数理解析研究所講究録 1427 巻 2005 年 76-83

On Aluthge transformation and weakly unitarily invariant norm

北海道教育大学札幌校　大久保　和義

1. はじめに

$\mathcal{H}$ をヒルベルト空間, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ を $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素全体の集合とする。$T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ として, $T = VP$ を T の polar decomposition とする。(ただし, P: positive semi-definite, V: partial isometry satisfying $V^*VP = P$ とする。)

$0 \leq \lambda \leq 1$ に対して T の λ-*Aluthge transformation* を $P^\lambda VP^{1-\lambda}$ で定義する。特に, $\lambda = \frac{1}{2}$ のときには, *Aluthge transformation* とよばれる ([A] 参照)。
$|||\cdot|||$ を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上の *weakly unitarily invariant norm,* すなわち,

$$|||VXV^*||| = |||X||| \ (V \in \mathcal{B}(\mathcal{H}): \ \textit{unitary}, \ X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}))$$

が成り立つとする。T が invertible のとき, unitarily invariant norm $|||\cdot|||$ に関して $g(\lambda) \equiv |||P^\lambda VP^{1-\lambda}||| \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$ とすると, $g(\lambda)$ は convex で $g(0) = g(1)$ である。また, 特に $\dim \mathcal{H} = 2$ のときは, $g(\lambda) = g(1-\lambda)$ がいえて, $\min_{0 \leq \lambda \leq 1} g(\lambda) = g(\frac{1}{2})$ となるが, $\dim \mathcal{H} \geq 3$ のときは, $g(\lambda)$ の最小値は, $g(\frac{1}{2})$ になるとは限らない。その例として, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ を考える。すると, $f(a) = P^aVP^{1-a} = \begin{pmatrix} 1/33^{1/2} & 1/3 \cdot 3^{1/2} \cdot 2^{1-a} & 1/3 \cdot 3^{1/2} \cdot 3^{1-a} \\ 1/2 \cdot 2^a \cdot 2^{1/2} & -1/2 \cdot 2^a \cdot 2^{1/2} \cdot 2^{1-a} & 0 \\ 1/6 \cdot 3^a \cdot 6^{1/2} & 1/6 \cdot 3^a \cdot 6^{1/2} \cdot 2^{1-a} & -1/3 \cdot 3^a \cdot 6^{1/2} \cdot 3^{1-a} \end{pmatrix}$ となり, $g(a) = ||f(a)|| \ (0 \leq a \leq 1)$ とすると $g(1/2) = 2.798077044$, $g(2/5) = 2.795949312$ となることが計算できる。

$\rho > 0$ に対して $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ がある Hilbert space $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ 上の unitary operator U があって,

$$T^n = \rho QU^n|_{\mathcal{H}} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

を満たすとき, T を ρ-contraction とよぶ。ただし, Q は $\mathcal{K}$ から $\mathcal{H}$ への orthogonal projection である。ρ-contraction に対して, T の ρ-radius $w_\rho(T)$ が,

$$w_\rho(T) \equiv \inf\{r > 0 \ : \ \frac{1}{r}T \text{ is a } \rho\text{−contraction}\}$$

で定義される ([H] 参照)。$0 < \rho \leq 2$ に対して $w_\rho(\cdot)$ は $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上の weakly unitarily invariant norm となる。

この講演では, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対してその λ-Aluthge transformation と weakly unitarily invariant norm の間に成り立つ不等式について述べる。

2. T が invertible な場合の結果

定理 1 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が invertible で $T = VP$ を T の porlar decomposition として, $TB = BT$ とする。また, $|||\cdot|||$ を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上の weakly invariant norm とするとき,

$$|||P^\lambda BVP^{1-\lambda}|| \ \leq \ ||BVP||| \qquad (0 \ \leq \ \lambda \ \leq \ 1)$$

がいえる。

証明

$$\varphi(z) \equiv P^{\frac{1}{2}-z}BVP^{\frac{1}{2}+z} \quad (-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(z) \leq \frac{1}{2})$$

