数理解析研究所講究録 1427 巻 2005 年 128-136

Class $A(s,t)$ 作用素の Fuglede-Putnam 定理

S.M. Patel, Sardar Patel University
Kotaro Tanahashi Tohoku Pharmaceutical University
Atsushi Uchiyama Sendai National College of Technology
Masahiro Yanagida Tokyo University of Science

§1. 目標

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素全体を $B(\mathcal{H})$ とかく。次は正規作用素 $(SS^* = S^*S)$ の可換性に関する重要な結果で Fuglede-Putnam 定理と呼ばれている。

[Fuglede-Putnam theorem [3, 12](1950)]

(1) $S \in B(\mathcal{H})$ は正規とする。このとき $SX = XS$ $(X \in B(\mathcal{H}))$ ならば $S^*X = XS^*$ となる。

(2) $S \in B(\mathcal{H}), T^* \in B(\mathcal{K})$ は正規とする。このとき $SX = XT$ $(X \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H}))$ ならば $S^*X = XT^*$ である。さらに S の値域の閉包 $[\mathrm{ran}\ X]$ は S の reducing subspace, $(\ker X)^\perp$ は T の reducing subspace で $S|_{[\mathrm{ran}\ X]}$ と $T|_{(\ker X)^\perp}$ はユニタリ同値な正規作用素である。

作用素論において可換性が大事な概念であることはよく知られており、多くの研究者がこの定理の拡張を行ってきた。例えば

(1) Furuta [5](1979): S, T^* subnormal (S has a normal extension)

(2) K. Takahashi [13](1981): S, T^* hyponormal $(SS^* \le S^*S)$

(3) Moore, Rogers and Trent [10](1981): S, T^* M-hyponormal

$$(S-z)(S-z)^* \le M^2(S-z)^*(S-z)$$

(4) Yoshino [17](1985), Duggal [1](1986): S dominant, T^* M-hyponormal

$$(S-z)(S-z)^* \le M_z^2(S-z)^*(S-z)$$

(5) S.M. Patel [11](1996), Duggal [2](1996) S, T^* p-hyponormal

$$(SS^*)^p \le (S^*S)^p$$

(6) I.H. Jeon, K. Takahashi and A. Uchiyama [14](2002), [9](2004) :
S, T^* p-hyponormal or log-hyponormal (S invertible and $\log SS^* \le \log S^*S$)

等がある。ここでは class $A(s,t)$ 作用素を考える。

[定義] 極分解を $T = U|T|$ として generalized Aluthge transform を

$$T(s,t) = |T|^s U |T|^t \quad (0 < s, t)$$

と定める。T が class $A(s,t)$ 作用素であるとは

$$|T(s,t)|^{\frac{2t}{s+t}} \ge |T|^{2t},$$

または、同じ事であるが、

$$\left(|T^*|^t|T|^{2s}|T^*|^t\right)^{\frac{t}{s+t}} \geq |T^*|^{2t}$$

を満たすときをいう。p-hyponormal, log-hyponormal 作用素は class $A(s,t)$ 作用素 $(\forall 0 < s,t)$ である。class $A(s,t)$ 作用素のクラスは $0 < s,t$ に関して増大していくことが知られている。特に class $A(1,1)$ 作用素は単に class A 作用素といわれ

$$|T^2| \geq |T|^2$$

で特徴づけられる。([4, 7, 8, 16])

この論文の目的は class $A(s,t)$ 作用素 $(s+t \leq 1)$ が reducing kernel ($\ker T \subset \ker T^*$) をもてば Fuglede-Putnam 定理を満たすことを示すことである。

[主定理]

$S \in B(\mathcal{H}), T^* \in B(\mathcal{K})$ は class $A(s,t)$ 作用素 $(s+t \leq 1)$ で reducing kernel をもつとする。このとき $SX = XT$ $(X \in B(\mathcal{K},\mathcal{H}))$ ならば $S^*X = XT^*$ である。さらに $[\mathrm{ran}\ X]$ は S の reducing subspace, $(\ker X)^\perp$ は T の reducing subspace で $S|_{[\mathrm{ran}\ X]}$ と $T|_{(\ker X)^\perp}$ はユニタリ同値な正規作用素である。

§2. 証明

[補題 1([16])]

$A, B, C \in B(\mathcal{H})$ は non-negative で $0 < p, 0 < r \leq 1$ とする。もし、

$$(B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}} \geq B^r, B \geq C$$

ならば

$$(C^{\frac{r}{2}}A^pC^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}} \geq C^r$$

が成り立つ。

[補題 2]

T は class $A(s,t)$ 作用素 $(s+t \leq 1)$ で $\mathcal{M}$ は T の不変部分空間とする。このとき restriction $T|_{\mathcal{M}}$ も class $A(s,t)$ 作用素である。

Proof.

