数理解析研究所講究録 1426 巻 2005 年 189-193

文字列のシフトにより得られるダイグラフについて

On digraphs obtained by shift operation

田中 勇樹， 柴田 幸夫
Yuuki TANAKA , Yukio SHIBATA

群馬大学工学部情報工学科
Department of Computer Science, Gunma University
E-mail:{tanaka,shibata}@msc.cs.gunma-u.ac.jp

概要

文字列を頂点とし，文字列の操作により隣接関係を定義するダイグラフは，大規模相互結合網に適した性質をいくつか持つ．それらの中でも有名なものとして de Bruijn ダイグラフ，Kautz ダイグラフが挙げられる．本稿では，文字列のシフト演算を隣接関係とする新たなダイグラフのクラスを定義し，その性質について述べる．

1 はじめに

大型並列計算機網を構築するにあたり，相互結合をグラフあるいは有向グラフを用いてモデル化することは，数学的な解析が可能になり，またその上で実行させる並列アルゴリズムの設計などもより簡潔に記述することができる．逆に，既存のグラフのクラスを用いて相互結合網を構築することは，グラフとしての既知の性質を相互結合網の性質へ転換することが可能であり，相互結合網上で実行する並列アルゴリズムに適したグラフを選択することで，より効率よく計算を行うことが可能となる．

文字列を頂点，文字列の操作を隣接関係とするダイグラフは，対称性が高く，かつ直径と最大次数が与えられているとき，より多くの頂点を持つダイグラフを構成しやすいことから，様々なダイグラフのクラスが提案されており，研究も盛んである[2][3][5]．

本稿では頂点を文字列，有向辺集合を文字列のシフトにより定義するダイグラフのクラスを与え，相互結合網への応用を考える上で重要なダイグラフの対称性と直径についての結果を与える．

2 諸定義

ダイグラフ G の頂点集合を $V(G)$ で表し，有向辺集合を $A(G)$ で表す．

ダイグラフ G の**自己同型写像**とは，G から G への同型写像である．即ち G の自己同型写像は G 上の隣接関係を保存する G の頂点集合上の置換である．自己同型写像の集合は写像の合成を演算として群を成す．これを G の**自己同型写像群**と呼び，$\mathrm{Aut}\,G$ で表す．ダイグラフ G の 2 頂点 u,v に対し，$\phi(u)=v$ なる自己同型写像が存在するならば G は *vertex transitive* であると言う．

ダイグラフ $G=(V(G),A(G))$ に対し，G のラインダイグラフ $L(G)$ とは，頂点集合として $A(G)$ を持ち，$L(G)$ の 2 頂点 (u,v), (x,y) が隣接するための必要十分条件は $v=x$ となることである．

3 文字列のシフトにより得られるダイグラフ

n 進 k 桁 de Bruijn ダイグラフ $B(n,k)$ は，頂点集合として n 種類の文字からの長さ k の全ての

文字列を持ち，頂点 $u = u_0u_1\cdots u_{k-1}$ から $v = v_0v_1\cdots v_{k-1}$ へ隣接するための必要十分条件は $0 \leq i \leq k-2$ なる i に対し $v_i = u_{i+1}$ となることである．

n 進 k 桁 Kautz ダイグラフ $K(n,k)$ は，頂点集合として $n+1$ 種類の文字からの長さ k の，隣接する文字は異なる文字列を持ち，頂点 $u = u_0u_1\cdots u_{k-1}$ から $v = v_0v_1\cdots v_{k-1}$ へ隣接するための必要十分条件は $0 \leq i \leq k-2$ なる i に対し $v_i = u_{i+1}$ となることである．図 1 に de Bruijn ダイグラフ $B(2,3)$ を，図 2 に Kautz ダイグラフ $K(2,3)$ をそれぞれ示す．

[1] n 進 k 桁 P ダイグラフ $P(n,k)$ は頂点集合として集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ 上の長さ k の全ての順列を持ち，頂点 $x = x_0x_1\cdots x_{k-1}$ は，$x_1x_2\cdots x_{k-1}y$ であるような順列の頂点へ隣接する．ここで $y \neq x_0, x_1 \ldots x_{k-1}$ である．

Brunat ら [1] は，このダイグラフの頂点集合を順列の集合という観点から定義し，ダイグラフの定義を行った．我々はこの頂点集合を “長さが k であり，全ての文字が異なる文字列”，隣接関係を “文字列のシフト” として捉え，de Bruijn ダイグラフや Kautz ダイグラフ，P ダイグラフのクラスを包含する，より一般化したクラスを Letter shift ダイグラフとして定義する．