とすると，$P^{\pm it}$, V, V^* は unitary であるから，

$$\varphi(\frac{1}{2}+it) = P^{-it}\cdot BVP\cdot P^{it}, \quad ||\varphi(\frac{1}{2}+it)|| = ||BVP|| \quad (-\infty < t < \infty)$$

となる。また，可換性 $VPB = BVP$ を使って，

$$\varphi(-\frac{1}{2}+it) = P^{-it}\cdot PB\cdot VP^{it} = P^{-it}V^*\cdot VPB\cdot VP^{it} = P^{-it}V^*BVP\cdot VP^{it},$$

となることがわかり，

$$||\varphi(-\frac{1}{2}+it)|| = ||BVP||$$

がいえる。さらに

$$L(-\frac{1}{2}) = L(\frac{1}{2}) = ||BVP||$$

となるから，三線定理（[G-K] 参照）より

$$||P^{\lambda}BVP^{1-\lambda}|| \leq ||BVP||$$

が示される。

特に多項式 $f(z)$ に対して $B \equiv f(VP)$ は可換性の条件を満たすから

$$||P^{\lambda}f(VP)VP^{1-\lambda}|| \leq ||f(VP)VP||.$$

がいえることになる。

このことを用いると次のことがいえる。

定理 2 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が invertible で $T = VP$ を T の porlar decomposition とする。f を任意の多項式として，$|||\cdot|||$ を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上の weakly invariant norm とするとき，

$$|||f(P^{\lambda}VP^{1-\lambda})||| \leq |||f(VP)||| \qquad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

となる。

証明 定理 1 で特に多項式 $f(z)$ に対して $B \equiv f(VP)$ は可換性の条件を満たすから

$$||P^{\lambda}f(VP)VP^{1-\lambda}|| \leq ||f(VP)VP||$$

がいえる。すなわち，$f(z)$ が多項式で $f(0) = 0$ なら，weakly unitarily invariant norm $|||\cdot|||$ にたいして

$$|||f(P^{\lambda}VP^{1-\lambda})||| \leq |||f(VP)||| \qquad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

がいえる。一般の多項式 $f(z)$ に対して

$$f(z) = \alpha + g(z) \cdot z$$

と書こう。このとき，

$$f(VP) = \alpha + g(VP) \cdot VP = \{\alpha \cdot (VP)^{-1} + g(VP)\} \cdot VP$$

となる。そこで

$$B = \alpha \cdot (VP)^{-1} + g(VP)$$

とすると，B は VP と可換であるので，定理 1 の結果より

$$|||P^\lambda BVP^{1-\lambda}||| \le |||BVP||| = |||f(VP)|||$$

がいえる。一方で，

$$\begin{aligned} P^\lambda BVP^{1-\lambda} &= \alpha P^\lambda (VP)^{-1} VP \cdot P^{-\lambda} + P^\lambda g(VP) VP^{1-\lambda} \\ &= \alpha + P^\lambda g(VP) VP^{1-\lambda} = f(P^\lambda VP^{1-\lambda}) \end{aligned}$$

となるから，定理 2 が示される。

3. T が non-invertible な場合

次に，T の invertibility を除いて考えよう。この場合，invertiblity を仮定する場合と様相が異なる。また，以下の条件を満たす semi-norm を考える。

$|||\cdot|||$ を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上の semi-norm が次の条件を満たすとする。

$$|||X||| \le \gamma \, ||X|| \quad \exists\gamma \quad (X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})), \tag{1}$$

および

$$|||S^*XS||| \le ||S||^2 \cdot |||X||| \qquad (X, S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})) \tag{2}$$

さらに場合によっては，以下の条件も要求するときがある。

$$|||Q||| = 1 \quad \forall \text{ orthoprojection } Q \neq 0, \tag{3}$$

および

$$XQ = QX, \text{ orthoprojeciton } Q \quad \Longrightarrow \quad |||X||| = \max\left\{|||XQ|||,\ |||X(1-Q)|||\right\} \tag{4}$$

すなわち，$X = A \oplus B$ ならば，

$$|||X||| = \max\left\{|||\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}|||,\ |||\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}|||\right\}$$

