

### 3 近傍可逆セルオートマトンについて

## Reversible Cellular Automata with Triplet Local Transition Rule

川原 敬弘 (Takahiro Kawahara)\*, 本多 和正 (Kazumasa Honda)\*,  
井口 修一 (Shuichi Inokuchi)†, 佐藤 達郎 (Tatsuro Sato)‡,  
河原 康雄 (Yasuo Kawahara)§

#### 1 はじめに

量子コンピューターの1つのモデルとして、量子セルオートマトンが提案され研究されている [1, 2, 3]. この量子セルオートマトンの状態は連続値をとるため、量子セルオートマトンの挙動を解析するのは難しい. そこで量子セルオートマトンの挙動を簡単に解析するために、量子セルオートマトンの離散化を考える. 量子セルオートマトンを離散化すると古典的なセルオートマトンになるが、古典的なセルオートマトンの全てが量子セルオートマトンと対応するわけではない. 量子コンピューターはユニタリ性に基づいており、ユニタリ性を離散化すると可逆性に対応する [3]. つまり、量子セルオートマトンを離散化すると可逆セルオートマトン [4] となり、その可逆セルオートマトンの挙動を解析することで対応する量子セルオートマトンの挙動が推測できる.

本研究では1次元2状態3近傍有限セルオートマトンのうち、可逆なものを探し出すことを目標とする. そのために、セルサイズ28まで計算機シミュレーションを行い、その結果に基づいての予測を述べる. 次に、その予測に理論的な証明を与えるためにセルオートマトンの遷移と対応するシフトオートマトン [5] を導入し、その受理言語について述べる.

なお、Wolfram の論文 [6] では、セルサイズが無限大の場合についても研究されているが、本研究では有限のセルサイズについてのみ扱う.

---

\* 九州大学大学院システム情報科学府 (Department of Informatics Kyushu University)

† 九州大学大学院数理学研究院 (Faculty Of Mathematics Kyushu University)

‡ 大分工業高等専門学校 (Oita National College of Technology)

§ 九州大学大学院システム情報科学研究院 (Department of Informatics Kyushu University)

## 2 3 近傍局所セルオートマトン

まず、本研究で扱うセルオートマトンを定義する。

**定義 1** 状態の集合  $Q = \{0, 1\}$ , セルサイズ  $n$ , 規則番号  $R$  ( $0 \leq R \leq 255$ ), 境界条件  $B$  である 1 次元 2 状態 3 近傍有限セルオートマトンを  $CA - R_B(n)$  と書き, それは  $Q^n$  上の遷移系である. その大域遷移関数  $\delta_{R,B} : Q^n \rightarrow Q^n$  は規則番号  $R$  に対応する 3 近傍局所遷移関数  $f_R : Q^3 \rightarrow Q$  を用いて以下のように与える.

$$\begin{aligned} & \delta_{R,B}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \\ &= (f_R(a, x_1, x_2), f_R(x_1, x_2, x_3), \dots, f_R(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n), f_R(x_{n-1}, x_n, b)). \end{aligned}$$

ここで, 規則番号  $R$  と局所遷移関数  $f_R$  の対応は次の通りである.

$$f_R(x, y, z) = r_{4x+2y+z}, \quad r_i \in Q \quad (i = 4x + 2y + z, 0 \leq i \leq 7),$$

$$R = \sum_{a,b,c \in \{0,1\}} 2^{4a+2b+c} r_{4a+2b+c}.$$

また, 大域遷移関数の定義における  $a, b \in Q$  を境界と呼び, 境界条件  $B$  により決定される. 本研究では境界条件  $B$  として以下のものを考える.

