

A double-exponentially growing solution  
of the two-dimensional ideal Boussinesq equations:  
its further evolution stages and response to disturbances

藤 定義、松本剛、山田良透、宮下尚\*  
京都大学・理、\* IBM 東京基礎研究所

2次元非粘性 Boussinesq 方程式の初期値問題を数値的に解いて、温度の勾配の最大値が2重指数関数で増大すること、更にその後自己相似的な発展が始まり等温線が有限時間で無限に伸長し爆発が起きる可能性を示唆する結果を得た。

1 はじめに

3次元 Euler 方程式の初期値問題の適切性は未解決の難問である [1, 2]. コンピュータの発展に伴い多くの研究者がこの難問に挑んできたが、決定的な結果は今だ得られていない. しかしながら、一連の研究により、任意の初期条件に対しては構造の形成が起き、発散を引き起こすと考えられている2次の非線形性が逓減され発散を抑制する 'depletion of nonlinearity' (以下非線形性の逓減と呼ぶ) が起きることが知られるようになってきた. 従って、有限時間発散を実現するためには、少なくとも「非線形性の逓減」を起こさないような初期条件を選ぶ必要があると考えられている. このような初期条件でもっとも可能性の高いものは Pelz が導入した高対称性を持つものである [3].

3次元 Euler 方程式の特異点発生の問題は、古くは乱流のエネルギー散逸の問題と関連して考えられてきた [2]. Kolmogorov の乱流理論では非粘性の極限においてもエネルギー散逸は有限に留まるという仮説をもとに、有名なエネルギースペクトルの  $5/3$  乗則を導いた. これは、非粘性極限で速度場が自己相似生を持ちかつ滑らかさを失うことを示唆する. このような場が有限時間に形成されるならば、Euler 方程式の爆発と密接に関連するはずであるが、乱流理論の側からは爆発を示唆する結果は得られていない.

本報告では、2次元アクティブスカラーの爆発問題を数値的に取り扱う [1, 2]. 良く知られているように、2次元 Euler 方程式は爆発はしない. これは渦度が保存することを用いて証明される. 一方、アクティブスカラーは速度場とカップルしており、このために渦度は保存しない. その爆発問題は未解決である. 今、スカラー場を  $\vartheta$  と置くと、スカラー場と速度場の時間発展は次の方程式に従う.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\right) \vartheta = 0, \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\right) \omega = F(\vartheta, \nabla \vartheta). \tag{2}$$

このとき、 $\chi \equiv \nabla^\perp \vartheta = (\partial \vartheta / \partial y, -\partial \vartheta / \partial x)$  と定義されるベクトル量  $\chi$  は、次の渦度方程式と同型の方程式に従う.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\right) \chi = (\chi \cdot \nabla) \mathbf{u}. \tag{3}$$

このことから理解できるように、2次元アクティブスカラー方程式系では解が有限時間発散する可能性を排除できない。

アクティブスカラー場  $\vartheta$  を磁気スカラーポテンシャルとすると方程式 (1), (2) は磁気流体力学 (MHD) の基礎方程式となる。また、速度場の方程式を

$$\mathbf{u} = (-\Delta)^{-1/2} \nabla^\perp \vartheta \quad (4)$$

とおくと、準地衡近似方程式 (QG) となる。本報告では、 $\vartheta$  を温度場とし  $F = \partial\vartheta/\partial x$  と置いて得られる Bousinesq 方程式を扱う。

これらの3つの場合に対して、有限時間発散を起こす場合に満たすべき判定条件である Beal-Kato-Majda の基準 [1, 4] が求められている。Bousinesq 方程式の場合は、もし  $t = T$  で発散するならば以下の条件を満たさなければならない [5]。

$$\int_0^T |\omega|_\infty(t) dt = \infty, \quad (5)$$

$$\int_0^T \int_0^t |\vartheta_x|_\infty(s) ds dt = \infty. \quad (6)$$

## 2 2次元自由熱対流系

Bousinesq 方程式はその導出に Bousinesq 近似が用いられており、浮力が働く場合の流体運動を記述する。以下便宜的にこの系を2次元自由対流 (FC) と呼ぶことがある。2次元理想 Bousinesq 方程式は、熱対流系を記述するのみならず、3次元軸対称旋回流の局所近似からも得られ、3次元 Euler 方程式と密接に関連している [6]。Pumir と Siggia はアダプティブメッシュを用いて数値的に解き、有限時間発散を示唆する結果を得た [6]。その後、追試が行われたが、E と Shu は、BKM 基準式 (5), (6) を導き、Pumir と Siggia の初期条件からは爆発が起きない可能性が高いことを示した [5]。

ところで、2DFC 系は粘性効果が加わると3次元 Navier-Stokes 方程式と同様にカスケードを通して維持される乱流状態が存在する [7]。ただし、カスケードするのはエネルギーではなく、非粘性での保存量である温度のバリエーション

$$S = \frac{1}{2} \int T^2 dx \quad (7)$$

である\*。以下、この量  $S$  をエントロピーと呼ぶことにする。また、 $\nabla^\perp \vartheta \equiv \chi$  を  $T$  渦度と呼ぶ。粘性効果がある場合、方程式系は次のように拡散項と粘性項をそれぞれ含む。

