数理解析研究所講究録 1427 巻 2005 年 1-10

バナッハ空間の凸性と ψ-直和について

新潟大自然科学 三谷 健一 (Ken-ichi Mitani)
新潟大理 斎藤 吉助 (Kichi-Suke Saito)

1 序文

バナッハ空間の幾何学の構造研究は1930年代の Clarkson[4] による一様凸性の導入が発端とされる.

定義 1.1 ([4]). バナッハ空間 X が一様凸であるとは, 任意の ε $(0<\varepsilon\leq 2)$ に対して $0<\delta<1$ が定まり, $\|x\|\leq 1$, $\|y\|\leq 1$, $\|x-y\|\geq\varepsilon$ を満たす X の任意の元 x, y に対して,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|\leq 1-\delta$$

が成り立つことである.

この中で Clarkson は L_p 空間の一様凸性を示した. さらに, バナッハ空間上の中線定理の成立たなさを定量的に考え, 次の von Neumann-Jordan 定数を導入した.

定義 1.2. X をバナッハ空間とする. このとき,

$$\frac{1}{C}\leq\frac{\|x+y\|^2+\|x-y\|^2}{2(\|x\|^2+\|y\|^2)}\leq C\qquad\forall(x,y)\neq(0,0)$$

をみたす C の最小値を X の *von Neumann-Jordan* 定数 $C_{\rm NJ}(X)$ と言う.

このような幾何学的性質の多くはその空間のノルム（距離）に依存し, 例え有限次元空間であってもノルムによって, 性質が大いに異なる. 例えば, 平面（2次元）において, 単位球を考えると通常, 円形になるが, ℓ_1, ℓ_∞ ノルムの場合, 球が真四角やダイヤのような形になるように, 同じ空間であってもノルムを変えてしまうと球の形状がかなり変化する. 他にも, 単位球が常に丸いという意味を持つ狭義凸性や単位球が真四角であるかどうかを表す一様 non-squareness など, 今までに多くの幾何学的概念が導入され, L_p 空間などの古典的なバナッハ空間について調べられている。

また最近、$\mathbb{C}^n$ 上の absolute ノルムにおいて、そのノルムの性質や幾何学的性質に関する結果が得られている. 実際, 斎藤-加藤-高橋 [14, 15] は, $\mathbb{C}^2$ 上の absolute norm における von Neumann-Jordan 定数を計算し, また $\mathbb{C}^n$ 上の absolute norm をある凸関数で特徴づけ, 狭義凸性を調べている. また, それに関連して, ℓ_p 直和空間を一般化した空間として ψ 直和空間が導入され, その空間においての幾何学的性質について研究されている ([7, 13, 10, 12, 17]).

本論文では, 狭義凸性, 一様凸性の幾何学的性質を持つバナッハ空間において, よく知られている不等式を ψ-直和を用いて新たな関係する不等式を与える. さらに一様 non-square 性の幾何学的性質についても, 高橋-加藤 [16] が与えた Little-Wood 行列のノルムによる評価についても ψ-直和の概念を使って考察する.

2 バナッハ空間の幾何学的概念

準備として, ここでは幾つかの幾何学的性質を挙げる.

定義 2.1. バナッハ空間 X が狭義凸であるとは, 任意の $\|x\| = \|y\| = 1, x \neq y$ なる $x, y \in X$ に対して

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1$$

が成り立つときをいう.

命題 2.2 ([1]). X をバナッハ空間とする. このとき次は同値.
(i)X が狭義凸である
(ii)$x, y (\in X)$ が *colinear* (i.e. $\exists \alpha > 0 : x = \alpha y$) でないならば

$$\|x+y\| < \|x\| + \|y\|$$

である.

定義 2.3. バナッハ空間 X が一様凸であるとは, 任意の ε $(0 < \varepsilon \leq 2)$ に対して $0 < \delta < 1$ が定まり, $\|x\| = \|y\| = 1$, $\|x - y\| \geq \varepsilon$ を満たす X の任意の元 x, y に対して

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta$$

が成り立つことである.

定義から一様凸ならば狭義凸であることが容易にわかる.

