NLS 方程式の両方から得られるわけであるが，現れるシューア函数は，前者からは「3 コア」[N] のもの，後者からは「長方形」(cf. [IY]) のものが現れる。どうやら，1 成分 KP を使うと「中央」の解，多成分だと「壁の上」であるようなのだが，これが何を意味しているのかは今のところ不明である。

特殊解以外にも，パンルベ方程式の持つ様々な性質 (例えば，ハミルトニアン構造，初期値空間，etc.) が，相似簡約前の何から来ているのかを解明することは，興味深い課題であろう。また，今のところ全ての「パンルベ型方程式」が相似簡約としてとらえられているわけでもない。特に，[S] のリストにおける $q$-$\mathrm{P_{VI}}$ より上の，対応する線形問題が分っていないものに対しては，今のところ手がかりがない。

また，本稿では基本的なアイデアを解説することを目的としたため 1 成分系を中心に解説したが，例えば矢嶋・及川階層のような，多成分階層の principal でも homogeneous でもない簡約からも，まだまだ面白い系が現れることが期待できる。「$(2,1)$ 型の分割 $\to$ 矢嶋・及川階層 $\to$ $\mathrm{P_V}$」という例からも分かるように，連続系自体も興味深い対象であるし，もちろん対応する離散系を考えことも大切であろう。以下の Appendix では，

- $(1,2)$ 型の分割 $\to$ 離散ロトカ・ボルテラ方程式
- $(1,M)$ 型の分割 $\to$ 離散ハングリー・ロトカ・ボルテラ方程式

という例について，簡単にまとめておく。

上記のもの以外にも，自己双対ヤン・ミルズ方程式から見る立場 [MW] との関係，UC 階層 [Tsud] との関係など，まだまだやれること，やるべきことは残っていると思われる。

## Appendix: $(M,1)$ 型の分割に付随する階層の離散化

まずは 2 成分 KP 階層に対する「双線形恒等式」[JM2] から出発する：

$$
\begin{aligned}
(-)^{s_2'+s_2''}\oint \frac{\mathrm{d}\lambda}{2\pi\mathrm{i}\lambda}\lambda^{s_1'-s_1''-1}\mathrm{e}^{\xi(x^{(1)}-x^{(1)\prime},\lambda)}&\\
\times\langle s_1'-1,s_2'|\mathrm{e}^{H(x^{(1)}-[\lambda^{-1}],x^{(2)})}g|s_2,s_1\rangle&\\
\times\langle s_1''+1,s_2''|\mathrm{e}^{H(x^{(1)\prime}+[\lambda^{-1}],x^{(2)\prime})}g|s_2,s_1\rangle&\\
+\oint \frac{\mathrm{d}\lambda}{2\pi\mathrm{i}\lambda}\lambda^{s_2'-s_2''-1}\mathrm{e}^{\xi(x^{(2)}-x^{(2)\prime},\lambda)}&\\
\times\langle s_1',s_2'-1|\mathrm{e}^{H(x^{(1)},x^{(2)}-[\lambda^{-1}])}g|s_2,s_1\rangle&\\
\times\langle s_1'',s_2''+1|\mathrm{e}^{H(x^{(1)\prime},x^{(2)\prime}+[\lambda^{-1}])}g|s_2,s_1\rangle&=0. \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

ここで，$x^{(a)}=(x_1^{(a)},x_2^{(a)},x_3^{(a)},\ldots)$ $(a=1,2)$, $[\lambda^{-1}]=(\frac{1}{\lambda},\frac{1}{2\lambda^2},\frac{1}{3\lambda^3},\ldots)$ 等の記号を用いた。記号も含めて，正確な定義については [JM2] を参照していただきたい。

双線形恒等式 (4.1) において

$$
s_1'=s_1+1,\quad s_2'=s_2,\quad s_1''=s_1-1,\quad s_2''=s_2-1,\quad x^{(2)}=x^{(2)\prime} \qquad (4.2)
$$