が成り立つということである。

条件 (3) は，$|||\cdot|||$ が operator norm と equivalent, すなわち (1) の他に

$$\gamma' \, |||X||| \ \geq \ ||X|| \quad \exists \gamma' \quad (X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}))$$

であれば出るし，もっと自然には

$$r(X) \ \leq \ |||X||| \qquad (x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}))$$

の条件から出る。

(1), (2), (3), (4) を満たす norm としては，operator norm $||\cdot||$, numerical radius $w(\cdot)$ およびそれを一般化した ρ-radius $w_\rho(\cdot)$ $(0 < \rho \leq 2)$ などがある。

このとき，次のことがいえる。

定理 3 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ の polar decomposition を $T = VP$ とする。$|||\cdot|||$ は 条件 (1), (2) を満たす $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上の semi-norm とする。このとき， $0 \leq \lambda \leq 1$ および任意の多項式 f に関して次の不等式が成り立つ：

$$|||f\Big(P^\lambda V P^{1-\lambda}\Big)||| \ \leq \ \max\Big\{|||f(VP)|||, \ |||V^* \cdot f(VP) \cdot V + f(0)(I - V^*V)|||\Big\}$$

証明

$$f(z) \ = \ f(0) + g(z)z$$

と書く。ここで $g(z)$ も多項式である。つぎに P_n $(n = 1, 2, \ldots)$ を以下で定義する。

$$\begin{aligned} P \ \text{invertible} \quad &\Longrightarrow \quad P_n \ \equiv \ P \\ P \ \text{not invertible} \quad &\Longrightarrow \quad P_n \ \equiv \ P + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

P_n は invertible positive definite で，

$$0 \ \leq \ P_n^\lambda - P^\lambda \ \leq \ \frac{1}{n^\lambda} \quad (n = 1, 2, \ldots; \ 0 < \lambda \leq 1)$$

たなる。したがって，一様収束の意味で，

$$f\Big(P^\lambda V P^{1-\lambda}\Big) \ = \ \lim_{n\to\infty} f\Big(P_n^\lambda V P_n^{1-\lambda}\Big)$$

$$f(VP) \ = \ \lim_{n\to\infty} f(VP_n)$$

となる。複素平面の帯状領域 $-\frac{1}{2} \ \leq \mathrm{Re}(z) \ \leq \ \frac{1}{2}$ で，operator-valued analytic function $\varphi_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を

$$\varphi_n(z) \ \equiv \ f(0) \ + \ P_n^{\frac{1}{2}-z} \cdot g(VP_n) \cdot VP_n^{\frac{1}{2}+z}$$

で定義する。境界 $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$ および $\mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}$ での norm を評価しよう：

$$\begin{aligned} \varphi_n(\frac{1}{2} + it) \ &= \ f(0) + P_n^{-it} \cdot g(VP_n)VP_n \cdot P_n^{it} \\ &= \ P_n^{-it} \cdot f(VP_n) \cdot P_n^{it} \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}\varphi_n(-\frac{1}{2}+it) &= f(0)+P_n^{-it}P_n\cdot g(VP_n)V\cdot P_n^{it} \\ &= P_n^{-it}\{f(0)+P_n\cdot g(VP_n)V\}P_n^{it}\end{aligned}$$

となる。ここで $P_n^{\pm it}$ は unitary だから

$$\begin{aligned}\sup_{t\in\mathbf{R}}|||\varphi_n(\frac{1}{2}+it)||| &\le |||f(VP_n)||| \\ \sup_{t\in\mathbf{R}}|||\varphi_n(-\frac{1}{2}+it)||| &\le |||f(0)+P_n\cdot g(VP_n)V|||.\end{aligned}$$

三線定理を使うと

$$\begin{aligned}|||f\Big(P_n^{\lambda}UP_n^{1-\lambda}\Big)||| &= |||\varphi_n(\frac{1}{2}-\lambda)||| \\ &\le \max\Big\{|||f(VP_n)|||,\ |||f(0)+P_n\cdot g(VP_n)V|||\Big\}\end{aligned}$$