定義 2.4. Xをバナッハ空間とする. X^*をXの共役空間とし, $x \in X$, $x \neq 0$とするとき, $\alpha \in X^*$がxの *norming functional*であるとは

$$\|\alpha\| = 1, \langle \alpha, x \rangle = \|x\|$$

を満たす時をいう.

ここで$D(X,x)$をXにおけるxの norming functional 全体とする.

定義 2.5. バナッハ空間Xが *smooth*であるとは, 任意の$x \in X$, $x \neq 0$に対して, xの *norming functional*が一意に存在する時をいう. 即ち $^{\#}D(X,x) = 1$であるときをいう.

定義 2.6. バナッハ空間Xが一様 *non-square*であるとは, ある$\varepsilon, \delta > 0$が存在して$\|x - y\| \geq \varepsilon$, $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, x, y \in X$ならば

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta$$

であるときをいう.

定義から, 一様凸な空間は一様 non-square であることは明らか.

命題 2.7. バナッハ空間Xが一様 *non-square*であることと, ある$\delta > 0$が存在して$\|x - y\| > 2(1 - \delta)$, $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, x, y \in X$ならば

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta$$

であることは同値.

3 Absoluteノルムとψ-直和

定義 3.1. $\|\cdot\|$を$\mathbb{C}^2$上のノルムとする.
(i) $\|\cdot\|$が absolute であるとは$\|(x_1, x_2)\| = \|(|x_1|, |x_2|)\|$ $(\forall x_1,\ x_2 \in \mathbb{C})$が成り立つときをいう.
(ii) $\|\cdot\|$が normalized であるとは$\|(1,0)\| = \|(0,1)\| = 1$のときをいう.

例えばℓ_p-norms $\|\cdot\|_p$は absolute normalized である:

$$\|(x_1, x_2)\|_p = \begin{cases} (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p} & \text{if } 1 \leq p < \infty, \\ \max(|x_1|, |x_2|) & \text{if } p = \infty. \end{cases}$$

AN_2を$\mathbb{C}^2$上の absolute normalized ノルム全体とする.

補題 3.2. 任意の $\|\cdot\| \in AN_2$ に対して

$$\|\cdot\|_\infty \le \|\cdot\| \le \|\cdot\|_1.$$

実際, 任意の $x_1,\, x_2 \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}
\|(x_1,\, x_2)\|_\infty &= \max\{\|(x_1,\, 0)\|,\, \|(0,\, x_2)\|\} \\
&= \frac{1}{2}\max\{\|(x_1,\, x_2) + (x_1,\, -x_2)\|,\, \|(x_1,\, x_2) + (-x_1,\, x_2)\|\} \\
&\le \frac{1}{2}\max\{\|(x_1,\, x_2)\| + \|(x_1,\, -x_2)\|,\, \|(x_1,\, x_2)\| + \|(-x_1,\, x_2)\|\} \\
&= \|(x_1,\, x_2)\| \\
&\le \|(x_1,\, 0)\| + \|(0,\, x_2)\| \\
&= \|(x_1,\, x_2)\|_1.
\end{aligned}$$

任意の $\|\cdot\| \in AN_2$ とする. 任意の $0 \le t \le 1$ に対して

$$\psi(t) = \|(1-t,\, t)\| \tag{1}$$

とおくと, ψ は [0,1] 上の凸関数で $\psi(0) = \psi(1) = 1$ かつ $\max\{1-t, t\} \le \psi(t) \le 1$ $(0 \le t \le 1)$ をみたす. そこでこのような関数の全体を Ψ_2 とおく. このとき

定理 3.3 ([3], cf. [14]). AN_2 と Ψ_2 は (1) の対応で 1 対 1 に対応する. 即ち, 任意の $\psi \in \Psi_2$ に対して

$$\|(x_1, x_2)\|_\psi = \begin{cases} (|x_1| + |x_2|)\psi\left(\frac{|x_2|}{|x_1|+|x_2|}\right) & ((x_1, x_2) \neq (0,0)), \\ 0 & ((x_1, x_2) = (0,0)) \end{cases}$$

と定義すると $\|\cdot\|_\psi \in AN_2$ かつ (1) をみたす.