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & S \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}, \text{ on } \mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$$

と分解し、P を $\mathcal{M}$ への直交射影とする。

$$T_0 = TP = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと Hansen の不等式 [6] から

$$|T_0|^{2s} = (P|T|^2P)^s \geq P|T|^{2s}P$$

となるので

$$|T^*|^2 = TT^* \geq TPT^* = |T_0^*|^2.$$

である。よって

$$\begin{aligned}
&T \text{ is a class } A(s,t) \text{ operator}\\
&\Longleftrightarrow (|T^*|^t|T|^{2s}|T^*|^t)^{\frac{t}{s+t}} \geq |T^*|^{2t}\\
&\Longrightarrow (|T_0^*|^t|T|^{2s}|T_0^*|^t)^{\frac{t}{s+t}} \geq |T_0^*|^{2t} \quad (\text{補題 }1)\\
&\Longrightarrow (|T_0^*|^t|T_0|^{2s}|T_0^*|^t)^{\frac{t}{s+t}} \geq |T_0^*|^{2t} \quad (\text{since } |T_0^*|^t = |T_0^*|^tP = P|T_0^*|^t)\\
&\Longleftrightarrow T_{\mathcal{M}} \text{ is a class } A(s,t) \text{ operator .}
\end{aligned}$$

□

[補題 3] $T \in B(\mathcal{H})$ は class A 作用素で $\mathcal{M}$ は T の不変部分空間とする。ここで

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & S \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \text{ on } \mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$$

と表すとき、もし $T_1 = T|_{\mathcal{M}}$ が quasinormal ならば ran $S \subset \ker T_1^*$ である。さらに、もし、$\ker T \subset \ker T^*$ で $T_1 = T|_{\mathcal{M}}$ が正規ならば $\mathcal{M}$ は T を reduce する。

Proof. P を $\mathcal{M}$ への直交射影とすると

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} {T_1}^*T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= PT^*TP \leq P|T^2|P \quad (\text{since } T \text{ is class } A)\\
&\leq \begin{pmatrix} ({T_1}^{*2}{T_1}^2)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{by Hansen's inequality})\\
&= \begin{pmatrix} {T_1}^*T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{since } T_1 \text{ is quasinormal}).
\end{aligned}$$

である。さて $|T^2| = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y^* & Z \end{pmatrix}$ とおくとこの不等式から $X = {T_1}^*T_1$ となる。また $|T^2|^2 = T^{*2}T^2$ であるから

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} X^2 + YY^* & XY + YZ \\ ZY^* + Y^*X & Y^*Y + Z^2 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} {T_1}^{*2}{T_1}^2 & {T_1}^{*2}(T_1S + ST_2) \\ (S^*{T_1}^* + T_2^*S^*)T_1^2 & (S^*{T_1}^* + T_2^*S^*)(T_1S + ST_2) + {T_2}^{*2}{T_2}^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となり、よって

$$X^2+YY^*={T_1}^{*2}{T_1}^2=(T_1^*T_1)^2=X^2$$

である。従って $Y=0$ である。また

$$|T^2|=\begin{pmatrix} {T_1}^*T_1 & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix} \geq T^*T=\begin{pmatrix} {T_1}^*T_1 & {T_1}^*S \\ S^*T_1 & S^*S+{T_2}^*T_2 \end{pmatrix}$$

だから ${T_1}^*S=0$ である。従って

$$\operatorname{ran} S \subset \ker T_1^*$$

となる。

さらに $\ker T \subset \ker T^*$ で T_1 が正規とする。このとき

$$S(\mathcal{M}^\perp) \subset \ker T_1^* = \ker T_1 \subset \ker T \subset \ker T^*$$