がいえる。したがって limit を考えると

$$|||f\Big(P^{\lambda}VP^{1-\lambda}\Big)||| \le \max\Big\{|||f(VP)|||,\ |||f(0)+P\cdot g(VP)V|||\Big\}$$

となる。ところで $V^*VP=P$ より

$$\begin{aligned}f(0)+P\cdot g(VP)V &= V^*\{f(0)+VP\cdot g(VP)\}V+f(0)(I-V^*V) \\ &= V^*\cdot f(VP)\cdot V\ +\ f(0)(I-V^*V).\end{aligned}$$

より

$$|||f(0)+P\cdot g(VP)V||| = |||V^*\cdot f(VP)\cdot V\ +\ f(0)(I-V^*V)|||$$

となり，上と合わせると定理 3 が証明される。

系 4 f, λ, $T=VP$ に関しては定理 3 と同じ設定で，以下の (i), (ii), (iii) のどれかが満たされれば

$$|||f\Big(P^{\lambda}VP^{1-\lambda}\Big)||| \le |||f(VP)|||$$

が成り立つ。

(i) $f(0)=0$,

(ii) V として isometry がとれる，すなわち $\dim\Big(\ker(T)\Big)\le\dim\Big(\ker(T^*)\Big)$,

(iii) semi-norm $|||\cdot|||$ が (3), (4) を満たす。

証明 (i), (ii) の場合は

$$|||V^* \cdot f(VP) \cdot U + f(0)(I - V^*V)||| \ = \ |||U^* \cdot f(VP) \cdot V||| \ \leq \ |||f(VP)|||$$

となるから示される。

(iii) の場合は, (V が isometry でなければ)

$$\begin{aligned} |||V^* \cdot f(VP) \cdot V + f(0)(I - V^*V)||| &= \max\left\{|||V^* \cdot f(VP) \cdot V|||,\ |f(0)|\right\} \\ &\leq \max\left\{|||f(VP)|||,\ |f(0)|\right\} \end{aligned}$$

であるが,

$$|f(0)| \cdot |||I - V^*V||| = |||(I - V^*V) \cdot f(VP) \cdot (I - V^*V)||| \ \leq \ |||f(VP)|||$$

がいえるので, 上と合わせると

$$|||V^* \cdot f(VP) \cdot V + f(0)(I - V^*V)||| \ \leq \ |||f(VP)|||$$

がでるから, 結局定理 3 より

$$|||f\left(P^\lambda V P^{1-\lambda}\right)||| \ \leq \ |||f(VP)|||$$

が示される。

系 5 f, λ, $T = VP$ に関しては定理 3 と同じ設定とする。このとき, $\rho > 0$ に対して次の不等式がいえる。

$$w_\rho\Big(f(P^\lambda V P^{1-\lambda})\Big) \ \leq \ w_\rho\Big(f(VP)\Big)$$

特に $\rho = 1, 2$ として

$$||f\left(P^\lambda V P^{1-\lambda}\right)|| \ \leq \ ||f(VP)||, \qquad w\Big(f(P^\lambda V P^{1-\lambda})\Big) \ \leq \ w\Big(f(VP)\Big)$$

証明 もし $0 < \rho \leq 2$ ならば, ρ-radius は (1), (2), (3), (4) を満たす norm なので, 系 4 (iii) を使えばよい。$\rho > 2$ のとき, $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して, $w_\rho(X) \leq 1$ なるための必要十分条件は $r(X) \leq 1$ で

$$||\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\rho - 1)^k |z|^{k-1}}{\rho^k} X^k|| \leq \rho - 1 \text{ for } |z| \leq 1$$

が成り立つことである ([A-O] 参照)。したがって, 系 5 を示すためには $w_\rho(f(T)) \leq 1$ が成り立つたつとき, $w_\rho(f(P^\lambda U P^{1-\lambda})) \leq 1$ が成り立つことを示せばよい。$w_\rho(f(T)) \leq 1$ とすると先のことから,

$$r(f(P^\lambda U P^{1-\lambda})) = \lim_{n\to\infty} ||(f(P^\lambda V P^{1-\lambda}))^n||^{1/n} \leq \lim_{n\to\infty} ||(f(T))^n||^{1/n} = r(f(T)) \leq 1$$