例えば ℓ_p ノルムに対応する凸関数は $\psi_p(t) = \{(1-t)^p + t^p\}^{1/p}$ で与えられる. また ℓ_p ノルム以外に多くの absolute normalized なノルムが沢山あることが分かる. さらに, バナッハ空間 X, Y において, その直和空間上に

$$\|(x, y)\|_\psi = \|(\|x\|, \|y\|)\|_\psi \ (x \in X,\ y \in Y)$$

を導入する. この空間を ψ-直和空間といい, $X \oplus_\psi Y$ とかく. これは ℓ_p-直和の拡張である. 即ち,

例 3.4. $1 \leq p \leq \infty$ とする. このとき $X \oplus_{\psi_p} Y = X \oplus_p Y$.

例 3.5. $1 \leq q < p \leq \infty$, $2^{1/p-1/q} < \lambda < 1$ とする. また $\psi_{p,q,\lambda} = \max\{\psi_p, \lambda\psi_q\} \in \Psi_2$ とおく. このとき $X \oplus_{\psi_{p,q,\lambda}} Y$ のノルムは

$$\|(x,y)\|_{\psi_{p,q,\lambda}} = \max\{\|(x,y)\|_p, \lambda\|(x,y)\|_q\}$$

と与えられる.

例 3.6. $1/2 \leq \alpha \leq 1$ とする.

$$\psi_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{\alpha-1}{\alpha}t+1 & \text{if } 0 \leq t \leq \alpha, \\ t & \text{if } \alpha \leq t \leq 1. \end{cases}$$

このとき $\psi_\alpha \in \Psi_2$ であり, $X \oplus_{\psi_\alpha} Y$ のノルムは

$$\|(x,y)\|_{\psi_\alpha} = \max\{\|x\| + (2-\frac{1}{\alpha})\|y\|, \|y\|\}.$$

と与えられる.

命題 3.7 ([7, 8, 10, 13, 17]). $\psi \in \Psi_2$ とし, また X, Y をバナッハ空間とする. このとき
(i) $X \oplus_\psi Y$ が狭義凸であることと X, Y が狭義凸かつ ψ が関数として狭義凸であることは同値.
(ii) $X \oplus_\psi Y$ が一様凸であることと X, Y が一様凸かつ ψ が関数として狭義凸であることは同値.
(iii) $X \oplus_\psi Y$ が *smooth* であることと X, Y が *smooth* かつ φ が関数として $\mathbb{R}$ 上で微分可能であることは同値. ここで、

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1-t, & \textit{if } t < 0, \\ \psi(t), & \textit{if } 0 \leq t \leq 1, \\ t, & \textit{if } t > 1. \end{cases}$$

(iv) $X \oplus_\psi Y$ が一様 *non-square* であることと X, Y が一様 *non-square* かつ $\psi \neq \psi_1, \psi_\infty$ であることは同値.

4 主結果

初めに, 次の狭義凸性に関する特徴づけを考える.

命題 4.1 ([1]). X をバナッハ空間とし, $1 < p < \infty$ とする. このとき X が狭義凸であることと任意の $x, y \in X (x \neq y)$ に対して

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p < \frac{1}{2}(\|x\|^p + \|y\|^p)$$

であることは同値である.

定理 4.2. $\psi \in \Psi_2$ とし, ψ が唯一の最小点 t_0 を持つとする. このとき次は同値である.
(i) バナッハ空間 X が狭義凸である.
(ii) 任意の $x, y \in X$ $(x \neq y)$ に対して

$$\|(1-t_0)x + t_0 y\| < \frac{1}{\psi(t_0)}\|((1-t_0)x, t_0 y)\|_\psi \tag{2}$$

である.