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \vartheta = \kappa \Delta^n \vartheta, \quad (8)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \omega = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \nu \Delta^n \omega. \quad (9)$$

ここで、 $\nu, \kappa$  はそれぞれ動粘性係数、熱拡散係数である。また、 $n = 1$  の場合は通常の拡散、粘性項であるが、数値計算の便宜のため  $n = 8$  の場合 (超拡散, 超粘性) も以下扱う。速度場は

\*正確には  $T$  の任意関数は保存する。

非圧縮条件  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  を満たすものとする。この系では、 $y$  方向下向きに重力が働いており周囲より高温の領域は上昇し、低温の領域は下降することに注意をして欲しい。

エントロピーの低波数側から高波数側へのカスケードを仮定すると、エントロピー散逸率  $\epsilon_\theta$  と浮力項の係数  $\alpha g$  (ここでは 1 とおいた) を用いて次元解析することにより、慣性領域におけるエネルギースペクトル  $E(k)$  とエントロピースペクトル  $S(k)$  は以下のように決まる [?]:

$$E(k) = C_E \epsilon_\theta^{2/5} (\alpha g)^{4/5} k^{-11/5}, \quad (10)$$

$$S(k) = C_S \epsilon_\theta^{4/5} (\alpha g)^{-2/5} k^{-7/5}. \quad (11)$$

ここで  $C_E, C_S$  は普遍定数と考えられる。ただし、エントロピー散逸率は次式で定義される。

$$\epsilon_\theta = \langle \epsilon_\theta(\mathbf{x}, t) \rangle = \kappa \langle \nabla T \cdot \nabla T \rangle. \quad (12)$$

ここで紹介したエントロピーカスケードに基づく議論は、3次元 Navier-Stokes 乱流における Kolmogorov のカスケード理論 (K41) に対応するものであり、Bolgiano-Obukhov (BO) スケーリングと呼ばれる。

図 1 に発達した 2DFC 乱流の T 渦度の絶対値のスナップショットを示す。この図からも分かるように、T 渦度は自己相似的な速度場に伸長を受けるため、紐状の構造をとる。更にこの紐が様々なスケールのキノコ状の構造 (プルーム) を形成しながらエントロピーのカスケードを維持している。



図 1: T 渦度場の絶対値のスナップショット

### 3 Cordoba-Fefferman の理論

本章では、QG 方程式の有限時間発散探求に関する研究とそれに関連した Cordoba-Fefferman (CF) の理論を紹介する。

QG 方程式は、Constantin ら [9] によって初めてその爆発問題が数値的に取り扱われ、有限時間発散が示唆された。その後、大木谷と山田 [10] は精度の高い数値計算を行い、アクティブスカラー場の勾配 (T 渦度) の最大値が 2 重指数関数で増加することを示した。更に粘性を加えた場合に、エネルギーの散逸率が最大値を取る時刻が非粘性の極限で発散することを示した。その後、温度場がサドル構造を持つ流れでは爆発が起こらないことが Cordoba [11] によって、また粘性拡散項がある場合の正則性は Constantin と Wu [14] によってそれぞれ証明された。

Cordoba と Fefferman [12] は一般的なアクティブスカラー場に対して、速度場が局所的に無限大にならなければそのレベルセットが  $t = T$  で合体 (シャープフロントの形成) する形の発散は起きないことを示した。証明の詳細は論文を参照して頂くとして、物理的にはアクティブスカラー場が Lagrange の意味での保存量であることを利用している。2 本のレベルセットが囲む有限の幅の領域でその面積を保存したまま幅が有限時間で 0 に成るためには、幅に相対的に領域の長さを無限大にしなければならず、これが実現するためには速度が無限大になる必要があるということである。彼らはこの議論を進めて QG 方程式では幅が時間の 2 重指数関数で下からおさえられることを示した [13]。この議論には、時間微分を含まないスカラーと速度の関係式 (4) が用いられているために、2DFC 系には適用できない。

CF の理論では、速度場の局所的な一様性が仮定されている。面積を保存したまま一様に伸ばされるので有限時間で幅が 0 になるためには速度の無限大が必要となるのである。

もし、速度場がこの意味での一様性を満たさないとすると、長さ  $l$  だけ離れた点の速度差が  $l^\alpha$  でスケールされるとしよう。また、長さスケールが時間と共に小さくなるとうるとし、スケールが  $1/\alpha$  になるのに  $\Delta t_n$  かかるとする。ここで、長さスケール  $l_n$  の領域が  $l_{n+1} = l_n/\alpha$  になるときにその長さが  $\gamma$  倍になるとする。ただし、 $\Delta t_n = \beta \Delta t_{n-1}$ ,  $\beta < 1$  を満たすとする。つまり、長さスケールが  $1/\alpha$  になるのにかかる時間はその前のステップにかかった時間より  $\beta$  倍短くなるとしている。この自己相似的な縮小過程で形成されるフラクタルな構造のフラクタル次元  $d_f$  が  $\ln \gamma / \ln \alpha$  で与えられる。

