数理解析研究所講究録 1430 巻 2005 年 122-135

Rayleigh-Bénard 対流におけるカオス遷移

広島大理 八幡英雄 (Hideo YAHATA)
Dept. of Physical Sciences, Hiroshima University, Hiroshima 739-8526

1 Introduction

Rayleigh-Bénard(RB) 対流は Rayleigh 数 Ra、Prandtl 数 Pr、容器のアスペクト比などの外部制御パラメータの変化により極めて多様な時空間構造を示す代表的な非線型非平衡系の一つである。1980 年前後に多くの実験家により、少数自由度力学系の生成する決定論的カオスが、連続体自由度をもつ流体系であるこの系で典型的に観測されるに至り、流体カオスの観点から新たな興味がもたれるようになった。その際、流体実験はアスペクト比の小さい系において、対流の空間構造が高い対称性をもつような条件下で行われた。このため、流体カオス発生の機構を明らかにするため Navie-Stokes 系の simulation を試みるとき、実験と整合的な境界条件を課すことが要求されるように思われる。

以前にこの研究会で RB 対流の MAC simulation の結果を報告したことがある[1)]。系のパラメータは Gollub-Benson(GB)[2)]の直方体容器中の水を用いた実験にあわせて、$Pr = 5.0$, アスペクト比 $\Gamma_x = 3.5$, $\Gamma_y = 2.0$ とおいた。Ra の増加とともに少数自由度カオスに特徴的な経路をへて非周期的運動を発生したが、対流の空間構造が観測されているような 2-ロール状態ではなく、2-ロールおよび 3-ロール状態の混合状態であったため実験との比較は直接的には不可能であった。今回の計算ではこの点を改良して主流が 2-ロール状態となるように設定した。さらに $Pr = 2.5$ の系に対しては、Gollub-Benson-Steinman(GBS)[3)]の実験の他に Mukutomoni-Yang(MY)[4)]の SIMPLE 法による simulation 結果があるので、今回はこの外部条件 ($Pr = 2.5$, $\Gamma_x = 3.5$, $\Gamma_y = 2.0$) で simulation を行い、これら先行の結果と比較することにした。また、$Pr = 5.0$ に対しては上述のように Gollub-Benson の同様の条件下での実験があるので、この場合に対しても計算を行った。

一方、Navier-Stokes 系を差分法によって計算するとき、特にその非線型項 (対流項) の離散化の精度が問題になる。MAC 法においては通常 staggered grid を用いて計算を安定化させ格子幅 h に対して 2 次の精度をもつが、結果の妥当性が自動的い保証されているわけではない。そこで今回は MAC 法の他に、3 次精度の上流差分を用いた Leonard の QUICK 法[5)] を用いた計算を行い相互に結果を比較した。

2 Formulation of the Problem

本稿では直方体の容器 $\{(x,y,z)|0<x<2L_x, 0<y<2L_y, 0<z<2L_z\}$ (ただし、z 軸は鉛直上向きにとる) 中に閉じ込められた Boussinesq 流体の底部水平等温面の温度 T_1 を蓋部水平等温面の温度 T_2 よりも温度差 $T_d = T_1 - T_2$ 高温に保ったとき発生する対流を扱う。ここで容器の側面は断熱条件を満たしていると仮定する。系を記述する物理量として、流体の平均密度 ρ、動粘性率 ν、温度伝導率 κ、体積膨脹係数 α、重力加速度 g、z 軸方向の単位ベクトル $\mathbf{e}_z = (0,0,1)$ を定義する。系の速度場を $\mathbf{u}$、温度場を T、圧力場を P とし、対流がない熱伝導状態の温度を $T_s(z) = T_1 - T_d z/2L_z$、平衡圧力を P_s とすると、対流場の速度場は $\mathbf{u}$、温度場は $\delta T = T - T_s$、圧力場は $\delta P = P - P_s$ となる。長さを L_z、時間を L_z^2/κ、温度を $\kappa\nu/\alpha g L_z^3$ を単位にして無次元化すると、対流場 $\mathbf{u}(u,v,w)$

(または $\mathbf{u}(u_x, u_y, u_z)$), δT, δP の運動方程式は次の形をとる：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{uu}) = -\nabla(\frac{\delta p}{\rho}) + Pr\nabla^2\mathbf{u} + Pr\delta T\mathbf{e}_z \tag{1}$$

$$\frac{\partial \delta T}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\delta T) = \nabla^2 \delta T + \frac{1}{16}(Ra)w \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{3}$$

ここで方程式は 2 個の無次元パラメータによって特徴づけられている：すなわち Rayleigh 数 $Ra = \alpha g(2L_z)^3 T_d/\kappa\nu$ および Prandtl 数 $Pr = \nu/\kappa$ である。境界条件としては、速度場は全境界面ですべりなし条件を満たし、温度場は上下水平壁で等温条件、各側壁で断熱条件を満たすと仮定する。

$$u = \partial_x u = v = w = \partial_x \delta T = 0 \text{ on } \ x = 0, 2\Gamma_x \tag{4}$$

$$u = v = \partial_y v = w = \partial_y \delta T = 0 \text{ on } \ y = 0, 2\Gamma_y \tag{5}$$

$$u = v = w = \partial_z w = \delta T = 0 \text{ on } \ z = 0, 2 \tag{6}$$

ここで直方体容器のアスペクト比は $\Gamma_x = L_x/L_z$ および $\Gamma_y = L_y/L_z$. によって定義される。

本稿では、QUICK 法と MAC 法を用いて、方程式系 (1) ~ (3) を境界条件 (4) ~ (6) の下で、Pr、Γ_x, Γ_y を GB あるいは GBS の実験に整合的な値に指定し、Ra は次々に上昇させていく各々の値で固定して simulation を行い、対流の時空間構造の遷移を追跡した結果を報告する。

まず計算に用いた差分法について簡単に述べる。直方体領域を、等方一様の立方体格子に分割し、格子の体心点 (I, J, K) は現実の点 $x = (I-\frac{1}{2})(2\Gamma_x/N_x), y = (J-\frac{1}{2})(2\Gamma_y/N_y), z = (K-\frac{1}{2})(2/N_z)(I = 1, 2, ..., N_x; J = 1, 2, ..., N_y; K = 1, 2, ..., N_z)$ を表現しているとする。ここで、N_x, N_y, N_z は直方体の分割数を表し、格子の幅 h は、等方性条件 $h = 2\Gamma_x/N_x = 2\Gamma_y/N_y = 2/N_z$ を満たすように定める。各場の変数は staggered 格子をなすように配置する: 温度場と圧力場は体心点に置いて $\delta T_{I,J,K}$, $\delta p_{I,J,K}$、一方速度場の 3 成分は各速度成分に直交する格子面の面心点に置いて $u_{I\pm\frac{1}{2},J,K}$, $v_{I,J\pm\frac{1}{2},K}$, $w_{I,J,K\pm\frac{1}{2}}$ と配置する。空間微分は各スタガード格子点上で打ち切り誤差 h^2 の中心差分、時間微分は打ち切り誤差 h の Euler 差分で置き換える。MAC 法と QUICK 法の差は非線型対流項の扱いにある。QUICK 法においては、例えば式 (1) の x 成分の対流項

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}u) = u\partial_x u + v\partial_y u + w\partial_z u \tag{7}$$