証明. X が狭義凸と仮定する. $t \neq t_0$ ならば $\psi(t) > \psi(t_0)$ より $0 < t_0 < 1$. もし x, y が colinear でないならば

$$\begin{aligned}
\|(1-t_0)x + t_0 y\| &< \|(1-t_0)x\| + \|t_0 y\| \\
&= \|((1-t_0)x, t_0 y)\|_1 \\
&\leq \max_{0 \leq t \leq 1} \frac{\psi_1(t)}{\psi(t)}\|((1-t_0)x, t_0 y)\|_\psi \\
&= \frac{1}{\displaystyle\min_{0 \leq t \leq 1} \psi(t)}\|((1-t_0)x, t_0 y)\|_\psi \\
&= \frac{1}{\psi(t_0)}\|((1-t_0)x, t_0 y)\|_\psi.
\end{aligned}$$

もし x, y が colinear ならば, ある α $(\alpha > 0)$ が存在して $(1-t_0)x = \alpha t_0 y$. $x \neq y$ より $1/(\alpha+1) \neq t_0$. よって

$$\psi(1/(\alpha+1)) > \psi(t_0).$$

また

$$
\begin{aligned}
\|(1-t_0)x+t_0y\| &= \|\alpha t_0 y + t_0 y\| \\
&= t_0(\alpha+1)\|y\| \\
&< \frac{t_0}{\psi(t_0)}(\alpha+1)\psi\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)\|y\| \\
&= \frac{1}{\psi(t_0)}\|(\alpha t_0\|y\|, t_0\|y\|)\|_\psi \\
&= \frac{1}{\psi(t_0)}\|((1-t_0)x, t_0y)\|_\psi.
\end{aligned}
$$

従って (2) が言える.

逆に (2) が任意の $x, y \in X (x \neq y)$ で成り立つとする. 各 $x, y \in S_X (x \neq y)$ に対して

$$
\begin{aligned}
\|(1-t_0)x+t_0y\| &< \frac{1}{\psi(t_0)}\|((1-t_0)\|x\|, t_0\|y\|)\|_\psi \\
&= \frac{1}{\psi(t_0)}\|(1-t_0, t_0)\|_\psi = 1.
\end{aligned}
$$

従って X は狭義凸. (証明終)

例 3.6 の関数 ψ_α を上の定理に適用すると次が得られる.

系 4.3. $1/2 \leq \alpha < 1$ とおく. このときバナッハ空間 X は狭義凸であることと, 任意の $x, y \in X (x \neq y)$ に対して

$$
\|(1-\alpha)x+\alpha y\| < \frac{1}{\alpha}\max\{(1-\alpha)\|x\| + (2\alpha-1)\|y\|, \alpha\|y\|\}.
$$

は同値である.

さらに一様凸性についても ψ-直和で特徴付けられる.

命題 4.4 ([1]). X をバナッハ空間とし, $1 < p < \infty$ とする. このとき X が一様凸であることと, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta_p(\varepsilon) > 0$ が存在し $\|x-y\| \geq \varepsilon$, $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$, $x, y \in X$ ならば

$$
\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p \leq (1-\delta_p(\varepsilon))\frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2}
$$

が成り立つことは同値である.

定理 4.5. $\psi \in \Psi_2$ とし, ψ が唯一の最小点 t_0 を持つとする．このとき次は同値である．
(i) バナッハ空間 X が一様凸である．
(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在し $\|x-y\| \geq \varepsilon$, $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$, $x, y \in X$ ならば

$$\|(1-t_0)x + t_0 y\| \leq (1-\delta)\frac{1}{\psi(t_0)}\|((1-t_0)x, t_0 y)\|_\psi. \tag{3}$$

である．

最後に一様 nonsquareness を考える．高橋-加藤 [16] は Little-Wood 行列を使い, 次のように一様 nonsquareness を特徴付けた．

命題 4.6 (高橋-加藤 [16]). バナッハ空間 X において次は同値.
(i) X が一様 *non-square.*
(ii) ある $\delta > 0$ が存在して,

$$\|x-y\| \geq 2(1-\delta),\ \|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1, x, y \in X$$

ならば

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p \leq (1-\delta)\frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2}.$$

(iii) ある $\delta > 0$ が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対して,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^p \leq (2-\delta)\frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2}.$$

(iv) 任意の (resp. ある) p $(1 < p < \infty)$ に対して,

$$\|A : \ell_p^2(X) \to \ell_p^2(X)\| < 2.$$

(v) 任意の (resp. ある) r と s $(1 < r \leq \infty, 1 \leq s < \infty, 1/r + 1/r' = 1)$ に対して

$$\|A : \ell_r^2(X) \to \ell_s^2(X)\| < 2^{1/r' + 1/s},$$

が成り立つ．ここで

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{Little} - \text{Wood 行列})$$

また $\ell_p^2(X) = X \oplus_p X$.