- |                                    |                                    |
|------------------------------------|------------------------------------|
| (i) 固定境界 ( $B = a - b$ 型)          | (ii) 周期境界 ( $B = *$ 型)             |
| $a, b \in Q$ を固定. (4 通り).          | $a = x_n, b = x_1$ . (1 通り).       |
| (iii) 自由境界 ( $B = * - *$ 型)        | (iv) 右側自由境界 ( $B = a - *$ 型)       |
| $a = x_1, b = x_n$ . (1 通り).       | $a \in Q$ を固定. $b = x_n$ . (2 通り). |
| (v) 左側自由境界 ( $B = * - b$ 型)        |                                    |
| $b \in Q$ を固定. $a = x_1$ . (2 通り). |                                    |

一般に, セルオートマトンが可逆であるとは, その大域遷移関数が全単射であることであるが, ここで扱うセルオートマトン  $CA - R_B(n)$  は有限であるため,  $CA - R_B(n)$  が可逆であることと, その大域遷移関数が単射 (あるいは, 全射) であることは同値となる. つまり,  $\delta_{R,B}(Q^n) = Q^n$  が成り立つとき,  $CA - R_B(n)$  は可逆となる.

## 3 計算機実験

セルオートマトン  $CA - R_B(n)$  が可逆である, つまり,  $\delta_{R,B}(Q^n) = Q^n$  を満たす規則番号  $R$  ( $R \geq 128$ ) を境界ごとにセルサイズ 1 から 28 まで計算機により求めた. その結果より 5 以上のセルサイズに対して, 以下のような規則性が予想される. ここで,  $k$  は自然数である. なお, 規則番号 170, 204, 240 が可逆となるのは自明である.

- 固定境界 ( $n \geq 5, k \geq 1$ )

$n$	規則番号				
$6k - 1$	153	195	204		
$6k, 6k + 4$	150	153	165	195	204
$6k + 1, 6k + 3$	150	153		195	204
$6k + 2$	153	165	195	204	

- 左側自由境界 ( $n \geq 5, k \geq 2$ )

$n$	規則番号			
$3k - 1, 3k$	150	153	165	204
$3k + 1$	153	165	204	

- 右側自由境界 ( $n \geq 5, k \geq 2$ )

$n$	規則番号			
$3k - 1, 3k$	150	165	195	204
$3k + 1$	165	195	204	

- 自由境界 ( $n \geq 5, k \geq 2$ )

$n$	規則番号	
$3k - 1, 3k + 1$	150	204
$3k$	204	

- 周期境界 ( $n \geq 5, k \geq 1$ )

$n$	規則番号								
$6k - 1, 6k + 1$	150	154	166	170	180	204	210	240	
$6k$				170			204	240	
$6k + 2, 6k + 4$	150				170	204			
$6k + 3$			154	166	170	180	204	210	240

#### 4 シフトオートマトン

前章での予想に理論的な証明を与えるためにシフトオートマトンを考え、その受理言語について述べる。ここで考えるシフトオートマトンは非決定性有限オートマトンである。

**定義 2** 局所遷移関数  $f_R$  に対し、シフト関係  $\tau_R : Q^3 \times Q^3 \rightarrow Q$  を次のように定義する。

$$\tau_R = \{xyz \xrightarrow{f_R(x,y,z)} yzw \mid x, y, z, w \in Q\}.$$

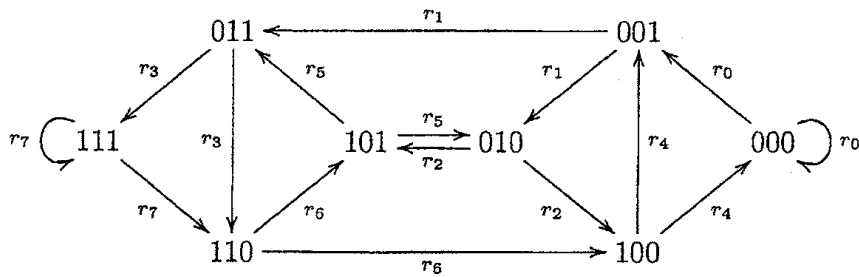


図1 シフトオートマトン

規則番号  $R$ , 境界条件  $B$  におけるシフトオートマトン  $M_R[S_B; F_B]$  を次のように定義する.

$$M_R[S_B; F_B] = (Q^3, \tau_R, S_B, F_B).$$

ここで,  $S_B$  は初期状態,  $F_B$  は受理状態であり, それぞれ次のように定義される.

$$S_B = \begin{cases} \{axy|x, y \in Q\} & (B = a - b, a - *) \\ \{abx|x \in Q\} & (B = *) \\ \{aax|x \in Q\} & (B = * - *, * - b) \end{cases}$$

$$F_B = \begin{cases} \{xbb|x \in Q\} & (B = a - b, * - b) \\ \{abb\} & (B = *) \\ \{bbb\} & (B = * - *, a - *) \end{cases}$$

シフトオートマトン  $M_R[S_B; F_B]$  をグラフで表現すると, 図1のようになる.