いま  $N$  ステップ回の縮小が起きたとすると、最初の長さが  $L_0$  だった領域は、 $N$  ステップ後には、 $L_N = (\gamma/\alpha)^N L_0$  となる。このとき  $N$  ステップ後の局所的な速度差  $v_N$  は、

$$v_N = \frac{l_N}{\Delta_N} = \frac{1}{(\alpha\beta)^N} \frac{l_0}{\Delta_0} \quad (13)$$

と見積もることができる。従って、 $\alpha\beta$  が 1 以上ならば  $v_N$  は発散しない。一方、初期の領域の幅を  $\delta_0$  とし、 $N$  ステップ後の幅を  $\delta_N$  とすると面積保存の関係式  $L_0\delta_0 = L_N\delta_N$  から、

$$\delta_N = \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^N \delta_0 \quad (14)$$

と見積もれる。もし、 $\gamma/\alpha > 0$  ならば幅は 0 に収束し、このときフラクタル次元は 1 よりも大きい。 $N$  ステップ回縮小を繰り返すのに必要な時間  $T_N$  は

$$T_N = \sum_{n=1}^N \Delta t_n = \Delta t_0 \frac{1 - \beta^N}{1 - \beta} \quad (15)$$

と与えられるので、幅が0に成るまでにかかる時間は有限であることがわかる。以上のように、レベルセットに囲まれた領域が自己相似的に伸縮縮小されるならば、速度は発散することなく有限時間で幅が0になる、すなわち爆発することが可能である。

## 4 数値計算

### 4.1 計算スキーム

基礎方程式(8),(9)の初期値問題を2重周期領域 $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ において数値的に解いた。数値スキームとして空間方向にはj擬スペクトル法、時間発展に4次精度ルンゲ・クッタ法を用いた[7, 8]。ここでは一般性を失うことなく $\alpha g = 1$ とおける。粘性、拡散効果を含む場合は簡単のためプラントル数 $Pr = \nu/\kappa$ を1と置いた。

本報告では、非粘性(理想)系の他に、比較のために通常の粘性、拡散項をもつ系と $\Delta^8$ の超粘性・超拡散項を持つ系を扱う<sup>†</sup>。用いたパラメータ値、モード数、を表1にまとめた。非粘性(理想)系では、時間発展に伴いモード数を $2^9$ から $2^{12}$ まで増やしている。理想系では計算精度の確認が必要であるが、詳細は省略する。

名称	粘性	動粘性率 ( $\nu_0 = 1 \times 10^{-3}$ )	モード数 $N$
FCI	なし	0	$2^9 \sim 2^{12}$
FCR12B	通常	$\nu_0/32$	$2^{12}$
FCR12A	通常	$\nu_0/16$	$2^{12}$
FCR11A	通常	$\nu_0/8$	$2^{11}$
FCR10A	通常	$\nu_0/4$	$2^{10}$
FCR09A	通常	$\nu_0$	$2^9$
FCR09B	通常	$4\nu_0$	$2^9$
FCR11H	超粘性	$1 \times 10^{-40}$	$2^{11}$
FCR10H	超粘性	$1 \times 10^{-37}$	$2^{10}$

表1: 数値計算に用いたパラメータ。超粘性では $\Delta^8$ を用いた。 $N$ は一次元方向のモード数を表す。DNSでは各成分に対し $N^2$ 個のFourierモードを用いた。

### 4.2 初期条件

初期条件には、以下のような中央が高温で、その両脇に温度フロントを持つ状態を用いた。 $x \leq \pi$ の時:

$$x_c = \pi/2 - a \sin(y),$$

$$\omega = 0.1 \exp\{-0.5 * [(x - x_c)/w]^2\}, \quad (16)$$

$$T = 0.5\{1.0 + \operatorname{erf}[(x - x_c)/\sqrt{2}w]\}. \quad (17)$$

<sup>†</sup>本来は粘性と拡散の両効果を議論すべきであるが、以下では簡単のためプラントル数( $Pr = \nu/\kappa$ )が1である場合を扱い、代表して粘性係数にのみ言及する。また、分子運動の効果を無視する極限を非粘性極限とよぶことにする。

$x \geq \pi$  の時：

$$x_c = 3\pi/2 + a \sin(y),$$

$$\omega = -0.1 \exp\{-0.5 * [(x - x_c)/w]^2\}, \quad (18)$$

$$T = 0.5\{1.0 + \operatorname{erf}[(x_c - x)/\sqrt{2}w]\}. \quad (19)$$

ここで、 $a$  はフロントの三角関数的変動の振幅、 $w$  はフロントの幅を表すパラメーターで、それぞれ 0.3、0.4 とした。また、 $\operatorname{erf}(x) = \frac{2a}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-\xi^2) d\xi$  である。

初期条件は、 $x = \pi$  に対して温度は対称、渦度は反対称である。この対称性は、理想、粘性の両場合で時間発展に対して保存される。従って、以下では、スナップショットは片側の領域でのみ表示する場合がある。

図 2 に初期の温度、 $T$  渦度の絶対値、渦度の等高図を示す。中央に高温、両側に低温領域がある。ただし、相対的に幅の広い  $T$  渦層が形成されている。低温域は浮力により下降し、高温域は上昇するが、この流れによって温度の境界すなわち  $T$  渦度の強い領域は伸長され薄くなり  $T$  渦度が増大する。