定義 1 n,k,d を $n-1 > d, k \geq d \geq 0, k > 0$ なる整数とする．*Letter shift* **ダイグラフ** $LS(n,k,d)$ は，頂点集合として n 種類の文字からなる長さ k の文字列の中で，長さ $d+1$ の任意の部分列中に存在する文字が全て異なる文字列集合であり，頂点 $u = u_0u_1\cdots u_{k-1}$ から頂点 $v = v_0v_1\cdots v_{k-1}$ へ有向辺が存在するための必要十分条件は，$0 \leq i \leq k-1$ なる i に対し，$v_i = u_{i+1}$ が成り立つことである．

$LS(n,k,d)$ の頂点数は $n(n-1)(n-2)\cdots(n-(d-1))(n-d)^{k-d}$ であり，辺数は $n(n-1)(n-2)\cdots(n-(d-1))(n-d)^{k-d+1}$ である．また，$n-d$ 正則である．例として $LS(4,2,1)$ を図 3 に示す．

次の 3 つの命題は Letter shift ダイグラフの定義から明らかである．

命題 1 1. $B(n,k) \cong LS(n,k,0)$,

2. $K(n,k) \cong LS(n+1,k,1)$,

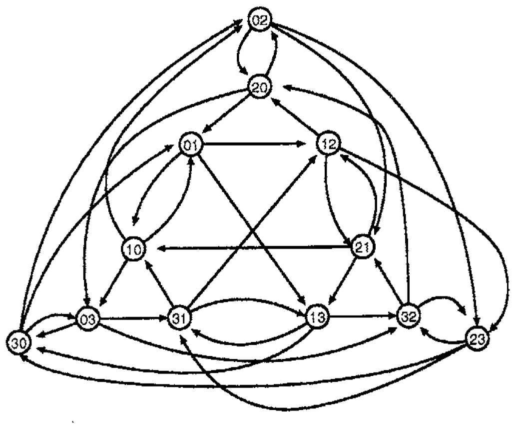

図 3: Letter shift ダイグラフ $LS(4,2,1)$

3. $P(n,k) \cong LS(n,k,k)$.

de Bruijn ダイグラフや Kautz ダイグラフは文字列とそのシフトという定義の他に，ラインダイグラフ演算を用いた定義も与えられている．Shift letter ダイグラフに関しても同様の性質が成り立つ．

定理 1

$$LS(n,k+1,d) \cong L(LS(n,k,d)).$$

証明: $LS(n,k+1,d)$ の頂点集合から $L(LS(n,k,d))$ の頂点集合への写像 f を次のように定義する．

$$f : x_0x_1\cdots x_{k-1}x_k \rightarrow (x_0x_1\cdots x_{k-1}, x_1\cdots x_k)$$

2 つのダイグラフの定義から，この写像は全単射である．$LS(n,k+1,d)$ 上の頂点対 $(X_0,X_1) = (x_0\cdots x_k, x_1\cdots x_{k+1})$ は関数 f により頂点対 $(f(X_0),f(X_1)) = ((x_0\cdots x_{k-1},x_1\cdots x_k),(x_1\cdots x_k,x_2\cdots x_{k+1}))$ へ写像される．$LS(n,k+1,d)$ 上で X_0 は X_1 へ隣接しており，かつ $L(LS(n,k,d))$ 上で $f(X_0)$ は $f(X_1)$ へ隣接している．よって，f は隣接関係を保存する写像である．辺集合の濃度は同じなので非隣接関係も保存され，f は同型写像となり，2 つのダイグラフは同型である． □