であるから $x \in \mathcal{M}^\perp$ に対して

$$0=T^*Sx=\begin{pmatrix} T_1^* & 0 \\ S^* & T_2^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Sx \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} T_1^*Sx \\ S^*Sx \end{pmatrix}$$

となる。従って $S^*S=0$ となり $S=0$ が得られる。よって $\mathcal{M}$ は T を reduce する。

□

[注意 4] $T|_{\mathcal{M}}$ が quasinormal だけでは $\mathcal{M}$ が T を reduce することはでてこない。例えば T を bilateral shift on $\ell^2(\mathbb{Z})$

$$Te_n=e_{n+1}$$

とし $\mathcal{M}=\vee_{0\leq n}\mathbb{C}e_n$ とおく。すると T は unitary で $T|_{\mathcal{M}}$ は isometry である。しかし $\mathcal{M}$ は T を reduce しない。

この補題 3 を用いて次がわかる。

[補題 5] $T \in B(\mathcal{H})$ は class A 作用素で $\ker T \subset \ker T^*$ とする。このとき

$$T=T_1 \oplus T_2, \text{ on } \mathcal{H}=\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$$

と分解できて T_1 は正規, $\ker T_2=\{0\}$ で T_2 は pure class A である。 つまり $T_2|_{\mathcal{M}}$ が正規となる不変部分空間は零空間だけである。

[補題 6] $T=U|T|\in B(\mathcal{H})$ は class $A(s,t)$ 作用素 $(s+t=1)$ で $\ker T\subset\ker T^*$ とする。もし

$$T(s,t)=|T|^sU|T|^t=N\oplus T' \text{ on } \mathcal{H}=\mathcal{M}\oplus\mathcal{M}^\perp$$

と分解したとき N が正規ならば

$$T=N\oplus T_1$$

と表される。ここで $U=U_{11}\oplus U_{22}$, T_1 は class $A(s,t)$ 作用素で $\ker T_1\subset\ker T_1^*$ である。また $N=U_{11}|N|$ は N の極分解である。

Proof. さて仮定と [8] から

$$|T(s,t)|^{2r}\geq|T|^{2r}\geq|T(s,t)^*|^{2r} \text{ for } r\in(0,\min\{s,t\}]$$

となる。よって

$$|N|^{2r}\oplus|T'|^{2r}\geq|T|^{2r}\geq|N|^{2r}\oplus|T'^*|^{2r}$$

となるから

$$|T|=|N|\oplus L, 0\leq L$$

と表される。さて

$$U=\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12}\\ U_{21} & U_{22}\end{pmatrix} \text{ on } \mathcal{H}=\mathcal{M}\oplus\mathcal{M}^\perp$$

で表すと $T(s,t)=|T|^sU|T|^t$ より

$$\begin{pmatrix} N & 0\\ 0 & T'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |N|^s & 0\\ 0 & L^s\end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12}\\ U_{21} & U_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} |N|^t & 0\\ 0 & L^t\end{pmatrix}$$

となる。従って

$$N=|N|^sU_{11}|N|^t, |N|^sU_{12}L^t=0, L^sU_{21}|N|^t=0$$

である。ここで $\ker T\subset\ker T^*$ であるから

$$[\text{ran } U]=[\text{ran } T]=(\ker T^*)^\perp\subset(\ker T)^\perp=[\text{ran } |T|]$$

となる。

さて $x\in\ker N$ とする。このとき $x\in\ker|T|=\ker U$ で

$$Ux=\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12}\\ U_{21} & U_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} U_{11}x\\ U_{21}x\end{pmatrix}=0$$

であるから

$$\ker N \subset \ker U_{11} \cap \ker U_{21}$$

となる。次に $x \in \mathcal{M}$ に対して

$$U\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11}x \\ U_{21}x \end{pmatrix} \in [\mathrm{ran}\ |T|] = [\mathrm{ran}\ (|N| \oplus L)]$$

であるから

$$\mathrm{ran}\ U_{11}\ \subset [\mathrm{ran}|N|],\ \mathrm{ran}\ U_{21} \subset [\mathrm{ran}L]$$

となる。同様に

$$\mathrm{ran}\ U_{12} \subset [\mathrm{ran}|N|],\ \mathrm{ran}\ U_{22} \subset [\mathrm{ran}L]$$