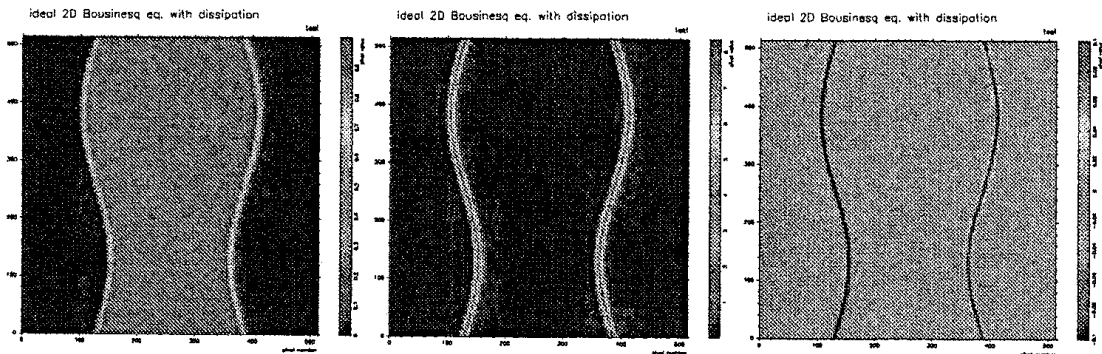


図 2: 初期条件. 左から温度、 $T$  渦度の絶対値、渦度.

## 5 結果

以下では、非粘性 (理想) 状態と粘性のある場合の結果を報告する。

### 5.1 初期発展：2重指数関数的な発展

QG 方程式では、有限時間発散は起きず、渦度の勾配の最大値は 2 重指数関数で増大することが確かめられている。2次元理想 Bousinesq 方程式の場合、BKM 基準によれば、有限時間発散が起きるとすると  $T$  渦度と渦度の最大値が発散するのでこの二つの量の最大値をモニターする。図 3 に DNS で得られた結果を示した。  $T$  渦度の最大値に重なっている実線は、2 重指数関数型の発展

$$\chi_{max}(t) = F_a \exp\{F_b \exp(F_c t)\} \quad (20)$$

を仮定し最小自乗法を用いて  $1 \leq t \leq 5$  の範囲でパラメーターフィッティングを行ったものである。得られたフィッティングパラメーター値は表2にまとめた。また、渦度に関しては、渦度と T 渦度が満たす関係式 (21) を用いて、T 渦度の最大値  $\chi_{max}$  を 2 重指数関数にフィッティングして得た近似式 (20) を積分して得た式 (22) をプロットした。

$$\frac{D\omega}{Dt} = -\frac{\partial\vartheta}{\partial x} \sim |\chi|. \quad (21)$$

$$\omega_{max}(t) = \omega(0) + \int_0^t \chi_{max}(s) ds = \omega(0) + \int_0^t F_a \exp\{F_b \exp(F_c s)\} ds. \quad (22)$$

パラメーター	$F_a$	$F_b$	$F_c$
値	$0.823 \pm 0.005$	$0.176 \pm 0.002$	$0.530 \pm 0.002$

表2: 近似式 (20) のフィッティングパラメーター値

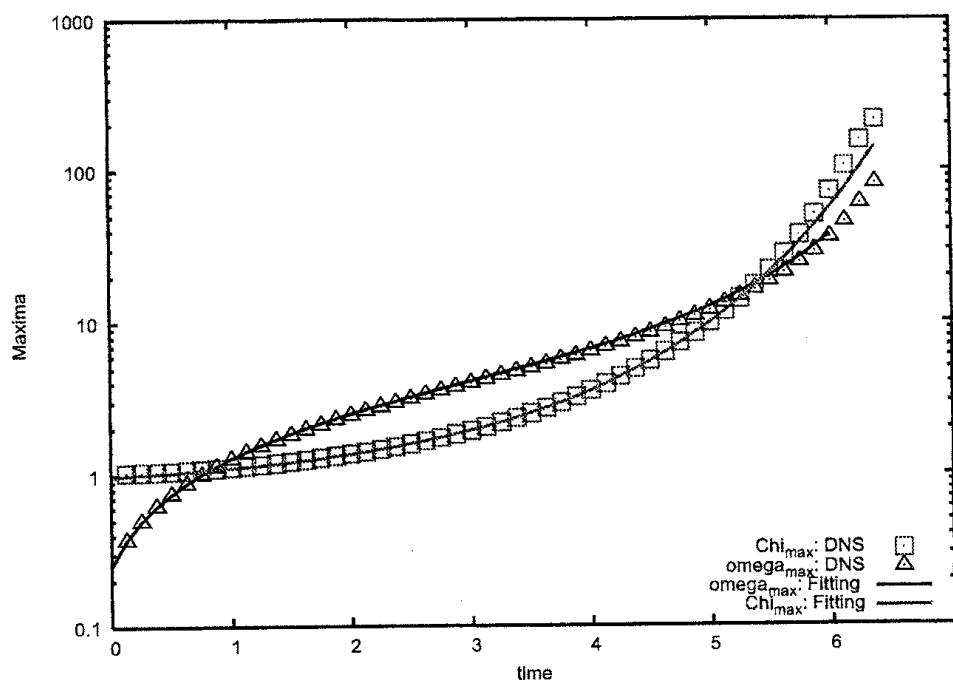


図3: T 渦度と渦度の最大値  $\chi_{max}$  と  $\omega_{max}$  の時間発展。実線はフィッティング関数 (20) と (22)。

