数理解析研究所講究録 1426 巻 2005 年 153-158

比較可能 +ke グラフの彩色問題

東出賢一 (Kenichi HIGASHIDE), 武永康彦 (Yasuhiko TAKENAGA)
電気通信大学 (The University of Electro-Communications)

1 はじめに

グラフの彩色問題は NP 完全問題である. しかし, この問題を少しでも効率的に解くことは計算機科学において重要な課題である.

パラメータ付計算量理論 [1] では, 一般の入力に対して NP 完全である問題への取り組みの 1 つとして, 問題 Π の入力の一部をパラメータとして特定の値 k に固定して, 特定の k の値の元では容易に解けるかどうかを研究対象とする. 各々の k の値に対して問題 Π を多項式時間で解けることを固定パラメータ容易であるという. しかし, 彩色問題は彩色数を 3 に固定したところで NP 完全である.

グラフを比較可能グラフに制限した場合, 彩色問題は多項式時間で解ける [3]. ここで比較可能グラフとは, グラフの各辺を適当な方向に有向辺にして推移的グラフを得ることができるような無向グラフのことである. すると, 比較可能グラフに「ある程度近い」グラフについても多項式時間で解ける可能性がある.

比較可能グラフに辺を k 本追加したグラフからなるグラフ族を比較可能 +ke グラフと表す. 本研究では, k を入力のパラメータとし, k の値を固定したときに比較可能 +ke グラフの彩色問題の計算量がどのように変化するかを調べる. 比較可能 +1e グラフの彩色問題は $O(\gamma|E|)$ 時間で解ける。ただし γ は頂点の最大次数である。一方で比較可能 +2e グラフの彩色問題は NP 完全である。

一方で, 関連研究として二部グラフに辺を k 本加えた二部 +ke グラフに対する彩色問題の研究がある [2]. 二部 +2e グラフの彩色問題は多項式時間で解けるが二部 +3e グラフに対しては NP 完全である. 比較可能グラフは二部グラフを含むので, この結果から比較可能 +3e グラフの彩色問題は NP 完全であることが分かる. この他, 二部グラフに 1 個の頂点とその頂点に接続する辺を任意に加えた二部 +1v グラフに対しては多項式時間, また同様に二部 +2v グラフに対しては NP 完全であることが分かっている.

一方で次のような一般的な性質も明らかにされている. $\mathcal{F}$ が非隣接頂点の identification の上で閉じているグラフ族で, $\mathcal{F}$ グラフの彩色問題は多項式時間で解けるとすると, $\mathcal{F}$+ke グラフの彩色問題はモジュレータ E_k が与えられ k が定数なら多項式時間で解ける. ただし, 非隣接頂点 u, v の identification とは頂点 u, v を新たな頂点で置き換え, 頂点 u, v と隣接する任意の頂点と新たな頂点との間に辺を加えることをいう. また, $\mathcal{F}$ が辺の縮約の上で閉じているグラフ族で, $\mathcal{F}$ グラフの彩色問題は多項式時間で解けるとすると, $\mathcal{F}$-ke グラフの彩色問題はモジュレータ E_k が与えられ k が定数なら多項式時間で解ける. ただし, 辺 (u,v) の縮約とは辺 (u,v) を削除し頂点 u, v を identification することをいう. 比較可能グラフはこれらの性質を満たさないため, 彩色問題の計算量は特に調べる必要がある.

2 準備

まず, $G=(V,E)$ を無向グラフとする. 彩色問題は次で定義される.

Input: グラフ $G=(V,E)$, 正の整数 $t \leq |V|$
Question: G は t 彩色可能か. つまり, すべての G の辺 (u,v) に対して, $f(u) \neq f(v)$ を満たす関数 $f: V \to \{1,2,\ldots,t\}$ が存在するか.

t 彩色可能な t のうち最小のものを彩色数 $\chi(G)$ という.

グラフ G が比較可能グラフであるとは, G の各無向辺を適当な方向の有向辺にしたときに, そのグラフが推移的グラフになるものが存在するときをいう. ただし, 推移的グラフとは辺 (u,v), (v,w) が存在するならば辺 (u,w) も存在するような有向グラフのことである.

グラフ G のクリーク数 $\omega(G)$ とは, G の完全部分グラフのうち最大のものの位数である.