である。次に $x \in \ker L$ とする。このとき $x \in \ker|T| = \ker U$ で

$$U\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{12}x \\ U_{22}x \end{pmatrix} = 0$$

となるから

$$\ker L \subset \ker U_{12} \cap \ker U_{22}$$

である。さて $N = V|N|$ を極分解とする。このとき

$$(V|N|^s - |N|^s U_{11})|N|^t = 0$$

であるから

$$V|N|^s - |N|^s U_{11} = 0 \text{ on } [\mathrm{ran}\ |N|]$$

となる。ここで $\ker N \subset \ker U_{11}$ であるから

$$0 = V|N|^s - |N|^s U_{11} = |N|^s(V - U_{11})$$

である。従って

$$\mathrm{ran}\ (V - U_{11}) \subset \ker|N| \cap [\mathrm{ran}\ |N|] = \{0\}$$

が得られる。よって $V = U_{11}$ で $N = U_{11}|N|$ は極分解である。また $|N|^s U_{12} L^t = 0$ であるから

$$\mathrm{ran}\ U_{12}L^t \subset \ker|N| \cap [\mathrm{ran}\ |N|] = \{0\}$$

となる。よって $U_{12}L^t = 0$ で $U_{12} = 0$ となる。同様に $U_{21} = 0$ が $L^s U_{21}|N|^t = 0$ から得られる。よって $U = U_{11} \oplus U_{22}$ である。よって

$$T = U|T| = U_{11}|N| \oplus U_{22}L$$

となるので $T_1 = U_{22}L$ とおけばよい。 □

[主定理の証明]
[8, Theorem 4] から $s+t=1$ としてよい。 S, T^* を補題 5 のように分解して

$$S = S_1 \oplus S_2 \text{ on } \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$$
$$T^* = T_1^* \oplus T_2^* \text{ on } \mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2$$

とおくとき S_1, T_1^* は正規 S_2, T_2^* は injective, pure である。さて $X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$ と分解すると $SX = XT$ から

$$\begin{pmatrix} S_1X_{11} & S_1X_{12} \\ S_2X_{21} & S_2X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11}T_1 & X_{12}T_2 \\ X_{21}T_1 & X_{22}T_2 \end{pmatrix}$$

となる。ここで $S_2 = U_2|S_2|, T_2^* = V_2^*|T_2^*|$ と極分解する。さて

$$S_2(s,t) = |S_2|^s U_2 |S_2|^t, T_2^*(s,t) = |T_2^*|^s V_2^* |T_2^*|^t, W = |S_2|^s X_{22} |T_2^*|^s$$

とおくと

$$\begin{aligned} S_2(s,t)W &= |S_2|^s S_2 X_{22} |T_2^*|^s \\ &= |S_2|^s X_{22} T_2 |T_2^*|^s = W(T_2^*(s,t))^* \end{aligned}$$

となる。ここで S_2, T_2^* は class $A(s,t)$ 作用素であるから $S_2(s,t), T_2^*(s,t)$ は $\min\{s,t\}$-hyponormal となる。よって [2] から [ran W] は $S_2(s,t)$ の reducing subspace, $(\ker W)^\perp$ は $T_2^*(s,t)$ の reducing subspace で $S_2(s,t)|_{[\mathrm{ran}\ W]}, T_2^*(s,t)|_{(\ker W)^\perp}$ はユニタリ同値な正規作用素である。しかし S_2, T_2^* は pure なので補題 6 から $W=0$ となる。また S_2, T_2^* は injective なので $X_{22}=0$ となる。また $S_2X_{21} = X_{21}T_1$ で $S_1X_{12} = X_{12}T_2$ であるから同様に $X_{21}T_1 = 0, S_1X_{12} = 0$ となる。よって $SX = XT$ から

$$\begin{pmatrix} S_1X_{11} & 0 \\ S_2X_{21} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11}T_1 & X_{12}T_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり $X_{12} = 0, X_{21} = 0$ が得られる。よって $X = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ で

$$\mathrm{ran}\ X = \mathrm{ran}\ X_{11} \oplus \{0\}$$
$$(\ker X)^\perp = (\ker X_{11})^\perp \oplus \{0\}$$