は u_x の評価点 $(i+\frac{1}{2}, j, k)$ において次のように近似される:

$$(u\partial_x u)_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{F^x_{i+1,j,k} - F^x_{i,j,k}}{h}, \tag{8}$$

$$(v\partial_y u)_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{F^y_{i,j+1,k} - F^y_{i,j,k}}{h}, \tag{9}$$

$$(w\partial_z u)_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{F^z_{i,j,k+1} - F^z_{i,j,k}}{h} \tag{10}$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
F^x_{i,j,k} &= U_{i,j,k}\frac{u_{i-\frac{1}{2},j,k}+u_{i+\frac{1}{2},j,k}}{2} \\
-\frac{1}{16} &\{ \quad (U_{i,j,k}-|U_{i,j,k}|)(u_{i+\frac{3}{2},j,k}-2u_{i+\frac{1}{2},j,k}+u_{i-\frac{1}{2},j,k}) \\
&+ \quad (U_{i,j,k}+|U_{i,j,k}|)(u_{i+\frac{1}{2},j,k}-2u_{i-\frac{1}{2},j,k}+u_{i-\frac{3}{2},j,k})\}, \qquad (11) \\
F^y_{i,j,k} &= V_{i,j,k}\frac{u_{i+\frac{1}{2},j-1,k}+u_{i+\frac{1}{2},j,k}}{2} \\
-\frac{1}{16} &\{ \quad (V_{i,j,k}-|V_{i,j,k}|)(u_{i+\frac{1}{2},j+1,k}-2u_{i+\frac{1}{2},j,k}+u_{i+\frac{1}{2},j-1,k}) \\
&+ \quad (V_{i,j,k}+|V_{i,j,k}|)(u_{i+\frac{1}{2},j,k}-2u_{i+\frac{1}{2},j-1,k}+u_{i+\frac{1}{2},j-2,k})\}, \qquad (12) \\
F^z_{i,j,k} &= W_{i,j,k}\frac{u_{i+\frac{1}{2},j,k-1}+u_{i+\frac{1}{2},j,k}}{2} \\
-\frac{1}{16} &\{ \quad (W_{i,j,k}-|W_{i,j,k}|)(u_{i+\frac{1}{2},j,k+1}-2u_{i+\frac{1}{2},j,k}+u_{i+\frac{1}{2},j,k-1}) \\
&+ \quad (W_{i,j,k}+|W_{i,j,k}|)(u_{i+\frac{1}{2},j,k}-2u_{i+\frac{1}{2},j,k-1}+u_{i+\frac{1}{2},j,k-2})\} \qquad (13)
\end{aligned}
$$

但し、対流速度 $U_{i,j,k}=(u_{i-\frac{1}{2},j,k}+u_{i+\frac{1}{2},j,k})/2$, $V_{i,j,k}=(v_{i,j-\frac{1}{2},k}+v_{i+1,j-\frac{1}{2},k})/2$, and $W_{i,j,k}=(w_{i,j,k-\frac{1}{2}}+w_{i+1,j,k-\frac{1}{2}})/2$. を定義した。QUICK 法では式 (11) ~ (13) のそれぞれにさらに $O(h^2)$ の付加項があるがここではその表式は省略した。通常の MAC 法においては、式 (11) ~ (13) のそれぞれ第 1 項のみを取入れ、打ち切り誤差は h^2 となる:

$$
\begin{aligned}
(F^x_{i,j,k})^{MAC} &= U_{i,j,k}\frac{u_{i-\frac{1}{2},j,k}+u_{i+\frac{1}{2},j,k}}{2}=U_{i,j,k}\{u_{i,j,k}+\frac{h^2}{4}(\partial_x^2u)_{i,j,k}+\cdots\} \qquad (14) \\
(F^y_{i,j,k})^{MAC} &= V_{i,j,k}\frac{u_{i+\frac{1}{2},j-1,k}+u_{i+\frac{1}{2},j,k}}{2}=V_{i,j,k}\{u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}+\frac{h^2}{4}(\partial_y^2u)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}+\cdots\} \qquad (15) \\
(F^z_{i,j,k})^{MAC} &= W_{i,j,k}\frac{u_{i+\frac{1}{2},j,k-1}+u_{i+\frac{1}{2},j,k}}{2}=W_{i,j,k}\{u_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}+\frac{h^2}{4}(\partial_z^2u)_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}+\cdots \qquad (16)
\end{aligned}
$$

一方、QUICK 法においては MAC 法で取り入れた項に加えて、風上あるいは上流の場のデータを取り入れより正確に対流項を近似しようとするので、式 (11) ~ (13) の近似精度は次式により評価される:

$$
\begin{aligned}
F^x_{i,j,k} &= U_{i,j,k}\{u_{i,j,k}-\frac{3h^4}{128}(\partial_x^4u)_{i,j,k}\}+|U_{i,j,k}|h^3(\partial_x^3u)_{i,j,k}+\cdots \qquad (17) \\
F^y_{i,j,k} &= V_{i,j,k}\{u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}-\frac{3h^4}{128}(\partial_y^4u)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}\}+|V_{i,j,k}|h^3(\partial_y^3u)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}+\cdots \qquad (18) \\
F^z_{i,j,k} &= W_{i,j,k}\{u_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}-\frac{3h^4}{128}(\partial_z^4u)_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}\}+|W_{i,j,k}|h^3(\partial_z^3u)_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}+\cdots \qquad (19)
\end{aligned}
$$

各式の第 1 項は対流速度 $U_{i,j,k}$, $V_{i,j,k}$, $W_{i,j,k}$ によって運ばれる場の寄与で打ち切り誤差 h^4 をもち、第 2 項は式 (8) ~ (10) に対して 4 階の安定化数値粘性の寄与で打ち切り誤差 h^3 をもつ。

なお、以下の計算においては圧力 Poisson 方程式は、ICCG(Incomplete Cholesky decomposition and Conjugate Gradient) 法によって解いた。また、格子数は $N_z=24$, $N_x=\Gamma_xN_x$, $N_y=\Gamma_yN_z$ ととり、この場合時間積分の間隔は $\tau=10^{-4}[L_z^2/\kappa]$. ととった。なお次節に示す PSD の横軸 (振動数) の単位は κ/L_z^2 である。

3 Computational Results

本節ではアスペクト比 $\Gamma_x = 3.5$, $\Gamma_y = 2.0$ の直方体中の RB 対流の simulation を、流体の Prandtl 数 $Pr = 2.5$, $Pr = 5.0$ の場合に対して行った結果を述べる。対流の基本流は 2-ロール状態となるように初期条件を設定した。これらの外部条件設定は GB および GBS の実験におけるものと整合的にするためである。

先ず、2-ロール定常対流状態が Ra の増加により振動不安定を起し、振動対流状態に遷移する近傍で simulation を行い、遷移 Rayleigh 数 $(Ra)_{os}$ を求める。図 1 に定常対流の $Ra = 25000$ における 2-ロール状態を $z = 1.33$ における水平断面図の等値線によって示す。次に、ここから徐々に増加させたそれぞれの Ra の値で simulation を行い、振動対流状態を実現したときその振動部分の振幅の 2 乗を Ra に対してプロットしたものを局所温度場について図 2 に示す。これは、明らかに線形関係で分岐が通常の Hopf 分岐であって、分岐振幅 $\propto \sqrt{Ra-(Ra)_{os}}$ であることを示す。計算は MAC 法と QUICK 法を用いて、それぞれ格子数 $N_z = 24$ と $N_z = 32$ 爾対して行い離散化による計算精度の変動を調べた。これによると、MAC 法はかなり格子数変動が大きく精度に不安がある。これに対して QUICK 法の場合は扱った格子数でほぼ収束しているようにみえ、$(Ra)_{os} = 29750 \sim 29790$ を与える。この QUICK 法の結果は力学系を用いた線形安定性解析の結果[6] とも整合的で、信頼しうる結果と考えうる。