この結果は、2次元理想 Bousinesq 系でも CF の理論が適応できることを示唆している。また、秩序形成に伴う非線形効果の逓減が起きていることを示していると思われる。以上のことより、少なくとも我々の用いた初期条件では、有限時間発散は起きないことが結論できる。しかしながら、更に時間発展を追うと、一様な伸長を生じさせていた上昇下降する高温、低温塊が周期境界条件のため再接近する。この結果温度境界の伸長を引き起こしていた速度場が変形を受けることになる。図7に伸長を受けていた T 渦層が変形を始めた様子が見て取れる。残念

ながら、この時刻では既に数値計算の精度を越えているため参考程度にならない。比較のために、粘性がある場合の同じ時刻の T 渦度場を図 7 に描いた。これら二枚の図は、T 渦層が層よりも相対的に大きなスケールの流れ場によって変形を受けていることを示している。以上、2 重指数関数的な増大で形成された T 渦層が大きなスケールの流れ場によって流されることにより変形を受けることを示した。次節では、粘性が有限な場合に粘性効果にそれほど影響を受けない大きなスケールの流れによる T 渦層の発展の様子を調べる。

## 5.2 後期発展

QG 方程式では、粘性が十分弱い場合の発展の様子が大木谷と山田によって詳細に調べられている。非粘性の場合に渦度の最大値が 2 重指数関数的に発散することを反映して、粘性を小さくして行くとエネルギー散逸が極大となる時刻  $t_{max}$  がレイノルズ数の 0.448 乗で増えてくことが報告されている。仮に非粘性の極限で有限時間で発散するとすると、 $t_{max}$  は有限値に収束するはずであるという予想に反する結果である。比較のために、図 4 に T 渦度のバリエーションの時間発展を示した。明らかに  $t_{max}$  の顕著な増大は見られず、むしろ収束するように見える。図 5 には、バリエーションを温度拡散係数で割ったエントロピー散逸率の時間発展を示した。この図からは、拡散係数が 100 倍程変化しても散逸率は高々 5 割程度しか変化しない。乱流の統計と直接比べられないが、この結果は、良く知られている 3 次元 Navier-Stokes 方程式に従う乱流に対する Kolmogorov の仮説が成り立つ、すなわちエネルギー散逸率が粘性係数に依存しない独立な量であることと矛盾しない結果であることに注意して欲しい。

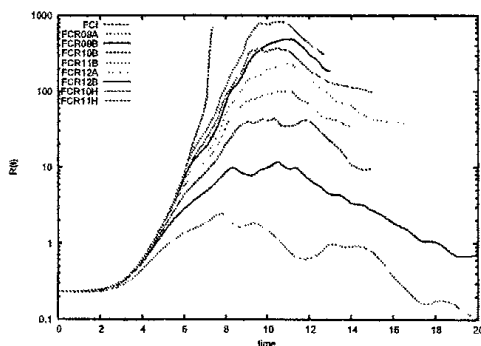


図 4: 温度のバリエーションの時間発展

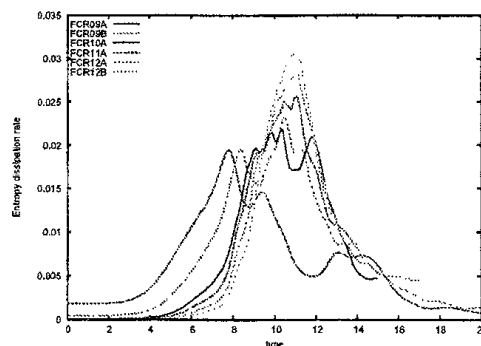


図 5: エントロピー散逸率の時間発展

今回の弱い粘性がある場合の結果から、非粘性極限を推測するの危険ではあるが、少なくとも有限時間発散の可能性は否定できないであろう。しかしながら、前節で見たように、非粘性(理想)系の結果は有限時間発散を支持していない。ただし、CF の理論の仮定が成り立たない状況が起こっていることが推測できる。事実今回の弱い粘性の結果から推測される有限時間発散の起こる時刻は、2 重指数関数的な増大が終わる時刻以降であり、新たな発展段階がありうることを示唆している。

以下、粘性が弱い場合に実空間での T 渦度場の発展の様子を調べ有限時間発散が起こり得る状況について考察する。図 6 は、粘性がある場合の T 渦度の最大値の時間発展を示している。



この図から、時刻  $t = 6.2$  くらいまでは粘性が弱ければ、2重指数関数的に増大するがその時刻以降は増大が押えられることが分かる。先にも述べたように、非粘性(理想)系の場合この時刻が今回の計算の限界であるので非粘性の計算ではこれ以上追求できない。ちなみに  $t = 11$  は、エントロピー散逸率が極大値を取る時刻である。