としてから「三輪変換」[Mi]

$$x^{(1)} = (l+1)[\delta], \qquad x^{(1)\prime} = l[\delta] \tag{4.3}$$

を施すことで，次の差分方程式が得られる：

$$\begin{aligned}\tau(s_1, s_2, l)\tau(s_1, s_2-1, l+1) - \tau(s_1, s_2, l+1)\tau(s_1, s_2-1, l)\\ = \delta\tau(s_1+1, s_2-1, l+1)\tau(s_1-1, s_2, l).\end{aligned} \tag{4.4}$$

さらに，$(1, M)$-reduction の条件

$$\tau(s_1+1, s_2+M, l) = \tau(s_1, s_2, l) \tag{4.5}$$

を満たすことを要請して，従属変数 $u(s_2, l)$ を

$$u(s_2, l) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tau(s_1, s_2-M-1, l+1)\tau(s_1, s_2+M, l)}{\tau(s_1, s_2, l)\tau(s_1, s_2-1, l+1)} \tag{4.6}$$

で定めれば，$u(s_2, l)$ が次の非線形差分方程式を満たすことが導かれる

$$\frac{u(s_2, l+1)}{u(s_2, l)} = \frac{\prod_{i=1}^{M}\{1-\delta u(s_2+i, l)\}}{\prod_{i=1}^{M}\{1-\delta u(s_2-i, l+1)\}}. \tag{4.7}$$

これは，辻本らによって議論された，「離散ハングリー・ロトカ・ボルテラ方程式」[THO, Tsuj1] に他ならない。$M=2$ のときが，ソリトン・オートマトンの超離散化による導出 [TTMS] の際にも用いられた，「離散ロトカ・ボルテラ方程式」である。ただし，上述のような 2 成分 KP 階層による定式化から得られる特殊解は，「格子型」ではなく「分子型」となる。このことは，双線形方程式 (4.4) が $\tau \equiv 1$ (恒等的に 1) という解を持たないことからも分かる。

## 参考文献

[AS1] M.J. Ablowitz and H. Segur, *Solitons and the inverse scattering transform*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1981 (日本語訳：ソリトンと逆散乱変換 (薩摩・及川 訳)，日本評論社，1991).

[AS2] M.J. Ablowitz and H. Segur, Exact linearization of a Painlevé transcendent, *Phys. Rev. Lett.* **38** (1977), 1103–1106.

[B] A. Bobenko, Discrete conformal maps and surfaces, In *Symmetry and integrability of difference equations* (Eds.: P. Clarkson, F. Nijhoff), Cambridge University Press, 1999, pp. 97–108.

[D] L.A. Dickey, Modified KP and Discrete KP, *Lett. Math. Phys.* **48** (1999), 277–289.

[HI] L. Haine and P. Iliev, The bispectral property of a $q$-deformation of the Schur polynomials and the $q$-KdV hierarchy, *J. Phys. A: Math. Gen. 30* (1997), 7217–7227.

[IY] T. Ikeda, H. Yamada: Polynomial $\tau$-functions of the NLS-Toda hierarchy and the Virasoro singular vectors, *Lett. Math. Phys.* **60** (2002), 147-156.

[JM1] M. Jimbo, T. Miwa, Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. III, *Physica D* **4** (1981), 26–46.

[JM2] M. Jimbo, T. Miwa, Solitons and infinite dimensional Lie algebras, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **19** (1983), 943–1001.

[J] 神保道夫, ホロノミック量子場 (岩波講座 現代数学の展開 4), 岩波書店, 1998.

[KNY] K. Kajiwara, M. Noumi and Y. Yamada, $q$-Painlevé systems arising from $q$-KP hierarchy, *Lett. Math. Phys.* **62** (2002), 259–268.