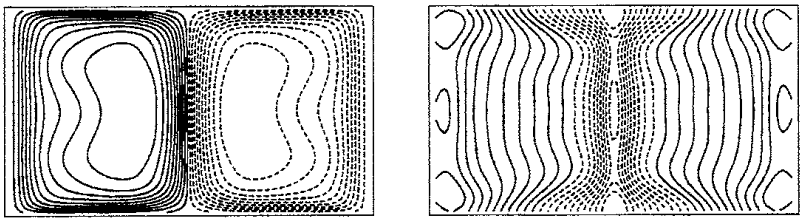

図 1: 2-ロール定常対流の水平断面 $z = 1.33$ における等値線図: $Ra = 25000$, $\Gamma_x = 3.5$, $\Gamma_y = 2.0$, $Pr = 2.5$. QUICK 法 ($N_z = 24$) による計算。. (a) $u_x(x,y,1.33)$; (b) $\delta\bar{T}(x,y,1.33)$ ここで、$\delta\bar{T}(x,y,1.33) = \delta T(x,y,1.33) - (\delta T_M + \delta T_m)/2$ 但し $\delta T_M = \mathrm{Max}_{(x,y)}\delta T(x,y,1.33)$ および $\delta T_m = \mathrm{Min}_{(x,y)}\delta T(x,y,1.33)$. 実線、点線はそれぞれ値が正、負の等値線を表す。

3.1 $Pr = 2.5$ の場合

GBS は約 70°C の高温の水を用いて、基本流を 2-ロール状態に維持しながら Ra を徐々に増加させ、流速を Laser-Doppler 流速計で計測して、$Pr = 2.5$ の場合の RB 対流の遷移実験を行った。それによると分岐列は、Ra を上昇させるにつれ周期振動 (f_1) → 周期倍振動数を伴った周期振動 $(f_1,\ f_1/2)$ → $(f_1,\ f_1/2,\ f_1/4)$ → 非周期的となり、ここから Ra を下げると、非周期的 → $(f_1,\ f_1/2,\ f_1/4, f^*)$ となり、スペクトルは極めて低い振動数 f^* を含むようになる。ただし、容器の寸法、Prandtl 数、基本流の比較的小量の変化によって、純粋な周期倍分岐カスケードを経ての非周期運動の発生は破れ、Ra の上昇過程でも周期倍振動数成分に低振動数成分 f^* が加わってしまう。そうであるにしても、低次元力学系において典型的に現れる純粋周期倍カスケードを経てのカオス化が、連続体である流体系でも現れた例として注目された。

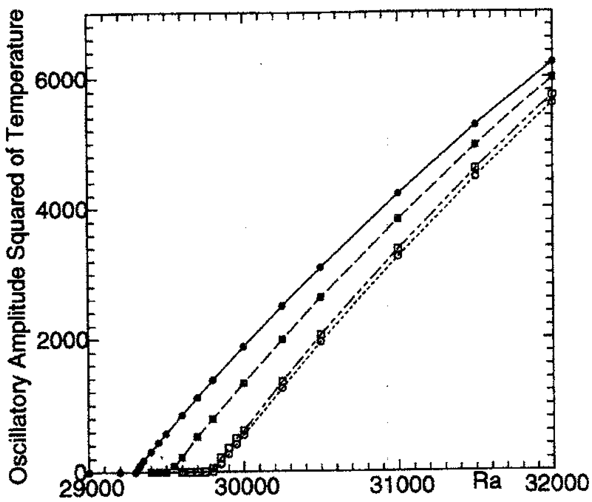

図 2: 局所温度場の平方 $(\delta T(3.6, 0, 1.0))^2$ の Ra 依存性: $Pr = 2.5$, $\Gamma_x = 3.5$, $\Gamma_y = 2.0$. 但し、•: $N_x = 84, N_y = 48, N_z = 24$(MAC) ■: $N_x = 112, N_y = 64, N_z = 32$(MAC) ○: $N_x = 84, N_y = 48, N_z = 24$(QUICK) □: $N_x = 112, N_y = 64, N_z = 32$(QUICK)

3.1.1 MAC 法による計算結果: $Pr = 2.5$ の場合

図 1 の 2-ロール状態を初期値として、$Pr = 2.5$ の場合 Ra をステップ的に上昇させながらそれぞれの Ra の値で MAC 法によって系の時空間発展の simulation を行った。その結果を局所温度場時系列に対するパワースペクトル密度 (PSD) と局所速度場時系列に対する Takens 相流または Poincare 断面によって図 3 に示す。$Ra = 42000$ においては振動数成分 f_1 の周期的運動で、相図は limit cycle を示すが、$Ra = 43000$ に上昇させると運動は低周波成分 f^* を伴い準周期的となり、しかも周期倍成分 $f_1/2$ に近い振動数 $(f_1 - f^*)/2$ に大きな成分をもつようになる。さらに Ra を増加させると f^* 成分は強度を増し、$Ra = 45400$ 付近で共鳴条件 $f_1 = 21f^*$ の locked 状態を経て、$Ra = 45600$ では成分 f^* が周期倍分岐を起し $f^* \to (f^*, f^*/2)$、その Poincare 断面が示すように torus doubling として現れる。この後 $Ra = 46000$ では非周期的になっている。

運動の分岐に伴って対流の空間構造がどのように変化するか速度成分 u_x と温度場 δT によって図 4 に示す。これを見ると、$Ra = 42000$ で周期的 (f_1) 状態では 2 枚の対称面 $x = \Gamma_x$, $y = \Gamma_y$ をもつ $C_{2v}(2mm)$ 対称性をもつが、$Ra = 43000$ の準周期的 (f_1, f^*) 状態においては点 $(x, y) = (\Gamma_x, \Gamma_y)$ を通る z 軸の回りの 2 回対称性 $C_2(2)$ に低下し、$Ra = 46000$ の非周期的状態においてはこの対称性も消失している。

3.1.2 QUICK 法による計算結果: $Pr = 2.5$ の場合

QUICK 法においても前節の MAC 法の場合と同様に図 1 の 2-ロール状態を初期値として、$Pr = 2.5$ の場合 Ra をステップ的に上昇させながらそれぞれの Ra の値で今度は QUICK 法によって系の時空間発展の simulation を行った。その結果を局所温度場時系列に対するパワースペクトル密度 (PSD) と局所速度場時系列に対する Takens 相流または Poincare 断面によって図 5 に示す。$Ra = 40000$ においては振動数成分 f_1 の周期的運動でその相図は 1 重ループで軌道は limit cycle