上の定理から次の系が導ける．

系 1 $d \geq 1$ のとき，

$$LS(n,k,d) \cong L^{k-d}(P(n,d)).$$

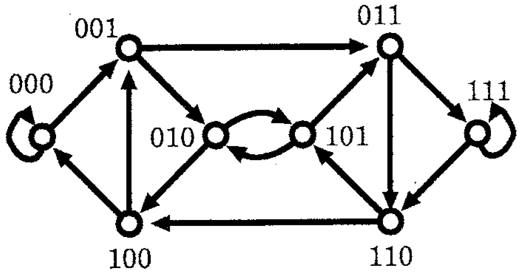

図 1: de Bruijn ダイグラフ $B(2,3)$

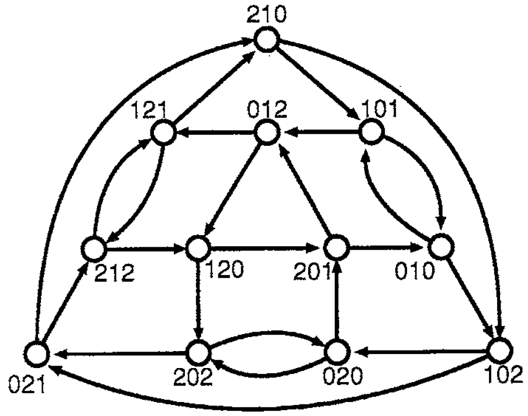

図 2: Kautz ダイグラフ $K(2,3)$

このことから，Letter shift ダイグラフの性質を調べるには，P ダイグラフの性質，およびラインダイグラフ演算による性質の変化に着目することが重要である．

4　自己同型写像群

自己同型写像群とラインダイグラフ演算の関係について Hemminger ら [7] により次の性質が与えられている．

補題 1 Hemminger et al.[7]

$$\mathrm{Aut}\, D \cong \mathrm{Aut}\, L(D).$$

また，Brunat ら [1] により $P(n,k)$ の自己同型写像群は S_n であると与えられていることから，次の定理が容易に導ける．

定理 2

$$\mathrm{Aut}\, LS(n,k,d) \cong S_n.$$

5　$LS(n,k,d)$ の直径

この節では $LS(n,k,d)$ の直径の上界について考察を行う．Brunat ら [1] は $n \geq 2k$ または $n=k+2$ のときの $P(n,k)$ の直径を与えている．

定理 3 Brunat et al.[1] $P(n,k)$ の直径は $n \geq 2k$ のとき $2k$ であり，$n=k+2$ のとき $1+\binom{k+1}{2}$ である．

本稿では $k+2<n<2k$ であるような n について，$P(n,k)$ の直径の上界を与える．

$P(n,k)$ の頂点集合に用いる文字の集合をここでは $\mathbb{Z}_n$ とする．つまり，任意の i に対して $x_i \in \mathbb{Z}_n$ である．$P(n,k)$ 上の頂点を $X = x_0x_1\cdots x_{k-1}$ と表し，$R = \{x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}\} = \mathbb{Z}_n \setminus \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}\}$ とする．特に，R の内容に注目するときは，頂点 X を

$$x_0x_1\cdots x_{k-1}\{x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}\}$$

と表す．

整数 $t \in \mathbb{Z}_n$ に対し，$t>k$ のとき $\overline{t}=k$ とし，それ以外のとき $\overline{t}=t$ とする．頂点 X の要素 x_i に対し，$\delta_j(x_i)$ を次のように定義する．

$$\delta_j(x_i) = \overline{x_i} - \left(\overline{i} - j \bmod k+1\right).$$

ここで，$0 \leq j \leq k$ である．また，頂点 X に対して $\Delta_j^-(X) = \{x_i | \delta_j(x_i) < 0\}$ と定義する．

補題 2 $P(n,k)$ の頂点 X に対し，$|\Delta_j^-(X)| \leq \frac{k}{2}$ なる j が少なくとも一つ存在する．

証明:　頂点 $X = x_0x_1\cdots x_{k-1}\{x_k, \ldots, x_{n-1}\}$ に対し，$x_i = 0$ となる i はちょうど 1 つである．つまり，$i=j$ のときのみ $\delta_j(x_i) \geq 0$ となり，j が i

と異なる k 個の場合では $\delta_j(x_i)<0$ となる．同様に $x_i=1$ であるような場合，$\delta_j(x_i)<0$ となる j の個数は $k-1$ であり，一般的に $x_i=s$ であるような場合，$\delta_j(x_i)<0$ となる j の個数は $k-\overline{s}$ となる．よって，

$$\sum_{j=0}^{k}|\Delta_j^-(x)|=k+(k-1)+\cdots+1=\frac{k(k+1)}{2}$$

となる．左辺は $k+1$ 個の $|\Delta_j^-(X)|$ の和なので，少なくとも一つは $k/2$ 以下になるものが存在する．□

$P(n,k)$ は vertex transitive である [1] ことから，任意の頂点から頂点 $I=012\cdots(k-1)$ へのウォークを与えることで直径の上界を示す．頂点 $X=x_0x_1\cdots x_{k-1}\{x_k,\ldots,x_{n-1}\}$ に対し，j を $0\le i\le n-1$ なる i に対し，$|\Delta_j^-(X)|\le|\Delta_i^-(X)|$ を満たすものの最小値とする．頂点 X が隣接する頂点に関して，次の補題が成り立つ．