[KJDM] 柏原正樹・神保道夫・伊達悦朗・三輪哲二, ソリトン方程式と Kac-Moody リー環, 数学 (岩波書店) 第 34 巻 (1982), pp. 1–16.

[KK1] S. Kakei and T. Kikuchi, Affine Lie group approach to a derivative nonlinear Schrödinger equation and its similarity reduction, *Internat. Math. Res. Notices* **78** (2004), 4181–4209.

[KK2] S. Kakei and T. Kikuchi, Solutions of a derivative nonlinear Schrödinger hierarchy and its similarity reduction, In Proceedings of the meeting "ISLAND2" (Integrable Systems: Linear And Nonlinear Dynamics), to appear.

[KK3] 菊地哲也・筧三郎, Three-wave equation の相似簡約による Painlevé VI 型方程式, 無限可積分系セッション 講演アブストラクト, 日本数学会秋季総合分科会, 北海道大学, 2004 年 9 月; T. Kikuchi and S. Kakei, in preparation.

[KIK] T. Kikuchi, T. Ikeda and S. Kakei, Similarity reduction of the modified Yajima-Oikawa equation, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** (2003), 11465–11480.

[KS] S. Kakei and J. Satsuma, Multi-Soliton Solutions for a coupled system of the nonlinear Schro"dinger equation and the Maxwell-Bloch equations, *J. Phys. Soc. Jpn.* **63** (1994), 885-894

[MW] L.J. Mason and N.M.J. Woodhouse, *Integrability, self-duality, and twistor theory*, Oxford University Press, 1996.

[Mi] T. Miwa, On Hirota's difference equation, *Proc. Japan Acd., Ser. A*, **58** (1982), 8–11.

[MJ] 三輪哲二・神保道夫 , $\tau$ 函数の理論, 数学 (岩波書店) 第32巻 (1980), pp. 289–307.

[N] F. Nijhoff, On some "Schwarzian" equations and their discrete analogues, in *Algebraic aspects of integrable systems* (Birkhäuser, 1997), pp. 237–260.

[NY] M. Noumi and Y. Yamada, Higher order Painlevé equations of type $A_l^{(1)}$, *Funkcial. Ekvac.* **41** (1998), 483–503.

[N] 野海正俊，パンルベ方程式 – 対称性からの入門 –，朝倉書店 (すうがくの風景 4)，2000.

[O] 岡本和夫，パンルヴェ方程式序説，上智大学数学講究録 **19**，1985.

[S] H. Sakai, Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations, *Comm. Math. Phys.* **220** (2001), 165–229.

[Ta] 高崎金久，可積分系の世界 – 戸田格子とその仲間 –，共立出版，2001.

[TTMS] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma, From soliton equations to integrable cellular automata through limiting procedure, *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996), 3247–3250.

[Tsud] T. Tsuda, Universal characters and an extension of the KP hierarchy, *Comm. Math. Phys.* **248** (2004), 501–526.

[THO] S. Tsujimoto, R. Hirota and S. Oishi, An extension and discretization of Volterra equation, *Techn. Report IEICE, NLP* (1993), 92–90.

[Tsuj1] 辻本諭，可積分系の離散化について，「可積分系の応用数理」(中村佳正編，裳華房，2000) 所収.

[Tsuj2] S. Tsujimoto, On a discrete analogue of the two-dimensional Toda lattice hierarchy, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **38** (2002), 113–133.

[UT] K. Ueno and K. Takasaki, Toda lattice hierarchy, *Adv. Stud. in Pure Math.* **4** (1981), 1–95.

[WMTB] T.T. Wu, B.M. McCoy, C.A. Tracy and E. Barouch, Spin-spin correlation functions for the two-dimensional Ising model: Exact theory in the scaling region, *Phys. Rev. B* **13** (1976), 316–374.

[YY] 山田泰彦，Painlevé方程式から見たsoliton理論入門，*Rokko Lectures in Math.* **7**「パンルベ方程式の眺望」， pp. 1–16.