$\mathcal{F}$ をあるグラフ族とすると, $\mathcal{F}$ グラフに辺を k 本加えたグラフからなるグラフ族を $\mathcal{F}$+ke と呼ぶ. また同様に, $\mathcal{F}$ グラフから辺を k 本取り除いたグラフからなるグラフ族を $\mathcal{F}$-ke と呼ぶ. $\mathcal{F}+ke$ グラフ $G=(V,E)$ のモジュレータとは, $G-E_k \in \mathcal{F}, |E_k| \leq k$ となるような $E_K (\subset E)$ のことである. つまり, $\mathcal{F}$+ke グラフからモジュレータに含まれる辺を取り除くと $\mathcal{F}$ グラフが得られる.

推移的グラフ $G=(V,E)$ の頂点 u, v について, u が v へ隣接しているとき $f(u) < f(v)$ を満たすような関数 $f: V \to \{1,2,\ldots,\omega(G)\}$ を, H のレベル付けといい, このとき $f(u)$ を u のレベルという.

比較可能グラフは理想グラフである. 理想グラフとは, クリーク数と彩色数が等しいグラフのことをいう. また, 比

較可能グラフのクリーク数および彩色数は多項式時間で求まる．

推移的グラフにおいて辺 (u,w), (w,v) が存在する場合，辺 (u,v) を省略して描いたグラフをハッセ図という．また，本文では有向辺をすべて図の下向きに描き，有向辺の矢印は省略して描くものとする．

3 比較可能 +1e グラフの彩色問題

本章では比較可能 +1e グラフの彩色問題の多項式時間アルゴリズムを与え，その正当性を述べる．

3.1 彩色の方針

まず本節で，比較可能 +1e グラフを彩色する方針を述べ，次節でアルゴリズムを構成する．なお今後，簡単のために暗黙のうちに比較可能グラフの代わりに比較可能グラフに対応した推移的グラフおよびハッセ図を用い，ハッセ図に描かれない辺は暗黙のうちに省略する．

比較可能 +1e グラフを G, G のモジュレータを $E_1((a,b)\in E_1)$ とすると，$G'=G-E_1$ は比較可能グラフとなる．なお，ここではモジュレータはあらかじめ与えられているものとする．もし仮にモジュレータが未知であったとしても，比較可能グラフの判定は多項式時間でできるので，モジュレータを探すことは多項式時間でできる．

比較可能 +1e グラフ G の彩色数 $\chi(G)$ は少なくとも $\chi(G')$，また高々 $\chi(G')+1$ である．G' における彩色のうち頂点 a,b が互いに異なる色で彩色されるものはそのまま G の彩色となり，頂点 a,b がともに同じ色で彩色されるものはそのままでは G の彩色として不適切である．このことに注意すると，G における $\chi(G)$ 彩色において，頂点 (a,b) を互いに異なる色で彩色できる条件として，以下の補題を示す．

補題 1 レベル l の2つの頂点 a,b を異なる色で彩色できる必要十分条件は，レベル $l-1$ と l の頂点から誘導される部分グラフ，およびレベル l と $l+1$ の頂点から誘導される部分グラフの少なくともどちらか一方において a,b が連結でないことである．

証明 まず G' の推移的グラフを構成し，すべての頂点をできるだけレベルが小さくなるようにレベル付けする．ここで，頂点 a,b のレベルを比べる．もし頂点 a,b のレベルが異なれば，各頂点をそれぞれその頂点のレベルと同じ色で彩色すればそれが比較可能 +1e グラフ G の彩色となる．(図1)

では，頂点 a,b のレベルが等しい場合を考える．このときの頂点 a,b のレベルを l_1 としておく．今度は全ての頂点をできるだけレベルが大きくなるようにレベル付けし，頂点 a,b のレベルを比べ，もし頂点 a,b のレベルが異なれば，各頂点をそれぞれの頂点のレベルと同じ色で彩色すればそれが比較可能 +1e グラフ G の彩色となる．

この場合でも頂点 a,b のレベルが等しい場合は，次のように考える．このときの頂点 a,b のレベルを l_2 とする．もし，$l_1<l_2$，つまりなるべく小さいレベルでレベル付けしたときと，なるべく大きいレベルでレベル付けしたときで頂点 a,b のレベルが異なれば，次のように頂点 a,b を異なるレベルでレベル付けすることができる．まず，レベル l_1 までなるべく小さいレベルでレベル付けする．ただし，このとき頂点 b のみレベル付けをしないでおく．今度はまだレベル付けされていない頂点をレベル $\omega(G)$ から順にレベル l_1+1 までなるべく大きいレベルでレベル付けする，以上ですべての頂点がレベル付けされ，頂点 a,b を互いに異なるレベルでレベル付けできる．したがって頂点 a,b は異なる色で彩色できる．