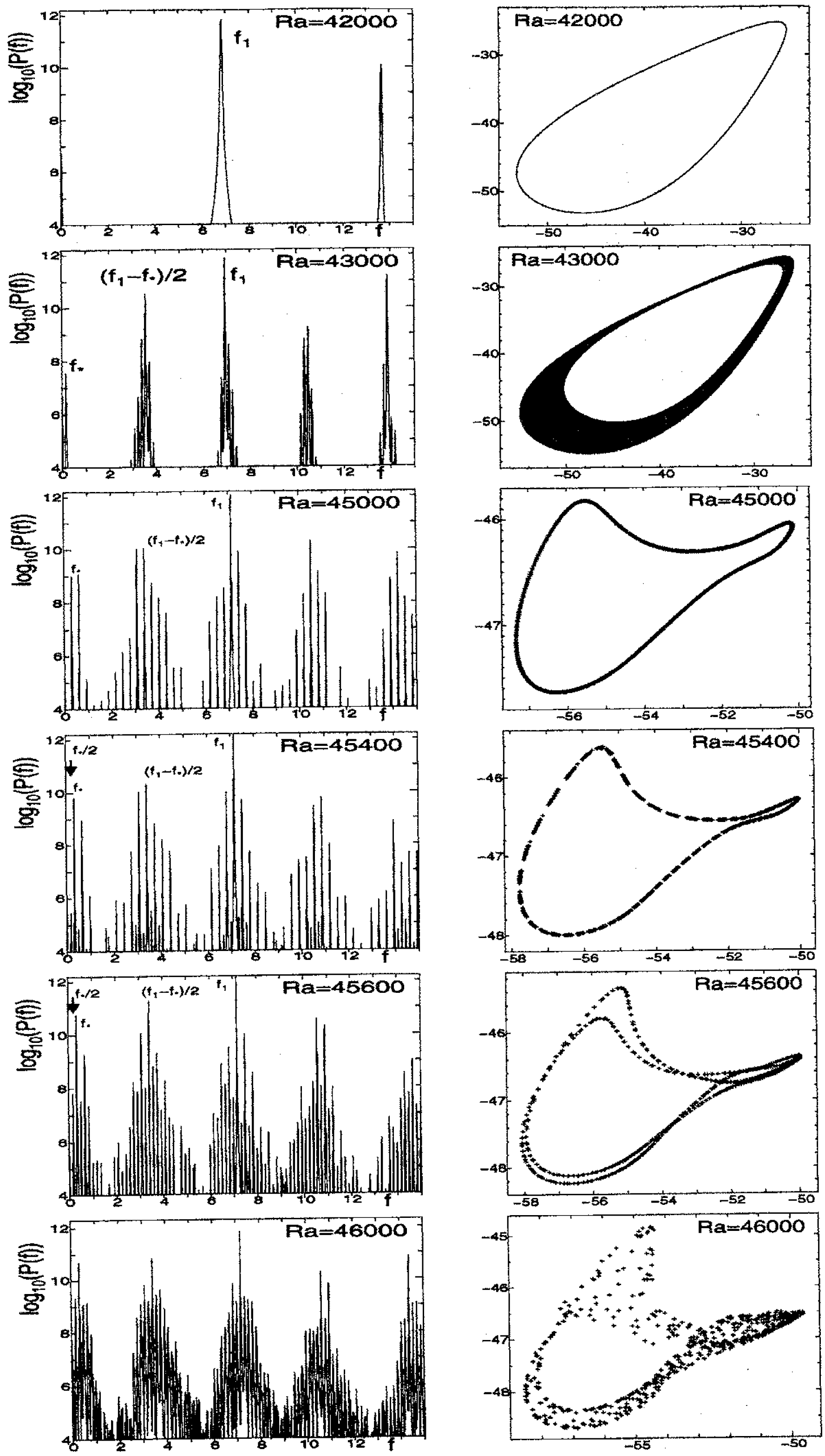

図 3: MAC 法による計算結果 ($Pr = 2.5$)。左側の図: 所温度場時系列に対する PSD; 右側の図: Takens プロット ($Ra = 42000, 43000$), Poincare 断面 ($Ra = 45000 \sim 46000$)。

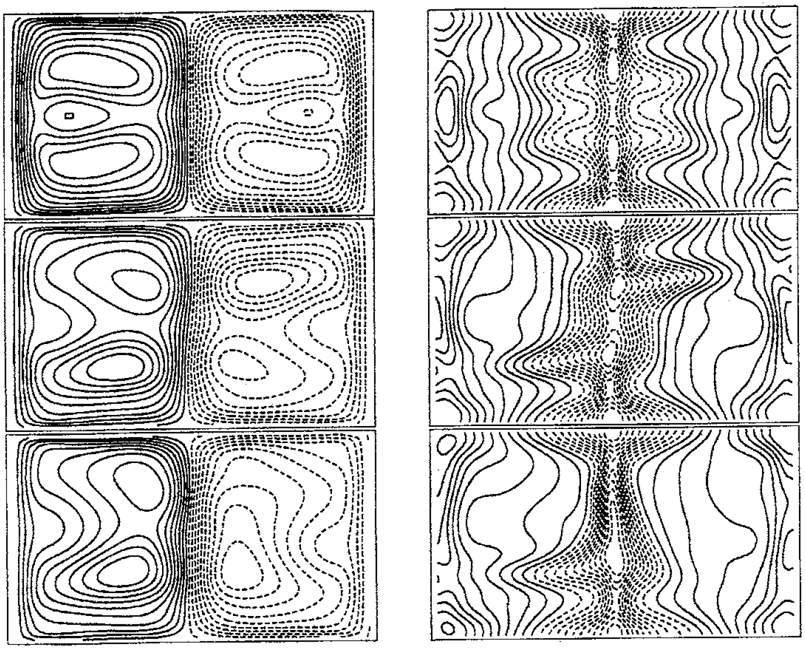

図 4: 対流の平面パターン: MAC 法による計算結果 ($Pr = 2.5$)。左側の図: $u_x(x, y, 1.33)$; 右側の図: $\delta T(x, y, 1.33)$. 上より、$Ra = 42000,\ 43000,\ 45000$.

を示す。$Ra = 44000$ に上昇させると運動は周期倍分岐を起して、周期倍成分 $f_1/2$, $f_1/4$ を含むが、同時に低振動数成分 f^* が発生して運動は準周期的となり、Poincare 断面はトーラスの断面に特徴的な閉曲線を示す。ただし断面の選択に依る為かすでに 2 重ループとなっている。さらに Ra を増加させると f^* 成分は強度を増し、$Ra = 45000$ では低振動数成分 f^* が周期倍分岐を起し Poincare 断面が示すように torus doubling により 4 重ループとして現れる。この後 $Ra = 46700$ ではこのループが乱れて運動が非周期的になっている。

運動の分岐に伴って対流の空間構造がどのように変化するか速度成分 u_x と温度場 δT の等高線図によって図 6 に示す。これを見ると、$Ra = 40000$ では基本振動数 f_1 の純粋周期的運動状態では 2 枚の対称面 $x = \Gamma_x$, $y = \Gamma_y$ をもつ $C_{2v}(2mm)$ 対称性をもつが、$Ra = 44000$ の準周期的 $(f_1, f^*, (f_1 - f^*)/2)$ 状態においては中心点 $(x, y) = (\Gamma_x, \Gamma_y)$ を通る z 軸の回りの 2 回対称性 $C_2(2)$ に低下し、$Ra = 45000$ の低振動数成分 f^* が周期倍分岐を起して成分 $f^*/2$ を発生した状態ではこの対称性も消失している。