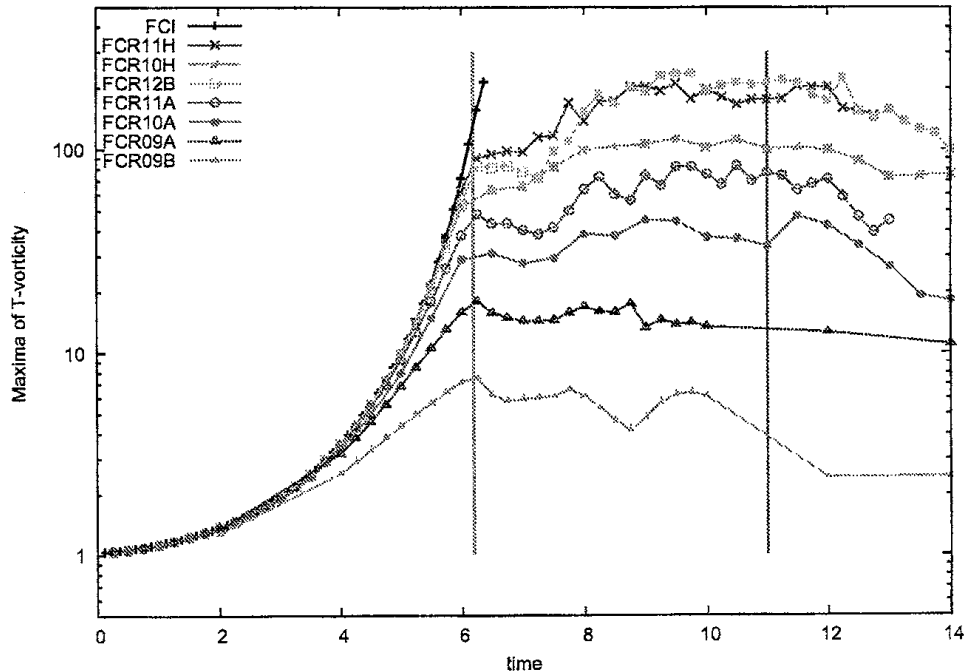


図 6: T 渦度の最大値の時間発展

時刻  $t = 6.2$  では、一様な T 渦層の伸長が変化し始める。粘性に依らないことから粘性の効かない大きなスケールの現象であると推測できる。従って粘性の弱い場合を考察することで新たな発展段階に付いての知見が得られると思われる。

図 7 には、 $t = 6.2$  後の T 渦度場の発展を描いた。T 渦度場は鏡像対称性を持つので領域の半分のみ示した。右側は 3 枚は FCR11H(超粘性) の場合である。中央に形成された強い T 渦層が層の右側で上昇する高温域と左側で下降する低温域がすれ違う様子が見取れる。時刻  $t = 6.2$  ではこの二つの温度塊が T 渦層を挟んで同じ高さになる。更に時間が進むと温度塊は互いに巻き込むように運動始めそれにつれて T 渦層も巻き始める。理想系 (FCI) と FCR11H の時刻  $t = 6.75$  での T 渦層のパターンが良く一致していることに注目して欲しい。ただし、T 渦層は 6 倍程度理想系の場合の方が強い。また、この時刻では理想系は中央の巻上がる T 渦層中心付近にモード数不足による乱れが生じていることから分かるようにすでに精度的に破綻していることに注意して欲しい。以上のように、初期に 2 重指数関数的に発達した T 渦層は、大きなスケールの温度塊の運動によりその発展が転移すると示唆される。

図 8-10 には、FCR11H の場合の T 渦度の絶対値の時間発展を描いた。図の中央で巻上がった T 渦層は、時間発展ともに至るところで渦を巻き始める。図 10 では自己相似的に伸長された T 渦層が領域全体に広がっている様子が見える。特徴的なのは発達した乱流の場合とは異なり、キノコ状のプリュームではなく大小さまざまなサイズの渦巻が形成されている。ここで

は、超粘性を用いた結果のみ示したが、粘性効果が比較的大きい場合にも同様の自己相似的な渦巻構造が形成される。しかしながら、粘性効果により形成されたT渦層は早い時期に融合し細かいスケールが消える。もちろん、粘性が効かないスケールのパターンは良く似ていることは言うまでもない。