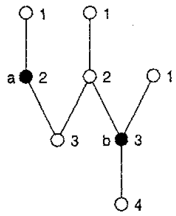

図1 できるだけレベルが小さくなるようにレベル付けし，レベルを G の彩色とする

最後に，$l_1=l_2(=l$ とおく) の場合を考えよう．まず，レベル $l-1$ まで各頂点をなるべく小さいレベルでレベル付けする．また，残った頂点をレベル $l+1$ までなるべく大きいレベルでレベル付けする．最後に残りの頂点がレベル l となるようレベル付けする．

さて，頂点 a,b は同じレベルでレベル付けされているので，レベル付けをそのまま頂点の彩色としても頂点 a,b は異なる色にならない．そこで，次の方針で彩色をすることにする．頂点 a が属するクリークのうちの1つに対し，一般性を保ったまま各頂点のレベルと同じ値で頂点を彩色する．

ここで，他のレベル l の頂点 v を $l-1$ 以下の色で彩色するための必要条件を考える．まず，頂点 a と同じクリークに属するレベル $l-1$ 以下の頂点は，必ず $l-1$ 以下の色で彩色しなければならない．そのような頂点のうちレベル $l-1$ のものに印を付けることにする．

次に印の付いたレベル $l-1$ の頂点と同じクリークに属するレベル l の頂点に注目する．そのような頂点は l 以上の色で彩色しなければならない．そのような頂点にも印を付ける．

そして，印の付いたレベル l の頂点と同じクリークに属するレベル $l-1$ の頂点に注目する．そのような頂点は $l-1$ 以下の色で彩色しなければならない．そのような頂点に印を付ける．このような操作を新たに印のつく頂点がなくなるまで続ける．

最終的に，レベル $l-1$ と l の頂点による誘導部分グラフ

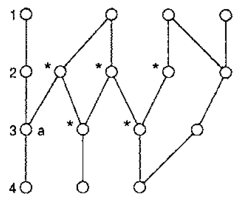

図2 印*をつけたグラフ

において, 頂点 a と連結である頂点に印が付き, そのような頂点のうちレベル l の頂点は $l-1$ 以下の色で彩色することはできない. したがって頂点 a 以外のレベル l の頂点 v を $l-1$ 以下の色で彩色するための必要条件は, このような誘導部分グラフにおいて頂点 a と連結でないことである.

また, 今述べた誘導部分グラフにおいてレベル l の頂点 v が頂点 a と連結でないという条件は, 頂点 v を $l-1$ 以下の色で彩色できる十分条件でもあることは, 次のように彩色することで分かる.

まず, レベル $l-2$ 以下の頂点およびレベル $l+1$ 以上の頂点はレベルと同じ色で彩色する. そして残りのレベル $l-1, l$ の頂点のうち頂点 a と誘導部分グラフで連結である頂点も同様にレベルと同じ色で彩色し, そうでない頂点はレベル $l-1$ のものは l の色で, レベル l のものは $l-1$ の色で彩色する.

この彩色は妥当である. なぜなら, 異なるレベルに同じ色を割り当てたのはレベル $l-1$ と l だけであり, 同じ連結成分の頂点には同じレベルに同じ色を割り当てたからである. これにより, 十分条件も示された.

したがって, 頂点 b を $l-1$ 以下の色で彩色できる必要十分条件は, このような誘導部分グラフにおいて頂点 a, b が連結でないことである. また頂点 b を $l+1$ 以上の色で彩色できる必要十分条件も同様である. □

3.2 計算量

前節で述べた彩色の方針にしたがって, 入力に比較可能 +1e グラフ G, G のモジュレータ E_1 をとり, G の彩色数 $\chi(G) = \chi(G - E_1)$ のとき yes を, そうでないとき no を返す次のアルゴリズムを構成する.