3.1.3 対称性拘束条件下での QUICK 法による計算結果: $Pr = 2.5$

GBS の実験においては、周期倍分岐が起って前節および前前節におけるように低振動数成分 f^* を含まずに純粋な状態 (f_1, $f_1/2$, $f_1/4$) の発達が観測される。この差の原因としては通常ロールの空間対称性が分岐列を通して保存されるか否かが考えられている。事実、Libchaber et al.[7] は水銀を用いた RB 対流の実験で周期倍カスケードを実現するために、ロールの軸方向に磁場をかけて所期の結果を得た。そこでこの節では、強制的に対流の空間対称性の条件を境界条件として与えて simulation を行った結果を述べる。

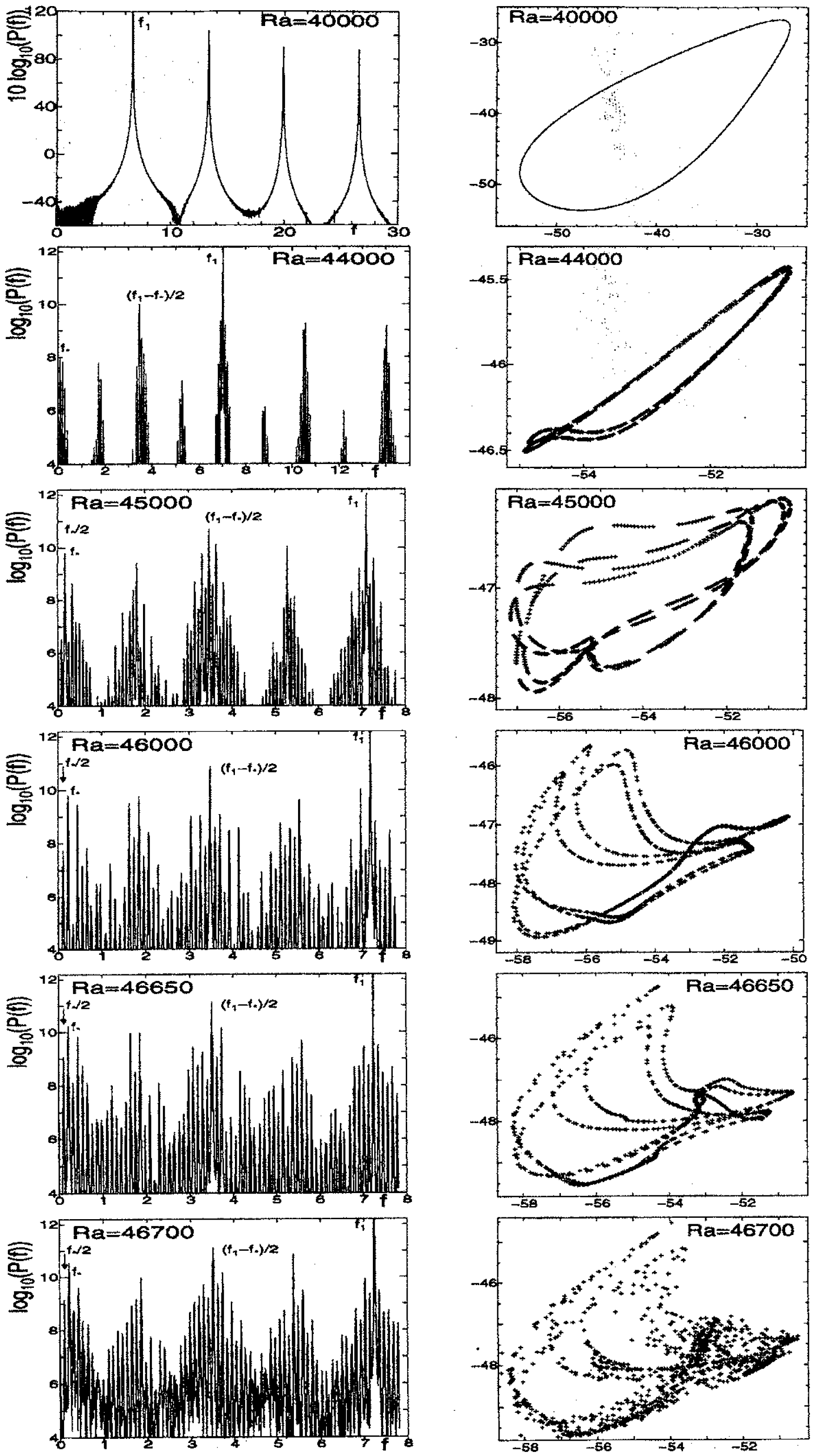

図 5: QUICK 法による計算結果 ($Pr = 2.5$)。左側の図: 所温度場時系列に対する PSD; 右側の図: Takens プロット ($Ra = 40000$), Poincare 断面 ($Ra = 44000 \sim 46700$)。

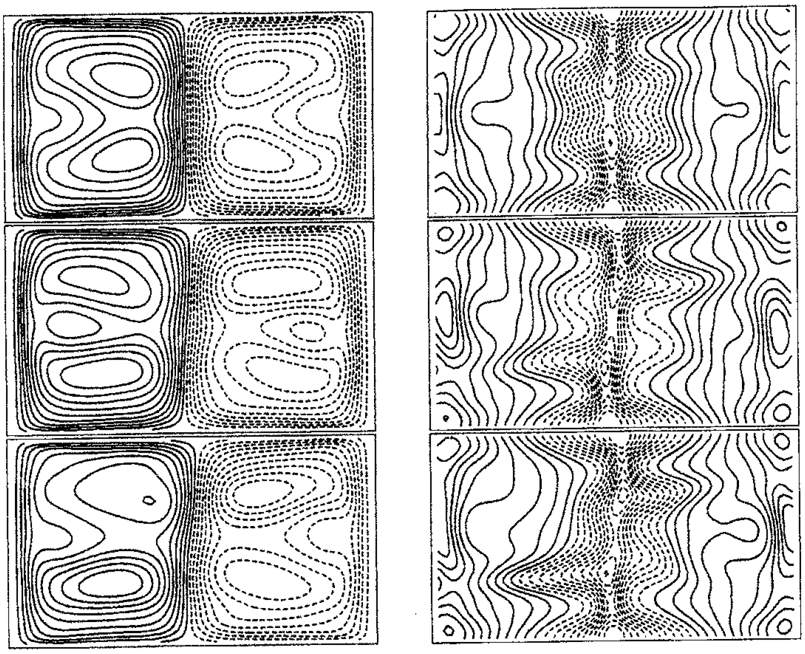

図 6: 対流の平面パターン: QUICK 法による計算結果 ($Pr = 2.5$)。左側の図: $u_x(x, y, 1.33)$; 右側の図: $\delta T(x, y, 1.33)$. 上より、$Ra = 40000,\ 44000,\ 45000$.