補題 3 X を $P(n,k)$ の頂点とする．$1\le j\le k$ なる整数 j に対し，$|\Delta_j^-(X)|=|\Delta_0^-(Y)|$ である頂点 Y への長さ j のウォークが存在する．

証明: 補題 3 を示すためには，次の主張を複数回適用すれば良い．

Claim: X を $P(n,k)$ の頂点とする．$1\le j\le k$ なる整数 j に対し，$|\Delta_j^-(X)|=|\Delta_{j-1}^-(X')|$ である頂点 X' に隣接する．

Claim の証明: $P(n,k)$ 上の 2 頂点 X,X' を $X=x_0x_1\cdots x_{k-1}\{x_k,\ldots,x_{n-1}\}$, $X'=x'_0x'_1\cdots x'_{k-1}\{x'_k,\ldots,x'_{n-1}\}$ とし，$(X,X')\in A(P(n,k))$ とする．各 x_i に対しての対応は $x'_i=x_{i-1}$ である．ここで，添字の i は n を法とする整数である．x_k を $\{x_k,\ldots,x_{n-1}\}$ のうちで，$\delta_j(x_k) \bmod k+1$ の値が最も小さいものとする．つまり，$k\le s\le n-1$ なる s に対し，$\delta_j(x_k)\le\delta_j(x_s)\pmod{k+1}$ である．関数 δ の定義より，$\delta_{j-1}(x'_i)$ と $\delta_j(x_i)$ の間の関係は次のようになる．

$$\delta_{j-1}(x'_i)=\begin{cases}\delta_j(x_{i+1}) & \text{for } 0\le i\le k-1,\\ \delta_j(x_{i+1})-1 & \text{for } k\le i\le n-2,\\ \delta_j(x_0) & \text{for } i=n-1.\end{cases}$$

$|\Delta_j^-(X)|\ne|\Delta_{j-1}^-(X')|$ となるためには $\delta_j(x_t)=0$ となる x_t が $\{x_{k+1},\ldots,x_{n-1}\}$ に含まれる必要がある．$x_{k+1},\ldots,x_{n-1}$ に対して，$\delta_j(x_t)=0$ ならば $x_t=k-j$ である．一方，x_k の選び方は $k\le s\le n-1$ なる整数 s に対し $\delta_j(x_k) \bmod k+1$ の値が最も小さいものとしたので，$\overline{x_s}-(k-j)=0$ であるような x_l，即ち $k-j$ が存在するならば，それは x_k となる．$k-j$ は x_0 から x_{n-1} の中にちょうど 1 つしか存在しないため，$\{x_{k+1},\ldots,x_{n-1}\}$ に $k-j$ が存在すると仮定すると x_k の選び方に反する．ゆえに $|\Delta_j^-(X)|=|\Delta_{j-1}^-(X')|$ となる．□

以上に示した claim を $j=1$ になるまで繰り返し適用することで補題は成り立つ．□

補題 3 の証明で示した claim は，$j=0$ の場合に限り異なる．それを次の補題として示す．

補題 4 X を $P(n,k)$ 上の頂点とし，$R(X)$ を $R(X)=\{x_t|k<t\le n-1,\, x_t<k\}$ である集合とする．頂点 X は $|\Delta_k^-(Y)|=|\Delta_0^-(X)|-|R(X)|$ なる頂点 Y へ隣接する．

証明: $Y=y_0y_1\cdots y_{k-1}\{y_k,\ldots,y_{n-1}\}$ とし，$y_i=x_{i+1}$ とする．$k\le s\le n-1$ なる整数 s に対して $\delta_0(x_s)=0 \mod k+1$ となる値は k から $n-1$ の $n-k$ 個存在する．$\delta_0(y_i)$ と $\delta_k(x_{i+1})$ の関係は次のようになる．

$$\delta_k(y_i)=\begin{cases}\delta_0(x_{i+1}) & \text{for } 0\le i\le k-1\\ \overline{x_{i+1}}\ge 0 & \text{for } k\le i\le n-2\\ \delta_0(x_0) & \text{for } i=n-1\end{cases}$$

ここで，$R(X)$ に含まれる x_t は，$\delta_0(x_t)<0$ であるので，$\Delta_k^-(Y)$ の大きさはちょうど $R(X)$ の大きさだけ小さくなる．よって，頂点 X は $|\Delta_k^-(Y)|=|\Delta_0^-(X)|-|R(X)|$ なる頂点 Y へ隣接する．□

補題 3 から次の系が導ける．

系 2 $|\Delta_k^-(X)|=0$ ならば $d(X,I)=k$.