アルゴリズム

入力:比較可能 +1e グラフ G,
　　モジュレータ E_1 s.t. $(a, b) \in E_1$

1. 比較可能グラフ $G' = G - E_1$ を構成
2. G' の推移的グラフ, $k = \chi(G')$ を求める
3. G' の頂点をできるだけレベルが小さくなるようにレベル付けし $lv1$ を求める
4. もし $lv1(a) \neq lv1(b)$ なら yes を返して停止
5. G' の頂点をできるだけレベルが小さくなるようにレベル付けし $lv2$ を求める
6. もし $lv2(a) \neq lv2(b)$ なら yes を返して停止
7. もし $lv1(a) \neq lv2(a)$ なら yes を返して停止
8. $lv1(v) < lv1(a)$ である頂点 v に対して, $lv(v) = lv1(v)$ とする
9. 残りの頂点のうち $lv2(v) > lv2(a)$ である頂点 v に対して, $lv(v) = lv2(v)$ とする
10. 残りの頂点 v に対して $lv(v) = lv1(a)$ とする
11. $lv(v) = lv(a) - 1$ および $lv(v) = lv(a)$ を満たす頂点 v の集合から導かれる誘導部分グラフを構成
12. もしそのような誘導部分グラフにおいて頂点 a, b が連結でないなら yes を返して停止
13. $lv(v) = lv(a)$ および $lv(v) = lv(a) + 1$ を満たす頂点 v の集合から導かれる誘導部分グラフを構成
14. もしそのような誘導部分グラフにおいて頂点 a, b が連結でないなら yes を返して停止
15. no を返して停止

このアルゴリズムの時間計算量を検証する. 比較可能グラフ G' の推移的グラフは $O(\gamma|E|)$ 時間で求まる. ただし, γ は頂点の次数の最大値である. [4]

推移的グラフからできるだけレベルが小さくなるようにレベル付けするのは, $O(|E|)$ で行うことができる. できるだけレベルが大きくなるようにレベル付けするのも同様である.

残りの誘導部分グラフを求める操作や連結性の判定は $O(|E|)$ でできる.

したがって全体では $O(\gamma|E|)$ 時間で比較可能 +1e グラフの彩色問題を解ける.

定理 2 比較可能 +1e グラフの彩色問題は $O(\gamma|E|)$ 時間で解ける. ただし γ は頂点の次数の最大値である.

4 比較可能 +2e グラフの彩色問題

比較可能 +2e グラフを G, G のモジュレータを E_2 としたとき, G の彩色数 $\chi(G)$ は少なくとも $\chi(G - E_2)$ であり, また高々 $\chi(G - E_2) + 2$ である.

比較可能 +2e グラフ G の彩色問題の 2 つのパターンとして $\chi(G - E_2)$ 色彩色問題と $\chi(G - E_2) + 1$ 色彩色問題の NP 完全性を示す.

4.1 比較可能グラフと同じ彩色数での彩色可能性

3SAT から比較可能 +2e グラフ G (ただしクリーク数 $\omega(G - E_2) = 4$) の 4 色彩色問題への多項式時間の帰着を示す.

変数集合 $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ からなる CNF 論理式 $F = \prod_{i=1}^{n} C_i$ (ただし $C_i = c_{i1} + c_{i2} + c_{i3}$) に対して, 次のようなクリーク数 4 の比較可能グラフを作る.

1. まず, 頂点 a_1, a_2, a_3, a_4 を加え, 辺 $(a_1, a_2), (a_2, a_3),$

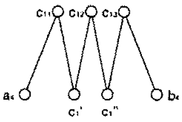

図 3　1 つの節に対してできるグラフ

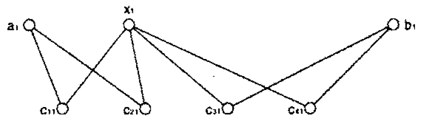

図 4　1 つの変数に対してできるグラフ (c_{11} = $c_{21} = x_1$, $c_{31} = c_{41} = \overline{x_1}$ の場合)

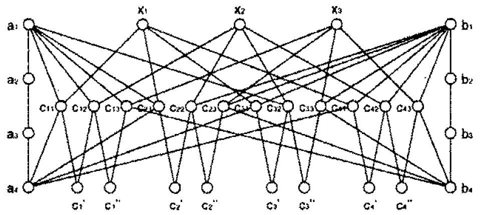

図 5　$(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3})(\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3})(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}) = 1$ から帰着される比較可能グラフ

(a_3, a_4) を加える.