となる。ここで $S_1X_{11} = X_{11}T_1$ だから $S_1^*X_{11} = X_{11}T_1^*$ となり $S^*X = XT^*$ が得られる。また [ran X_{11}] は S_1 の reducing subspace, $(\ker X_{11})^\perp$ は T_1 の reducing subspace で $S_1|_{[\mathrm{ran}\ X_{11}]}$ と $T_1|_{(\ker X_{11})^\perp}$ はユニタリ同値な正規作用素である。ここで $S|_{[\mathrm{ran}\ X]} \simeq S_1|_{[\mathrm{ran}\ X_{11}]}, T_1|_{(\ker X_{11})^\perp} \simeq T|_{(\ker X)^\perp}$ であるから [ran X] は S の

reducing subspace, $(\ker X)^{\perp}$ は T の reducing subspace で $S|_{[\mathrm{ran}\ X]}$ と $T|_{(\ker X)^{\perp}}$ はユニタリ同値な正規作用素である。

[注意 7] [15, Example 13] に class $A(1/2, 1/2)$ 作用素 A で $\ker A \not\subset A^*$ となる例がある。ここで $S = T^* = A$ とおき、$X = P$ を $\ker S = \ker A$ への直交射影とおくと $SX = 0 = XT$ であるが $S^*X \neq XT^*$ である。よって kernel condition $(\ker S \subset \ker S^*)$ がないと主定理の Fuglede-Putnam 定理は成立しない。

参考文献

[1] B. P. Duggal, *On dominant operators*, Arch. Math., **46** (1986), 353–359.

[2] B. P. Duggal, *Quasi-similar p-hyponormal operators*, Integr. Equat. Oper. Th., **26**(1996), 338-345.

[3] B. Fuglede, *A commutativity theorem for normal operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **36**(1950), 35–40.

[4] M. Fujii, D. Jung, S.H. Lee, M.Y. Lee and R. Nakamoto, *Some classes of operators related to paranormal and log-hyponormal operators*, Math. Japonica, **51** (2000) 395–402.

[5] T. Furuta, *On relaxation of normality in the Fuglede-Putnam theorem*, Proc. Amer. Math. Soc., textbf77 (1979) 324–328.

[6] F. Hansen, *An inequality*, Math. Ann., **246**(1980), 249–250.

[7] M. Ito, *Some classes of operators associated with generalized Aluthge transformation*, SUT J. Mathematics, **1**(1999), 149–165.

[8] M. Ito and T. Yamazaki, *Relations between two operator inequalities* $(B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}} \geq B^r$ *and* $A^p \geq (A^{\frac{p}{2}}B^rA^{\frac{p}{2}})^{\frac{p}{p+r}}$ *and their applications*, Integr. Equat. Oper. Th., **44**(2002), 442–450.

[9] I.H. Jeon, K. Tanahashi and A. Uchiyama, *On quasisimilarity for log-hyponormal operators*, Glasgow math. J., **46**(2004), 169–176.

[10] R.L. Moore, D.D. Rogers and T.T. Trent, *A note on intertwining M-hyponormal operators*, Proc. Amer. Math. Soc., textbf83 (1981) 514–516.

[11] S. M. Patel, *On Intertwining p-hyponormal operators*, Indian J. Math., **38**(1996), 287–290.

[12] C. R. Putnam, *On normal operators in Hilbert space*, Amer. J. Math., **73**(1951), 357–362.

[13] K. Takahashi, *On the converse of the Fuglede-Putnam theorem*, Acta Sci. Math. (Szeged), **43**(1981), 123–125.

[14] A. Uchiyama and K. Tanahashi, *Fuglede-Putnam's theorem for p-hyponormal or log-hyponormal operators*, Glasgow math. J., **44**(2002), 397–410.

[15] A. Uchiyama and K. Tanahashi, *On the Riesz idempotent of class A operators*, Mathematical Inequalities and Applications, **5**(2002), 291–298.

[16] M. Yanagida, *Powers of class $wA(s,t)$ operators with generalized Aluthge transformation*, J. Inequal. Appl. **7**(2002), 143–168.

[17] T. Yoshino, *Remark on the generalized Fuglede-Putnam theorem*, Proc. Amer. Math. Soc., textbf95 (1985) 571–572.