また, 入力:  $xyzw \dots$  に対し, シフトオートマトン  $M_R[S_B; F_B]$  の遷移:  $xyz \xrightarrow{f_R(x,y,z)}$   
 $yzw \xrightarrow{f_R(y,z,w)}$  ... を考える. このとき,  $f_R(x,y,z)f_R(y,z,w) \dots$  をシフトオートマトン  
 $M_R[S_B; F_B]$  の受理語といい, その受理言語を  $L(M_R[S_B; F_B])$  で表す.

セルオートマトンとシフトオートマトンについて次が言える.

**補題 1** 規則番号  $R$  と境界条件  $B$  に対して, セルオートマトンの大域遷移関数とシフトオートマトンの受理言語の間には, 次の等式が成り立つ.

$$\delta_{R,B}(Q^n) = L(M_R[S_B; F_B]) \cap Q^n.$$

**証明.** 固定境界の場合を証明する. まず,  $\tau_R$  の定義より任意の  $w \in Q$  に対し,  $a = f_R(x, y, z)$  と  $xyz \xrightarrow{a} yzw \in \tau_R$  は同値である.

$$\begin{aligned} & (y_1, y_2, \dots, y_n) = \delta_{R, a-b}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \Leftrightarrow & y_1 = f_R(a, x_1, x_2), y_2 = f_R(x_1, x_2, x_3), \dots, y_n = f_R(x_{n-1}, x_n, b) \\ \Leftrightarrow & ax_1x_2 \xrightarrow{y_1} x_1x_2x_3 \in \tau_R, x_1x_2x_3 \xrightarrow{y_2} x_2x_3x_4 \in \tau_R, \dots, x_{n-1}x_nb \xrightarrow{y_n} x_nb \in \tau_R \\ \Leftrightarrow & y_1y_2 \dots y_n \in L(M_R[a-; -bb]). \end{aligned}$$

他の境界に対しても同様にして証明ができる。 □

補題 1 より, 以下の同値性が示される。

定理 1  $CA - R_B(n)$  に対して以下は同値である。

- $L(M_R[S_B; F_B]) \cap Q^n = Q^n$ .
- $CA - R_B(n)$  が可逆.

シフトオートマトンを用いて可逆性が解析できる根拠となるのがこの定理である。

次に  $L(M_R[S_B; F_B])$  を実際に求める。以降は,  $xyz \in Q^3$  と  $4x + 2y + z = i$  を同一視することとする。  $s_i$  を次のように定義する。

$$s_i = \begin{cases} \varepsilon & (i \in S_B) \\ \phi & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

初期状態  $S$  から状態  $i \in Q^3$  で受理されたときの受理言語を  $X_i$  と書く。このとき, 各  $X_i$  に対して以下が成り立つ。

$$X_0 = X_0r_0 + X_4r_4 + s_0, \quad X_1 = X_0r_0 + X_4r_4 + s_1$$

$$X_2 = X_1r_1 + X_5r_5 + s_2, \quad X_3 = X_1r_1 + X_5r_5 + s_3$$

$$X_4 = X_2r_2 + X_6r_6 + s_4, \quad X_5 = X_2r_2 + X_6r_6 + s_5$$

$$X_6 = X_3r_3 + X_7r_7 + s_6, \quad X_7 = X_3r_3 + X_7r_7 + s_7$$

ここで,  $t = 0, 1, 2, 3$  に対し  $s_{2t} = s_{2t+1}$  が成り立つとすると, 上の式から  $X_{2t} = X_{2t+1}$  が成り立ち, 次のように変形できる。なお, 今回扱う各境界型は  $s_{2t} = s_{2t+1}$  を満たしている。

$$X_0 = X_1 = X_0r_0 + X_4r_4 + s_0, \quad X_2 = X_3 = X_0r_1 + X_4r_5 + s_2$$

$$X_4 = X_5 = X_2r_2 + X_6r_6 + s_4, \quad X_6 = X_7 = X_2r_3 + X_6r_7 + s_6$$

以上を計算することによって, それぞれの境界条件での受理言語は以下のように表せる。ここで,  $A_0 = r_4r_0^*r_1 + r_5, A_7 = r_3r_7^*r_6 + r_2$  とする。