2. 同様に, 頂点 b_1, b_2, b_3, b_4 を加え, 辺 (b_1, b_2), (b_2, b_3), (b_3, b_4) を加える.
3. 各節 C_i に対応して, 頂点 c'_i, c''_i を加える. ここで加えた頂点および頂点 a_4, b_4 を下の頂点と呼ぶ.
4. 各節 C_i のリテラル c_{i1}, c_{i2}, c_{i3} に対応して, それぞれ頂点 c_{i1}, c_{i2}, c_{i3} を加える. これらの頂点を中央の頂点と呼ぶ. また, リテラル c_{i1} に対応して辺 (a_1, c_{i1}), (c'_i, c_{i1}), リテラル c_{i2} に対応して辺 (c'_i, c_{i2}), (c''_i, c_{i2}), リテラル c_{i3} に対応して (c''_i, c_{i3}), (b_1, c_{i3}) を加える. (図 3)
5. 各変数 x_i に対応して, 頂点 x_i を加える. これらの頂点および頂点 a_1, b_1 を上の頂点と呼ぶ. 頂点 c_{jk} のうち変数 x_i の正のリテラルに対応するものについて, 辺 $(c_{jk}, a_1), (c_{jk}, x_i)$ を加える. また, 同様に頂点 c_{jk} のうち変数 x_i の負のリテラルに対応するものについて, 辺 $(c_{jk}, x_i), (c_{jk}, b_1)$ を加える. (図 4)

こうしてクリーク数 $\omega(G) = 4$ の比較可能グラフが得られ (図 5), これに, 頂点 a_1 と頂点 b_1, 頂点 a_4 と頂点 b_4 をそれぞれ異なる色で彩色する制約を加えたものが比較可能 +2e グラフ G に対応し, G の 4 色彩色問題が帰着によって得られる問題である.

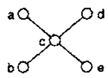

図 6　性質 3 のグラフ

さて, 最初に 1 つ重要な性質を見ておく.

性質 3 図 6 の (ハッセ図で描かれた) グラフにおいて, 頂点 a, b, d, e の 4 つの頂点を 3 色以下で彩色すれば, あと 1 色使って頂点 c を彩色し, 全体では 4 色で彩色可能である. また, 頂点 a, b, d, e の 4 つの頂点を 4 色で彩色すると, 頂点 c を彩色するためには 5 色必要になる.

この性質は, 頂点 c が他の 4 つの頂点すべてに隣接していることを考えれば明らかである.

帰着の正当性を示すために, まずは CNF 論理式 F が充足可能であるとき, 比較可能 +2e グラフが 4 色で彩色可能であることを示す.

まず, CNF 論理式 F が充足可能であると仮定する. 一般性を失わずに頂点 a_1, a_2, a_3, a_4 をそれぞれ色 $1, 2, 3, 4$ で彩色する. 最終的に頂点 b_1 を色 1 以外の色で, 頂点 b_4 を色 4 以外の色で矛盾なく彩色できることを示す. ここでの彩色の方針は, 頂点 a_1, a_2, a_3, a_4 をそれぞれ色 $1, 2, 3, 4$ で, 頂点 b_1, b_2, b_3, b_4 をそれぞれ色 $2, 1, 4, 3$ で, 頂点 x_i を色 1 または 2 で, 頂点 c'_i, c''_i を色 3 または 4 で彩色する. 頂点 c_{ij} を色 $1, 2, 3, 4$ のいずれかで彩色する.

まず最初に, 頂点 c'_i, c''_i を次の方針で彩色する. F を充足する変数割り当てを考えると, 節 C_i において充足するリテラルが 1 つ以上ある. 充足するリテラルのうちの 1 つを c_{ij} とする. ここで, $j = 1$ のとき, 頂点 c'_i, c''_i, b_4 を色 3 で彩色する. $j = 2$ のとき, 頂点 c'_i を色 4 で, 頂点 c''_i, b_4 を色 3 で彩色する. $j = 3$ のとき, 頂点 c'_i, c''_i を色 4 で, 頂点 b_4 を色 3 で彩色する. つまり, 充足するリテラルに対応する頂点 c_{ij} より頂点 a_1 側の頂点 c'_i, c''_i を色 4 で, b_4 側の頂点 c'_i, c''_i を色 3 で彩色するといえる.

次に, 頂点 x_i を次の方針で彩色する. 変数 x_i に対して, x_i または $\overline{x_i}$ のどちらかは充足するリテラルである. ここで, x_i が充足するリテラルのとき, 頂点 x_i を色 1 で彩色する. 一方, $\overline{x_i}$ が充足するリテラルのとき, 頂点 x_i を色 2 で彩色する. そして頂点 b_1 を色 2 で彩色する. また, 頂点 b_2, b_3 をそれぞれ色 1, 4 で彩色する.