また，$\|\sum_{k=1}^{N}\frac{(\rho-1)^k|z|^{k-1}}{\rho^k}(f(P^\lambda VP^{1-\lambda}))^k\| \leq \|\sum_{k=1}^{N}\frac{(\rho-1)^k|z|^{k-1}}{\rho^k}(f(T))^k\|$ が $|z|\leq 1$ と任意の自然数 N についていえるから，limit を取ることによって，

$$\|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\rho-1)^k|z|^{k-1}}{\rho^k}(f(P^\lambda VP^{1-\lambda}))^k\| \leq \|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\rho-1)^k|z|^{k-1}}{\rho^k}(f(T))^k\| \leq \rho-1$$

が $|z|\leq 1$ に対していえて，したがって，$w_\rho(f(P^\lambda VP^{1-\lambda}))\leq 1$ がいえる。

注意 系 5 の結果で $\lambda=\frac{1}{2}$ のときは [I-N-O-Y] で示されている。

$X\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して X の数域 $W(X)$ が次で定義される：

$$W(X):=\{(Tx,x)\mid x\in\mathcal{H},\ \|x\|=1\}$$

ここでは，λ-Aluthge transformation と $W(\cdot)$ に関する包含関係について示す。

系 6　$f(z)$, λ, V, P は定理 3 と同じ設定とする。このとき，数域 $W(\cdot)$ に関して以下の包含関係が成り立つ。すなわち，

$$\overline{W\big(f(P^\lambda VP^{1-\lambda})\big)} \subset \overline{W\big(f(VP)\big)}$$

証明 一般に operator A に関して，どの $1\leq\rho\leq 2$ で

$$\overline{W(A)} = \bigcap_{\mu\in\mathbf{C}}\{z\ ;\ |z-\mu|\leq w_\rho(A-z)\}$$

となることが知られている。系 5 で $f(z)-\mu$ を考えて，

$$w_\rho\big(f(P^\lambda VP^{1-\lambda})-\mu\big) \leq w_\rho\big(f(VP)-\mu\big)$$

であるから，求める包含関係は上の共通部分表示よりでる。

注意 系 6 に関して $\lambda=\frac{1}{2}$ のとき，$W(P^{1/2}VP^{1/2}) \subset W(VP)$ は [Y],[W] で示されている。また，系 6 の $\lambda=\frac{1}{2}$ のときは [I-N-O-Y] で示されている。

参考文献

[A] A. Aluthge: *On p-hyponormal operators for* $0<p<1$, Integral Equations Operator Theory, **13** (1990), pp. 307–315.

[A-O] T. Ando and K. Okubo: *Hölder type inequalities associated with operator radii and Schur products*, Linear and Multilinear Algebra, **43** (1997), pp. 53–61.

[G-K] I. C. Gohberg and M. G. Krĕin: *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators* , Translations of Mathematical Monnographs, **18**, Amer. Math. Soc., 1969.

[H] J. A .R. Holbrook: *On the power-bounded operators of Sz.-Nagy and Foiaş*, Acta. Scie. Math.(Szeged), **29** (1968), pp. 297–310.

[I-N-O-Y] M. Ito, H. Nakazato, K. Okubo and T. Yamazaki: *On generalized numerical range of the Aluthge transformation*, Linear Algebra Appl. **370** (2003), pp. 147-161.

[N-F] Sz.-Nagy and C. Foiaş: *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*, North–Holland Publishing Company, 1970

[O] K. Okubo: *On weakly unitarily invarriant norm and the Aluthge transformation*, Linear Algebra Appl. **371** (2003), pp.369-375.

[Y] T. Yamazaki: *On numerical range of the Aluthge transformation*, Linear Algebra Appl., **341** (2002), pp. 111–117.

[W] P. Y. Wu: *Numerical range of Aluthge transform of operator*, Linear Algebra Appl., **357** (2002), pp. 295–298.