はじめに基本流は今までと同じ 2-ロ-ル状態として、$x = \Gamma_x$ 面に関して互いに鏡像関係になっている対称性 $C_{1h}(m)$ をもつ場合を考える。計算は領域 $0 < x < \Gamma_x$, $0 < y < 2\Gamma_y$, $0 < z < 2$ に対して行い、非計算領域の拘束条件は $\Gamma_x < x < 2\Gamma_x$, $0 < y < 2\Gamma_y$, $0 < z < 2$ に対して

$$\begin{aligned} u_x(x,y,z,t) &= -u_x(2\Gamma_x - x, y, z, t),\quad u_y(x,y,z,t) = u_y(2\Gamma_x - x, y, z, t),\\ u_z(x,y,z,t) &= u_z(2\Gamma_x - x, y, z, t),\quad \delta T(x,y,z,t) = \delta T(2\Gamma_x - x, y, z, t) \end{aligned} \tag{20}$$

となる。QUICK 法による計算結果を図 7 に示す。$Ra = 35000$, $Ra = 43500$ においては周期倍分岐の結果、基本振動数成分を f_1 としてそれぞれ成分 (f_1, $f_1/2$), (f_1, $f_1/2$, $f_1/4$) を含み、相図は 2 重、4 重ループとなっている。しかも $Ra = 43500$ では非常に低い振動数成分 f^* が既に発生していて、それは 4 重ループの幅の広がりに現れている。さらに $Ra = 44000$ に上昇させると、低振動数 f^* はより発達し、運動は明白に準周期的 (f_1, $f_1/2$, $f_1/4$, f^*) となり、相流はトーラスとなって、その Poincare 断面は 4 個のループ断面がそれぞれ閉曲線となる。この先、$Ra = 44150$, $Ra = 44200$ においては f^* が周期倍分岐を起し、振動数成分はそれぞれ (f_1, $f_1/2$, $f_1/4$, f^*, $f^*/2$), (f_1, $f_1/2$, $f_1/4$, f^*, $f^*/2$, $f^*/4$) を含むようになる。Poincare 断面はこれに対応して $Ra = 44000$ における閉曲線がそれぞれ 2 重、4 重ループになっている。これらの分岐列の行き着く先として $Ra = 44300$ において運動は非周期的になっている。因にこの結果は GBS の実験結果をよく再現しているようにみえる。しかしながら、GBS の実験では対流の空間パターンを外部から C_{1h} 対称性をもつように制御はしていないので、この対称性は自発的に系が選択して生じているといえる。

C_{1h} 対称性を課した場合に、運動の分岐に伴って対流の空間構造がどのように変化するか速度成分 u_x と温度場 δT の等高線図によって図 8 に示す。これを見ると、$Ra = 30000$ で基本振動数 f_1 のみがらなる単純周期的領域では $C_{2v}(2mm)$ 対称性をもつが、$Ra = 35000$ の周期倍成分 (f_1, $f_1/2$) を含む状態、さらに $Ra = 44000$ の低振動数成分 f^* を含む状態においては、鏡映面 $y = \Gamma_y$

に関する対称性が破れ対称性は C_{1h} に低下している。しかしこの C_{1h} 対称性が、基本振動数 f_1 の周期倍分岐列によって生じた 4 重ループトーラスの存続を保証しているといえる。

なお、C_{1h} 対称性下で MAC 法によって同じ条件で simulation を行った結果、$Ra = 30000 \sim 40000$ の範囲で基本振動数 f_1 の単純周期運動が、周期倍分岐を起こして成分 $f_1/2$ を生じることはなかった。これは、用いた差分法の違いによって定性的に異なる解を生じることを示す一例となる。

さらに、C_{2v} 対称性下で境界条件を設定し QUICK 法によって simulation を行った。基本流は同じ図 1 の 2-ロール状態で計算領域 $0 < x < \Gamma_x$, $0 < y < \Gamma_y$, $0 < z < 2$ ととり、、非計算領域の拘束条件は $\{(x,y) : \Gamma_x < x < 2\Gamma_x, 0 < y < 2\Gamma_y, 0 < z < 2\}$ に対して

$$u_x(x,y,z,t) = -u_x(2\Gamma_x - x, y, z, t), \quad u_y(x,y,z,t) = u_y(2\Gamma_x - x, y, z, t),$$
$$u_z(x,y,z,t) = u_z(2\Gamma_x - x, y, z, t), \quad \delta T(x,y,z,t) = \delta T(2\Gamma_x - x, y, z, t) \tag{21}$$

$\{(x,y) : 0 < x < \Gamma_x, \Gamma_y < y < 2\Gamma_y, 0 < z < 2\}$ に対して

$$u_x(x,y,z,t) = u_x(x, 2\Gamma_y - y, z, t), \quad u_y(x,y,z,t) = -u_y(x, 2\Gamma_y - y, z, t),$$
$$u_z(x,y,z,t) = u_z(x, 2\Gamma_y - y, z, t), \quad \delta T(x,y,z,t) = \delta T(x, 2\Gamma_y - y, z, t) \tag{22}$$

$\{(x,y) : \Gamma_x < x < 2\Gamma_x, \Gamma_y < y < 2\Gamma_y, 0 < z < 2\}$ に対して

$$u_x(x,y,z,t) = -u_x(2\Gamma_x - x, 2\Gamma_y - y, z, t), \quad u_y(x,y,z,t) = -u_y(2\Gamma_x - x, 2\Gamma_y - y, z, t),$$
$$u_z(x,y,z,t) = u_z(2\Gamma_x - x, 2\Gamma_y - y, z, t), \quad \delta T(x,y,z,t) = \delta T(2\Gamma_x - x, 2\Gamma_y - y, z, t) \tag{23}$$

と設定した。QUICK 法による結果は、$Ra = 30000 \sim 40000$ の範囲で基本振動数 f_1 の単純周期運動が存続し、周期倍分岐による状態 (f_1,$f_1/2$) の発生は見出さなかった。この同じ対称性拘束下で、MY は SIMPLE 法による simulation を行い、純粋周期倍分岐列による非周期運動の発生を見出している。この点で、QUICK 法と SIMPLE 法が異なる遷移列を与えている。

3.2 $Pr = 5.0$ の場合

GB の実験において、$Pr = 5.0$ の場合平均流を 2-ロール状態として Ra を上昇させていくと、基本振動数 f_1 の単純周期的振動状態 → 基本振動数成分 f_1, f_2 の準周期的振動状態 → phase-locked 状態 f_1/f_2 = 有理数 → 非周期的となる。

3.2.1 QUICK 法による計算結果: $Pr = 5.0$ の場合

$Pr = 2.5$ の場合と同様にして 2-ロール状態を初期値として、$Pr = 5.0$ の場合 Ra をステップ的に上昇させながらそれぞれの Ra の値で QUICK 法によって系の時空間発展の simulation を行った。その結果を局所温度場時系列に対する PSD と局所速度場時系列に対する Takens 相流または Poincare 断面によって図 9 に示す。$Ra = 57250$ においては振動数成分 f_1, f_2 の準周期的運動で、相図はトーラスを示すが、$Ra = 57300$ に上昇させると運動は成分 f_2 が発達し Poincare 断面では高次の共鳴状態にあるようにみえる。さらに $Ra = 57450$ に増加させると時系列の切り出しの場所によって、PSD および Poincare 断面が周期的である部分と非周期的である部分に分かれる (図 9 の $Ra = 57450$ におけるそれぞれ 2 個の図を比較参照)。この後 $Ra = 57500$ では非周期的になっている。