ここまでは矛盾なく彩色できることは明らかである. 最後に頂点 c_{ij} を矛盾なく彩色できることを示す.

頂点 c_{ij} と隣接している頂点は 4 つある. 頂点 c_{ij} に対応するリテラルが充足するとき, 上の頂点のうち, 頂点 c_{ij} に隣接する 2 頂点はすでに同じ色で彩色されている. したがって, 性質 3 より頂点 c_{ij} は矛盾なく彩色できる.

一方, 頂点 c_{ij} に対応するリテラルが充足しないとき, 下

の頂点のうち, 頂点 c_{ij} に隣接する 2 頂点はすでに同じ色で彩色されている. したがって, 性質 3 より頂点 c_{ij} は矛盾なく彩色できる.

以上で, 帰着により得られた比較可能 +2e グラフを矛盾なく 4 色で彩色できた.

今度は, この比較可能 +2e グラフを 4 色で彩色できるとき, CNF 論理式は充足可能であることを示す.

頂点 a_1 と b_1 は異なる色で彩色する必要がある. すると, 頂点 a_1, x_i, b_1 はすべて同じ色で彩色されているわけではないので, 頂点 a_1 と x_i の組, もしくは頂点 x_i と b_1 の組のうち, 少なくとも一方の組はお互いに異なる色で彩色され, 両方同時に同じ色で彩色されることはない. ここで, 前者が同じ色で彩色されている場合, CNF 論理式の変数 x_i に 1 を割り当て, リテラル x_i が充足するようにする. 前者が同じ色で彩色されている場合, CNF 論理式の変数 x_i に 0 を割り当て, リテラル $\overline{x_i}$ が充足するようにする. どちらも異なる色で彩色されている場合, 変数 x_i にどちらか一方の値を任意に割り当てる.

この変数の割り当ては CNF 論理式を充足させる. なぜなら, 下の頂点の列 a_4, c_i', c_i'', b_4 において, 頂点 a_4, b_4 を異なる色で彩色する必要があるので, この列の a_4 と c_i', c_i' と c_i'', c_i'' と b_4 の組のうち少なくとも 1 つの組において, お互い異なる色で彩色されているものがある. もし a_4 と c_i' が異なる色で彩色されているなら, 性質 3 より頂点 c_{i1} と隣接した上の頂点は同じ色で彩色されているはずである. したがって, 頂点 c_{i1} に対応するリテラルは, 最初の変数の割り当ての方針に従うと充足することになる. 同様に c_i' と c_i'' が異なる色で彩色されているなら, 頂点 c_{i2} に対応するリテラルが充足し, c_i'' と b_4 が異なる色で彩色されているなら, 頂点 c_{i3} に対応するリテラルが充足する. 結局, 節 C_i において必ずどれか 1 つのリテラルは充足し, これが任意の節に対して成り立つので, CNF 論理式 F は充足する.

最後に, この帰着の時間計算量を見てみよう. まず, 頂点についてはリテラルの数および変数の数にそれぞれ対応した頂点をそれぞの数に比例する数だけ加えるだけである. また, 辺については各リテラルがどの変数に対応しているか調べて加えるだけなので, 多項式時間で辺を加えることができる. したがって, この帰着は多項式時間で行える.

定理 4 比較可能 +2e グラフ G の $\chi(G-E_2)$ 色彩色問題は NP 完全である.

4.2 比較可能グラフの彩色数 +1 色での彩色可能性

3SAT から比較可能 +2e グラフ G (ただし $\omega(G-E_2)=4$) の 5 色彩色問題への多項式時間の帰着を示す.

変数集合 $X=\{x_1,\ldots,x_m\}$ からなる CNF 論理式 $F=\prod_{i=1}^{n} C_i$ (ただし $C_i=c_{i1}+c_{i2}+c_{i3}$) に対して, 次のようなクリーク数 4 の比較可能グラフを作る.