我々は ψ-直和を使って上の結果を拡張した.

定理 4.7. $\psi, \phi \in \Psi_2$ とする. また $\phi \neq \psi_\infty$ であり ψ は唯一の最小点 t_0 をもつとする. このときバナッハ空間 X に対して次は同値.

(i) X は一様 *non-square.*

(ii) ある $\delta (0 < \delta < 1)$ が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対して,

$$\|((1-t_0)x + t_0 y, (1-t_0)x - t_0 y)\|_\phi \leq 2\frac{\phi(1/2)}{\psi(t_0)}(1-\delta)\|((1-t_0)x, t_0 y)\|_\psi.$$

(iii)

$$\|A : X \oplus_\psi X \to X \oplus_\phi X\| < 2\frac{\phi(1/2)}{\psi(t_0)}.$$

参考文献

[1] B. Beauzamy, Introduction to Banach Spaces and Their Geometry, 2nd ed., North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1985.

[2] R. Bhatia, Matrix analysis, Springer, 1997.

[3] F. F. Bonsall and J. Duncan, Numerical Ranges II, "London Math. Soc. Lecture Note Series," Vol. 10, 1973.

[4] J. A. Clarkson, *Uniformly convex spaces,* Trans. Amer. Math. Soc., **40** (1936), 396-414.

[5] R. C. James, *Uniformly non-square Banach spaces,* Ann. of Math., **80** (1964), 542-550.

[6] M. Kato, L. Maligranda and Y. Takahashi, *On James and Jordan-von Neumann constants and the normal structure coefficient of Banach spaces,* Studia Math., **144** (2001), 275–295.

[7] M. Kato, K. -S. Saito and T. Tamura, *On ψ-direct sums of Banach spaces and convexity*, J. Austral. Math. Soc., **75** (2003), 413-422.

[8] M. Kato, K. -S. Saito and T. Tamura, *Uniform non-squareness of ψ-direct sums of Banach spaces $X \oplus_\psi Y$*, Math. Inequal. Appl., **7** (2004), 429-437.

[9] R. E. Megginson, An Introduction to Banach Space Theory, Grad. Texts in Math. 183, Springer, New York, 1998.

[10] K. Mitani, S. Oshiro and K. -S. Saito, *Smoothness of ψ-direct sums of Banach spaces,* to appear in Math. Inequal. Appl.

[11] K. Mitani and K. -S. Saito, A note on geometrical properties of Banach spaces using ψ-direct sums, preprint.

[12] K. Mitani, K. -S. Saito and T. Suzuki, *Smoothness of absolute norms on* $\mathbb{C}^n$, J. Convex Anal., **10** (2003), no. 1, 89–107.

[13] K.-S. Saito and M. Kato, *Uniform convexity of ψ-direct sums of Banach spaces.* J. Math. Anal. Appl. **277** (2003), no. 1, 1–11.

[14] K.-S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, *Von Neumann-Jordan Constant of absolute normalized norms on* $\mathbb{C}^2$, J. Math. Anal. Appl., **244** (2000), 515-532.

[15] K.-S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, *Absolute norms on* $\mathbb{C}^n$, J. Math. Anal. Appl., **252** (2000), no. 2, 879–905.

[16] Y. Takahashi and M. Kato, *von Neumann-Jordan constant and uniformly non-square Banach spaces,* Nihonkai Math. J., **9** (1998), no. 2, 155-169.

[17] Y. Takahashi, M. Kato and K. -S. Saito, *Strict convexity of absolute normes on* $\mathbb{C}^2$ *and direct sums of Banach spaces*, J. Inequal. Appl., **7** (2002), 179-186.