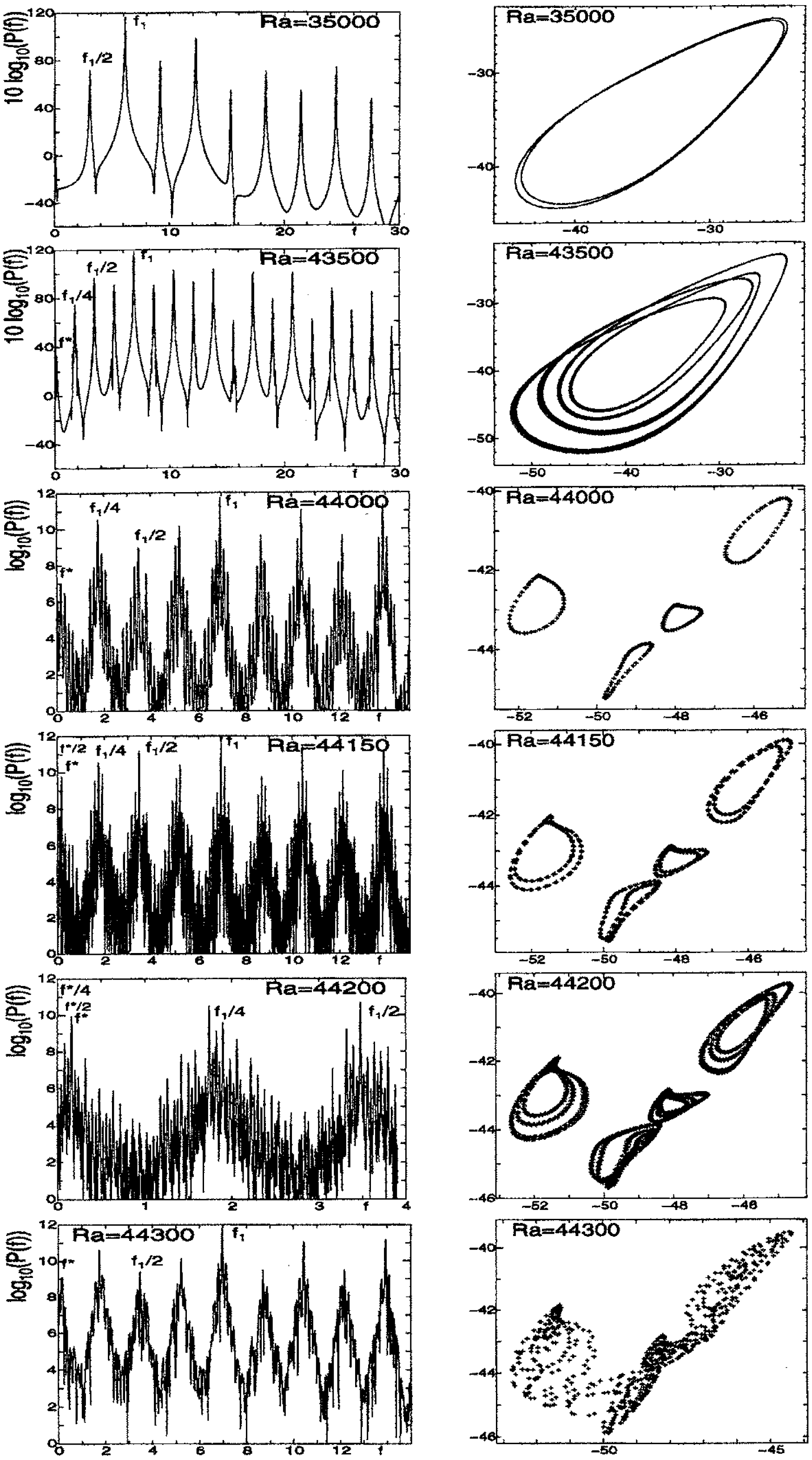

図 7: C_{1h} 対称性拘束下での QUICK 法による計算結果 ($Pr = 2.5$)。左側の図: 所温度場時系列に対する PSD; 右側の図: Takens プロット ($Ra = 35000, 43500$), Poincare 断面 ($Ra = 44000 \sim 44300$)。

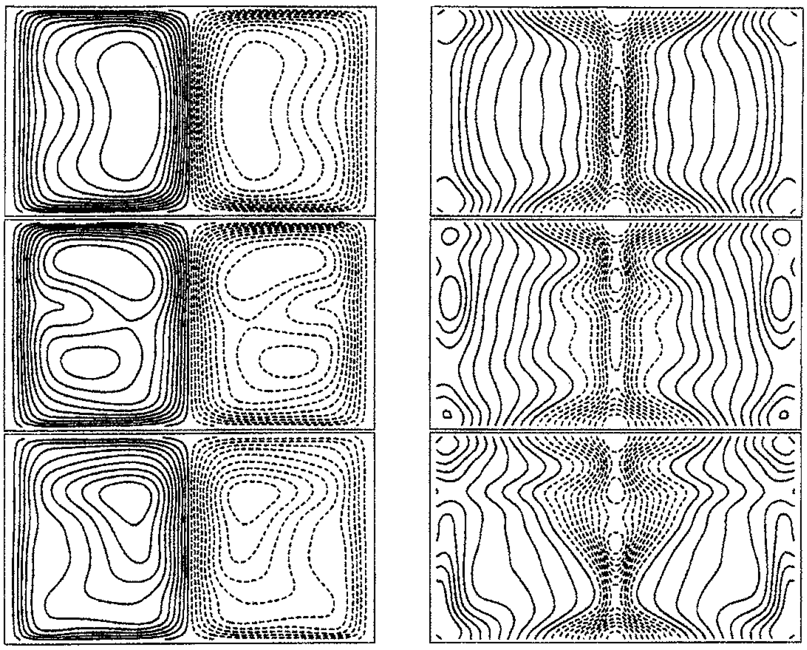

図 8: 対流の平面パターン: 対称性拘束下の QUICK 法による計算結果 (Pr = 2.5)。左側の図: $u_x(x, y, 1.33)$; 右側の図: $\delta T(x, y, 1.33)$. 上より、$Ra = 30000(f_1\text{only})$, $35000(f_1, f_1/2)$, 44000.

これを時系列でみたのが図 10 で、Ra を上昇させるにつれ間歇的バーストが発生しその頻度が次第に密になって運動の非周期化が進行していくことがみえる。

運動の分岐に伴って対流の空間構造がどのように変化するか速度成分 u_x と温度場 δT の等高線図によって図??に示す。これを見ると、$Ra = 57250$ で基本振動数 f_1 の強度が強い準周期的領域では鏡映面 $y = \Gamma_x$ に関する $C_{1h}(m)$ 対称性をもつが、$Ra = 57500$ の非周期的状態においては、この対称性は消失してしまう。

まだ述べるべきことはあるが、紙面も尽きたのでここで終りとする。

参考文献

[1] H. Yahata: J. Phys. Soc. Jpn **69**(2000), 1384.

[2] J. P. Gollub and S. V. Benson: J. Fluid Mech. **100**(1980), 449.

[3] J. P. Gollub, S. V. Benson and J. Steinman: Ann. NY Acad. Sci. **357**(1980), 221.

[4] D. T. Mukutomoni and K. T. Yang: Trans. ASME J. Heat Transfer **115**(1993), 360; 367.

[5] B. P. Leonard: in *Handbook of Numerical Heat Transfer* ed. W. J. Mincowyoz et al. (Wiley, 1988) p. 347.

[6] H. Yahata: 投稿中.

[7] A. Libchaber, S. Fauve and C. Laroche: Physica **7D**(1983), 73.