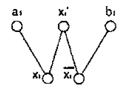

図 7 各変数 x_i に対応する頂点と辺

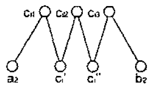

図 8 各節に対応する頂点と辺

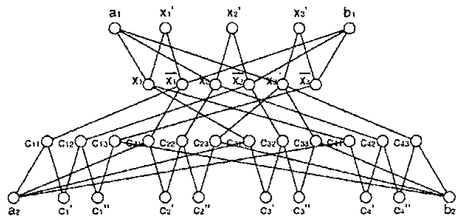

図 9 $(x_1+x_2+x_3)(x_1+\overline{x_2}+\overline{x_3})(\overline{x_1}+x_2+\overline{x_3})(\overline{x_1}+\overline{x_2}+\overline{x_3})=1$ から帰着される比較可能グラフ

1. 頂点 a_1, a_2, b_1, b_2 を加える.
2. 変数 x_i に対して, 頂点 $x_1, \overline{x_1}, x_1'$ を加え, 辺 (a_1, x_1), (x_1', x_1), $(x_1', \overline{x_1})$, $(b_1, \overline{x_1})$ を加える. 頂点 x_1 が正のリテラル x_1 に, 頂点 $\overline{x_1}$ が負のリテラル $\overline{x_1}$ にそれぞれ対応する. (図 7)
3. 節 C_i に対して, 頂点 c_{i1}, c_{i2}, c_{i3}, c_1', c_1'' を加え, 辺 (c_{i1}, a_2), (c_{i1}, c_i'), (c_{i2}, c_i'), (c_{i2}, c_i''), (c_{i3}, c_i''), (c_{i3}, b_2) を加える. 頂点 c_{i1}, c_{i2}, c_{i3} が CNF 論理式の各リテラル c_{i1}, c_{i2}, c_{i3} にそれぞれ対応する. (図 8)
4. CNF 論理式のリテラル c_{ij} が正のリテラル x_k のとき, 辺 $(\overline{x_k}, c_{ij})$ を加える. また, CNF 論理式の各リテラル c_{ij} が負のリテラル $\overline{x_k}$ のとき, 辺 (x_k, c_{ij}) を加える. ちょうど, CNF 論理式の各リテラル c_{ij} とリテラル x_i または $\overline{x_i}$ が矛盾する (つまり同時に充足できない) とき, お互いの頂点の間に辺を加えることになる.

こうしてクリーク数 $\omega(G)=4$ の比較可能グラフが得られ (図 9), これに, 頂点 a_1 と頂点 b_1, 頂点 a_2 と頂点 b_2 をそれぞれ異なる色で彩色する制約を加えたものが比較可能 +2e グラフ G に対応し, G の 5 色彩色問題が帰着により得られる問題である.

まず, CNF 論理式 F が充足可能なとき, 比較可能 +2e グラフが 5 色で彩色可能であることを示す.

頂点 a_1, a_2, b_1, b_2 をそれぞれ色 1, 4, 2, 3 で彩色する.

F を充足する割り当てにおいて 1 となる変数 x_i に対して，頂点 x_i を色 5 で彩色し，頂点 x_i' を色 2 で，頂点 $\overline{x_i}$ を色 1 で彩色する．また，F を充足する割り当てにおいて 0 となる変数 x_i に対して，頂点 $\overline{x_i}$ を色 5 で彩色し，頂点 x_i' を色 1 で，頂点 x_i を色 2 で彩色する．

節 C_i に対して，リテラル c_{i1}, c_{i2}, c_{i3} のうち少なくとも 1 つは充足する．充足するリテラルのうち 1 つを c_{ij} とする．もし $j=1$ なら，頂点 c_{i1} を色 5 で彩色し，$c_i', c_{i2}, c_i'', c_{i3}$ をそれぞれ色 3, 4, 3, 4 で彩色する．もし $j=2$ なら，頂点 c_{i2} を色 5 で彩色し，$c_{i1}, c_i', c_i'', c_{i3}$ をそれぞれ色 3, 4, 3, 4 で彩色する．もし $j=3$ なら，頂点 c_{i3} を色 5 で彩色し，$c_{i1}, c_i', c_{i2}, c_i''$ をそれぞれ色 3, 4, 3, 4 で彩色する．

このような彩色は正しい彩色である．色 1, 2、3, 4 については矛盾なく彩色された．色 5 については，頂点 $x_i, \overline{x_i}$, c_{jk} にのみ彩色してあり，それぞれ充足するリテラルに対応する頂点にのみ色 5 で彩色してあるが，頂点 $x_i, \overline{x_i}$ と頂点 c_{jk} の間には，同時に充足できない関係にあるリテラルに対応する頂点間にしか辺が存在しないため，色 5 も矛盾なく彩色できている．よって，比較可能 +2e グラフを 5 色で彩色できた．