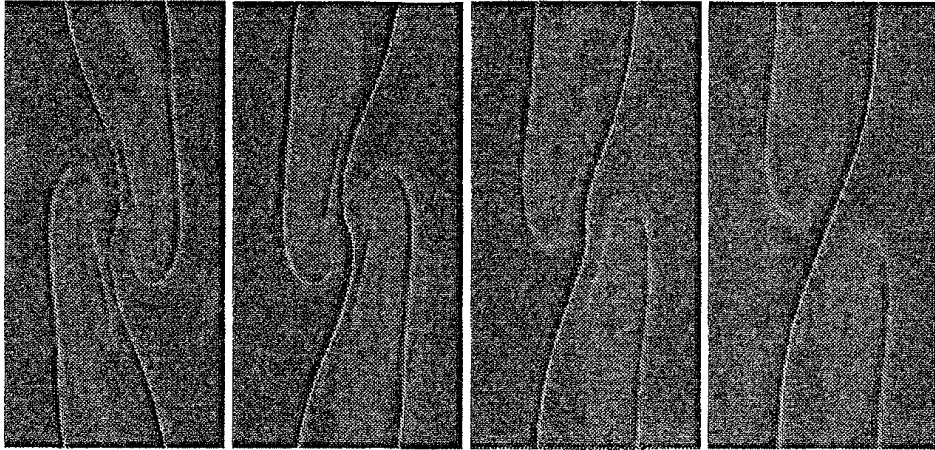


図 7: T 渦度の絶対値のスナップショット. 左から FCI(理想) 時刻  $t=6.75$ 、FCI11H (超粘性) $t=6.75$ 、6.5、6.25. 流れ場は左右が鏡像対称であるから、FCIは左側半分、FCI11Hは右側半分をそれぞれ描いた.



図 8: FCI11H の T 渦度の絶対値のスナップショット. 左から  $t=7.25$ 、 $t=7.5$ 、 $t=7.75$ 、 $t=8.0$

図 11 に超粘性 (FCI11H) の場合のエントロピースペクトル (温度のパワースペクトル) の時間発展を描いた. この図から,  $t=6.2$  の遷移時刻以降巾則域が形成されること, また  $t=11$  付近のエントロピー散逸が最大値を取る時刻以降は乱流にほぼ一致する巾則域に遷移することがわかる.  $t=6.2$  から  $t=10$  程度の時間では実空間の T 渦層の自己相似的な発展に対応する巾則が実現される. この時間帯でのスペクトルの巾はおおよそ  $-2.5$  であるがその値の意味は良く分かっていない.



図 9: FCR11H の T 渦度の絶対値のスナップショット. 左から  $t = 8.25$ 、 $t = 8.5$ 、 $t = 8.75$ 、 $t = 9.0$

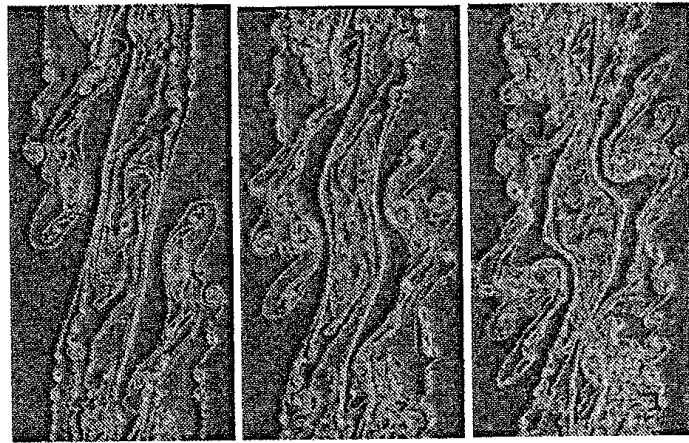


図 10: FCR11H の T 渦度の絶対値のスナップショット. 左から  $t = 9.25$ 、 $t = 9.5$ 、 $t = 9.75$

## 6 結論

本報告では、2次元のアクティブスカラー場の一つである、Bousinesq 方程式に従う温度場の初期値問題の適切性を直接シミュレーションを用いて調べた。式 (17)-(19) で与えられた初期条件に対して、T 渦度の最大値が 2 重指数関数 (式 (20)) で増大することを確認した。実空間では、温及び高温の塊が浮力によりそれぞれ下降上昇する時に作られる流れ場によって T 渦層が伸長されることに対応する。この状況は、QG 方程式に従うアクティブスカラーに対して得られた CF の理論が仮定する条件を満たすことから予想される結果である。この 2 重指数関数増大を実現する速度場は、低高両温度塊が浮力により逆方向に移動することから形成される。しかしながら、この低高両温度塊は周期境界条件により接近しすれ違いを起こす。このすれ違いによって 2 重指数関数増大から新たな発展段階に遷移すると示唆される。本報告で用いた理想系は、この遷移時刻を越えた辺りでシミュレーションの精度が保証されなくなるために、遷移が理想系で実際に観測されるかどうか断定できない。