- 0-0 境界型  
 $(r_0^*r_1 + \varepsilon)(A_7A_0)^*A_7(r_4r_0^* + \varepsilon) + r_0^*$
- 0-1 境界型  
 $(r_0^*r_1 + \varepsilon)(A_7A_0)^*(r_3r_7^* + \varepsilon)$
- 1-0 境界型  
 $(r_7^*r_6 + \varepsilon)(A_0A_7)^*(r_4r_0^* + \varepsilon)$

- 1 - 1 境界型  
 $(r_7^* r_6 + \varepsilon)(A_0 A_7)^* A_0 (r_3 r_7^* + \varepsilon) + r_7^*$
- 0 -  $x_n$  境界型  
 $(r_0^* r_1 + \varepsilon)(A_7 A_0)^* (A_7 r_4 r_0^* + r_3 r_7^*) + r_0^*$
- 1 -  $x_n$  境界型  
 $(r_7^* r_6 + \varepsilon)(A_0 A_7)^* (A_0 r_3 r_7^* + r_4 r_0^*) + r_7^*$
- $x_1 - 0$  境界型  
 $r_7^* r_6 (A_0 A_7)^* (r_4 r_0^* + \varepsilon) + r_0^* r_1 (A_7 A_0)^* A_7 (r_4 r_0^* + \varepsilon) + r_0^*$
- $x_1 - 1$  境界型  
 $r_0^* r_1 (A_7 A_0)^* (r_3 r_7^* + \varepsilon) + r_7^* r_6 (A_0 A_7)^* A_0 (r_3 r_7^* + \varepsilon) + r_7^*$
- $x_1 - x_n$  境界型  
 $r_0^* r_1 (A_7 A_0)^* (A_7 r_4 r_0^* + r_3 r_7^*) + r_7^* r_6 (A_0 A_7)^* (A_0 r_3 r_7^* + r_4 r_0^*) + r_0^* + r_7^*$
- 周期境界型  
 $r_0^* r_1 A_7 (A_0 A_7)^* r_4 r_0^* + r_7^* r_6 A_0 (A_7 A_0)^* r_3 r_7^* + (A_0 A_7)^* + (A_7 A_0)^* + r_0^* + r_7^*$

## 5 まとめ

計算機の実験により、可逆セルオートマトンをセルサイズ 28 まで求め、一般のセルサイズに対して可逆になるセルオートマトンの予想を立てた。また、シフトオートマトンを与え、その受理言語とセルオートマトンの可逆性の関係を示した。今後の課題は、シフトオートマトンを使って予想に理論的な証明を与えることである。

## 参考文献

- [1] S. Inokuchi & Y. Mizoguchi, Generalized partitioned quantum cellular automata and quantization of classical CA, *Journal of Unconventional Computing* (to appear).
- [2] W. van Dam: A Universal Quantum Cellular Automaton, *Proceedings of the Fourth Workshop on Physics and Computation*, pp. 323-331, 1996.
- [3] J. Watrous: On One-Dimensional Quantum Cellular Automata, *Proceedings of the 36th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pp.528-537, 1995.
- [4] 森田 憲一, 可逆セルオートマトン, *情報処理*, 35, pp.315-321, 1994
- [5] H. Sato, T. Nishi and N. Takahashi, One-dimensional Discrete-time Binary Cellular Neural Networks and Some examples for Signal Processing, *Research Reports on I.S.E.E. of Kyushu Univ.*, Vol.7, No.2, pp.93-98, 2002
- [6] S. Wolfram, *A New Kind of Science*, Wolfram Media Inc, 2002