次に，比較可能 +2e グラフが 5 色で彩色可能であるとき、F は充足可能であることを示す．

頂点 a_1 と頂点 b_1 は隣接しているので，異なる色で彩色する必要がある．すると，各 i に対して，頂点 a_1 と頂点 x_i'，もしくは頂点 x_i' と頂点 b_1 のどちらかがお互い異なる色で彩色する必要がある．もし頂点 a_1 と頂点 x_i' がお互い異なる色で彩色するならば，F において変数 x_i に 1 を割り当てる．つまり，リテラル x_i が充足するようにする．このとき，頂点 a_1 と頂点 x_i' および頂点 x_i の 3 つの頂点は 3 色の異なる色で彩色されていることに注意する．一方もし頂点 x_i' と頂点 b_1 が異なる色で彩色するならば，F において変数 x_i を 0 に割り当てる．つまり，リテラル $\overline{x_i}$ が充足するようにする．このとき，頂点 x_i' と頂点 b_1 および頂点 $\overline{x_i}$ の 3 つの頂点は 3 色の異なる色で彩色されていることに注意する．

また，頂点 a_2 と 頂点 b_2 は隣接しているので，異なる色で彩色する必要がある．すると，各 i に対して，頂点 a_2 と c_i' の組，c_i' と c_i'' の組，c_i'' と b_2 の組の 3 つの組のうち，少なくともどれか 1 組はお互い異なる色で彩色する必要がある．すると，やはり頂点 a_2 と c_{i1} と c_i' の組，頂点 c_i' と c_{i2} と c_i'' の組，頂点 c_i'' と c_{i3} と b_2 の組のうち，どれか 1 組は 3 頂点を彩色するのに 3 色使われている．

ここで，頂点 x_i または頂点 $\overline{x_i}$ を含む 3 頂点と，頂点 c_{jk} を含む 3 頂点がそれぞれ 3 色で彩色されていると仮定する．すると，頂点 x_i または頂点 $\overline{x_i}$ と，頂点 c_{jk} の間には辺は存在しない．なぜなら，もしそのような辺が存在したら，5 色では彩色できずに 6 色必要になるからである．

よって，頂点 c_{jk} を含む 3 頂点が 3 色で彩色されると，頂点 c_{jk} に対応するリテラル c_{jk} は充足する．なぜなら，そういう頂点 c_{jk} はリテラル c_{jk} と同じリテラルの頂点 x_i あるいは $\overline{x_i}$ との間に辺がない．そしてそのリテラルが充足するように割り当てたので，リテラル c_{ij} も充足する．したがって，F の各節に 1 つ以上充足するリテラルがあり F は充足する．

最後に，この帰着は多項式時間で行うことができる．なぜなら，頂点については各変数と節，リテラルに対応した頂点をそれぞれに比例した数だけ加えるだけであり，辺については各変数やリテラルそれぞれに対応した辺と，各リテラルにどの変数が対応してるかを表す辺を加えるだけだからである．

定理 5 比較可能 +2e グラフ G の $\chi(G-E_2)+1$ 色彩色問題は NP 完全である．

また，定理 4，定理 5 のどちらからでも次の系が導かれる．

系 6 比較可能 +ke グラフの彩色問題は $k \geq 2$ のとき NP 完全である．

5 まとめと今後の課題

比較可能 +1e グラフの彩色問題の計算量は比較可能グラフの推移的グラフを求める部分の計算量に依存していた．また，すでに知られている比較可能グラフの彩色問題の計算量も同様である．このように，彩色問題に関しては比較可能 +1e グラフも比較可能グラフも同じ時間で解けるものの，比較可能 +2e グラフでは NP 完全になることが分かった．

一方で，比較可能-ke グラフの彩色問題，つまり比較可能グラフから辺を k 本削除したグラフ族の彩色問題の計算量が明らかにされていない．

参考文献

[1] R.G. Downer, M.R. Fellows, “Parameterized complexity”, Springer-Verlag New York, 1997.

[2] Leizhen Cai, “Parameterized complexity of vertex colouring”, Discrete Applied Mathematics, 127, No.3, 415-429, 2003.

[3] Grotschel, M., Lovasz, L. and Schrijver, A., “Polynomial algorithms for perfect graphs.”, Ann. Discr. Math., 21, 325-356, 1984.

[4] Martin Charles Golumbic, “Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs”, Annals of Discrete Mathematics 57, Elsevier, 2nd edition, 2004.