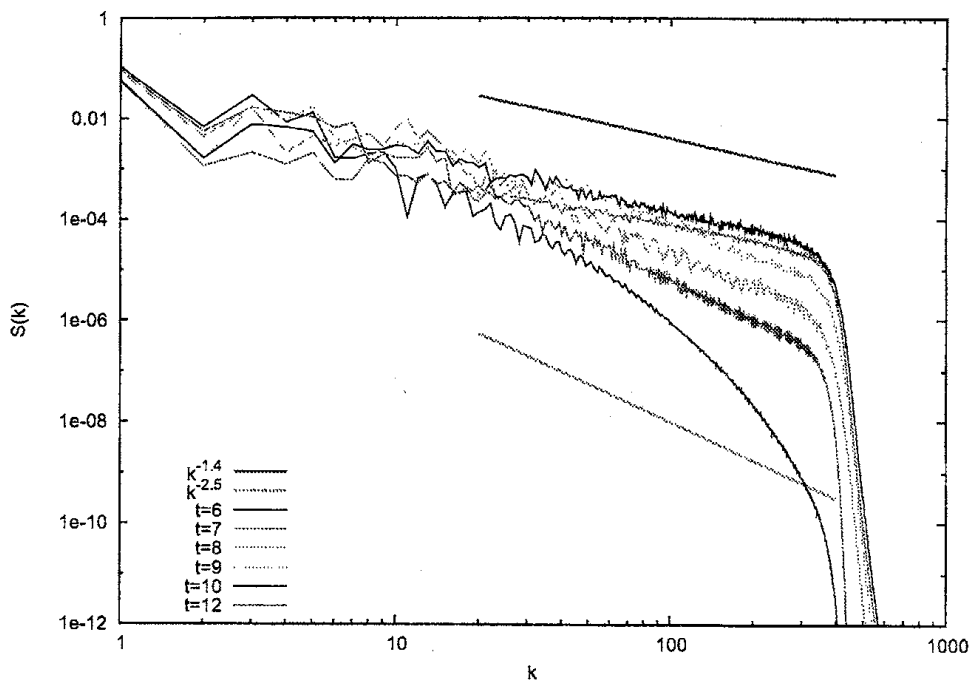


図 11: FCR11H のエントロピースペクトル :  $t=6,7,8,9,10,12$

遷移を引き起こす低高両温度塊の運動は T 渦層の特徴長さに比べ大きなスケールの現象であるために粘性の影響をあまり受けないものと推測できる。実際、表 1 にまとめた粘性効果を含む 7 つの場合ではこの遷移がほぼ同時刻に起こることから、遷移が粘性に依らないことが示唆される。更に、図 5 が示すように、エントロピー散逸率が最大値を取る時刻が非粘性の極限で一定値に収束することが推定できる。この結果は、粘性効果のある QG 方程式で得られた最大値を取る時刻が  $\nu^{-0.488}$  のように粘性に強く依存し非粘性の極限で無限大となることとは大きく異なる。

新たな発展段階では、T 渦層は自己相似的に伸長を受ける。この新たな発展段階を自己相似的発展段階と呼ぶことにする。自己相似的発展段階では弱い粘性の場合に得た結果から有限時間発散が起き得ることが示唆された。この結果は Cortoba 等の理論の導く結論と矛盾するようと思われる。CF の理論では、アクティブスカラーの 2 本のレベルセットによって囲まれる領域 (T 渦層) が局所的に一様に伸長される場合を扱っている。この領域の面積は保存されるので、有限時間でレベルセットの間隔が 0 になるには伸長の速度が無限大なることが要請される。しかしながら速度場は無限大にはならないので、有限時間発散は起きないと結論する。一方、自己相似的発展段階では 3 章で示したように、T 渦層がスケールに依存した局所的な速度差によって伸長されると考えると速度が発散すること無く有限時間で無限に伸びることを示すことができる。この速度差のスケージングは、図 11 のスペクトルが示すように発達した乱流のスケージングとは異なる可能性が高い。

本報告では、適当な初期条件に対して発展の初期は T 渦度の最大値が 2 重指数関数的な増大を行うが、その後自己相似的発展段階に遷移する可能性が高いことを理想系と弱い粘性系の直接シミュレーションにより示した。更に、自己相似的発展段階では有限時間での発散を否定で

きない可能性を得た。理想系の初期値問題は発達した乱流の性質とは無関係と考える研究者が多いが、本研究は逆に結び付く可能性を示すものである。

今後の課題としては、より多くのモード数を用いた精度の高い数値計算を行い理想系で遷移が起きていることを確認すること、弱い非粘性系で自己相似的発展段階のスケーリング則を確定させることが挙げられる。更に詳細な研究を通して有限時間発散が実際に起こり得るかどうかを明らかにすることは視野に入りつつあると思われる。

## 参考文献

- [1] Majda, A.J. and Bertozzi, A. L., 'Vorticity and Incompressible Flow', Cambridge University Press, 2002
- [2] 大木谷耕司、「渦運動力学の基礎」物性研究 **82-3**(2004)391
- [3] Pelz, R. B., *Phys. Rev. E* **55** (1997) 1617
- [4] Beal, T., Kato, T., and Majda, A., *Commun. Math Phys.* **94** (1984) 61
- [5] E, W. and Shu, C.W. : *Phys. Fluids* **6** (1994) 49
- [6] Pumir, A. and Siggia, E.D., *Phys. Fluids*, **A4** (1992) 1472
- [7] Toh, S. and Suzuki, E., *Phys. Rev. Lett.*, **73** (1994) 1501
- [8] Toh, S. and Matsumoto, T. , *Phys. Fluids*, **15**(2003) 3385
- [9] Constantin, P. Majda, A. J. and Tabak, E. G., *Nonlinearity* **7** (1994) 1995
- [10] Ohkitani, K. and Yamada, M. , *Phys. Fluids*, **9** (1997) 876
- [11] Cordoba, E., *Ann. Math.* **148** (1998) 1135
- [12] Cordoba, E. and Defferman, C., *Commun. Pure Appl. Math.* **55** (2002) 225
- [13] Cordoba, E. and Defferman, C., *J. Amer. Math. Phys.* **15** (2002) 665
- [14] Constantin, P. and Wu, J., *SIAM J. Math. Anal.* **30** (1999) 937