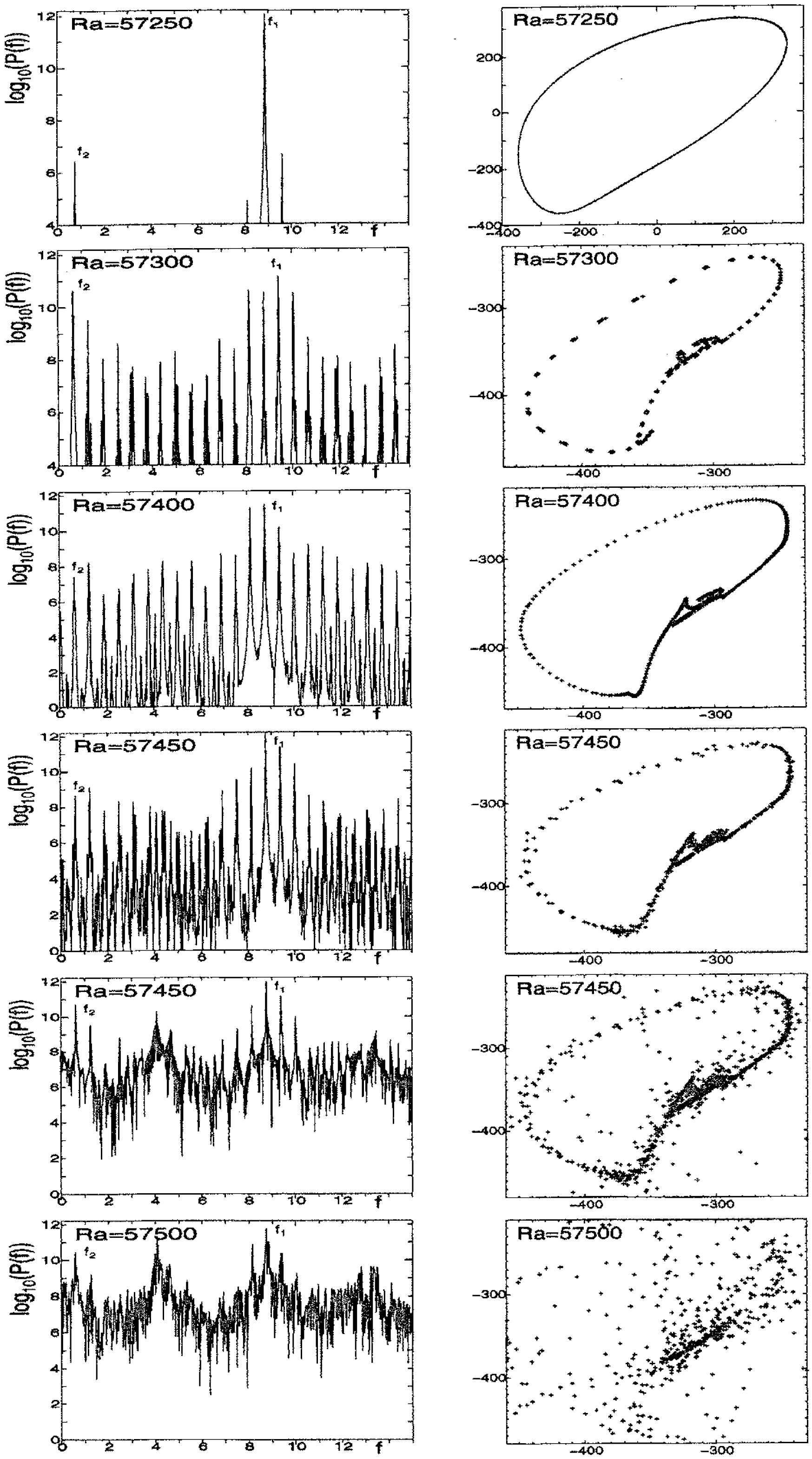

図 9: QUICK 法による計算結果 ($Pr = 5.0$)。左側の図: 所温度場時系列に対する PSD; 右側の図: Takens プロット ($Ra = 57250$), Poincare 断面 ($Ra = 57300 \sim 57500$)。

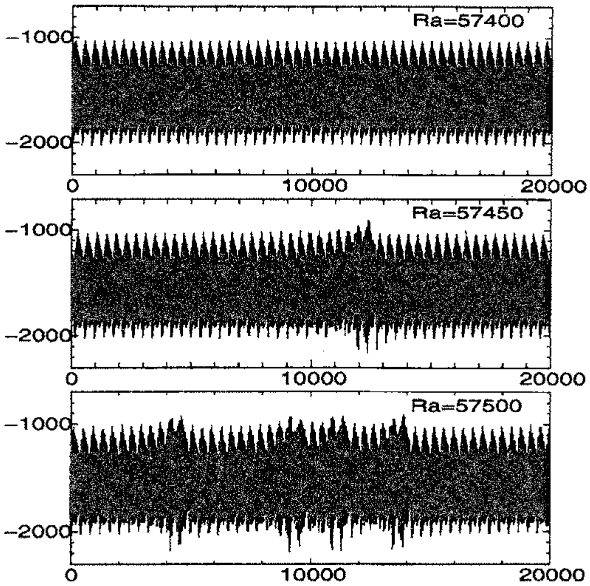

図 10: QUICK 法による計算結果 ($Pr = 5.0$)。所温度場時系列における間歇的バーストの発生 ($Ra = 57400 \sim 57500$)。横軸の単位は、$\Delta t = 10\tau$。

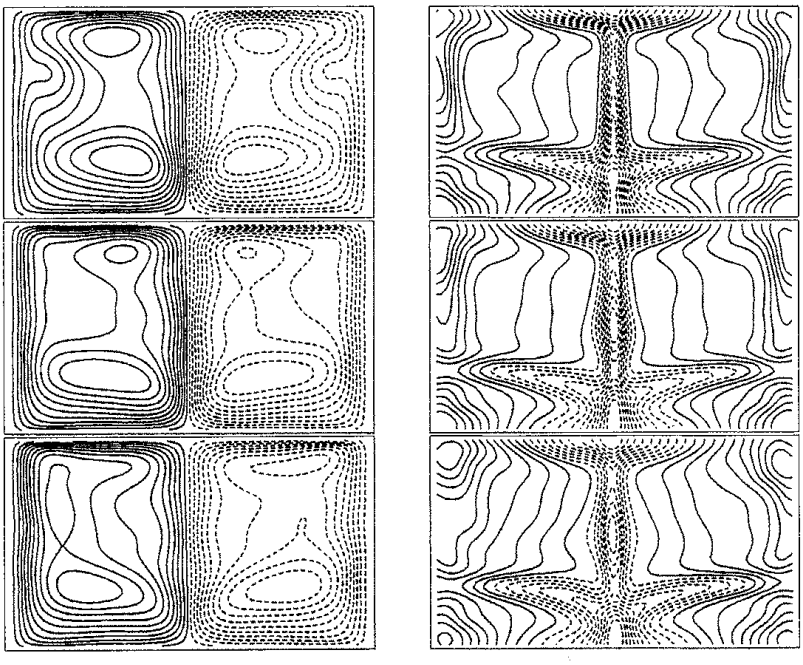

図 11: 対流の平面パターン: QUICK 法による計算結果 ($Pr = 5.0$)。左側の図: $u_x(x, y, 1.33)$; 右側の図: $\delta T(x, y, 1.33)$. 上より、$Ra = 57250$, 57400, 57500.