定理 4

$$\operatorname{diam}(P(n,k))\le k+(k+1)\left(1+\left\lceil\frac{k}{2(n-k-1)}\right\rceil\right).$$

証明: 補題3より，$|\Delta_j^-(X)| = |\Delta_0^-(Y_0)|$ となる頂点 Y_0 への長さ $j \le k$ のウォークを作ることができる．次に補題4から Y_0 は $|\Delta_k^-(Z_0)| = |\Delta_0^-(Y_0)| - |R(Y_0)|$ なる頂点 Z_0 に隣接する．$|\Delta_k^-(Z_0)| > n-k-1$ であれば，Z_0 から $|\Delta_k^-(Z_0)| = |\Delta_0^-(Y_1)|$ かつ $|R(Y_1)| \ge n-k-1$ なる頂点 Y_1 への長さ k のウォークが存在する．補題4から Y_1 は $|\Delta_k^-(Z_1)| = |\Delta_0^-(Y_1)| - (n-k-1)$ なる頂点 Z_1 に隣接する．以降繰り返すと，Z_i から Y_{i+1} への長さ k のウォーク上では $|\Delta^-|$ は変化せず，Y_{i+1} から Z_{i+1} への長さ1のウォークで $|\Delta^-|$ は高々 $n-k-1$ 減少する．よって Z_0 から長さ $(k+1)\lceil k/(2(n-k-1))\rceil$ のウォークにより $|\Delta_k^-(Z_j)| = 0$ となるような頂点 Z_j に到達できる．系2より，$d(Z_j, I) = k$ であるから，

$$\begin{aligned} d(X,I) &= j+1+(k+1)\left\lceil \frac{k}{2(n-k-1)} \right\rceil + k \\ &\le k+(k+1)\left(1+\left\lceil \frac{k}{2(n-k-1)} \right\rceil\right) \end{aligned}$$

となる． □

補題 5 Hemminger et al.[7] D が有向サイクルでないならば $\operatorname{diam} L(D) = \operatorname{diam} D + 1$.

定理 5 Letter shift ダイグラフ $LS(n,k,d)$ の直径は $d \ge 2$ に対して次の通りである．

$n = d+2$ のとき

$$\operatorname{diam}(LS(n,k,d)) = 1+k-d+\binom{d+1}{2},$$

$d+2 < n < 2d$ のとき，

$$\operatorname{diam}(LS(n,k,d)) \le k+(d+1)\left(1+\left\lceil \frac{d}{2(n-d-1)} \right\rceil\right),$$

$n \ge 2d$ のとき

$$\operatorname{diam}(LS(n,k,d)) = k+d.$$

6 まとめ

本稿では，頂点を文字列，有向辺集合を文字列のシフトにより定義するダイグラフのクラスを与え，その自己同型写像群を決定し，また直径の上界を与えた．

謝辞

本研究は，日本学術振興会科研費基盤研究（C）（2）No.16500006 の助成により遂行された．

参考文献

[1] J.M.Brunat, M.A.Fiol, M.L.Fiol, “Digraphs on permutations,” Discrete Mathematics 174, pp.73–86 (1997).

[2] F. Comellas, M. A. Fiol, “Vertex-symmetric digraphs with small diameter,” Discrete Applied Mathematics 58, pp.1–11 (1995).

[3] P. F. Corbett, “Rotator graphs: An efficient topology for point-to-point multiprocessor networks,” IEEE Trans. on Parallel and distributed systems, Vol 3, No.5, pp.622–626 (1992).

[4] N. G. de Bruijn, “A combinatorial problem,” Koninklije Nederlandse Academie van Wetenshappen Proc. 49, pp.758–764 (1946).

[5] V. Faber, J. W. Moore, W. Y. C. Chen, “Cycle prefix digraphs for symmetric interconnection networks,” Networks Vol.23, pp.641–649 (1993).

[6] J. Gómez, M. A. Fiol and J. L. A. Yebra, “Graphs on alphabets as models for large interconnection networks,” Discrete Applied Mathematics 37/38 pp. 227–243 (1992).

[7] R. L. Hemminger and W. B. Beineke, “Line graphs and line digraphs,” in: L. W. Beineke and R. J. Wilson, eds., Selected topics in graph theory I, Academic press, London, 1978.

[8] W. H. Kautz, “Bounds on directed (d,k) graphs,” Theory of cellular logic networks and machines, SRI Project 7258, AFCRL 68-0668 Final Report pp20–28 (1968).