数理解析研究所講究録 1430 巻 2005 年 146-159

非線形 SCHRÖDINGER 方程式の爆発解と NELSON 過程の道の幾何 (FORMATON OF SINGULARITIES IN SOLUTIONS OF THE NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATIONS AND SAMPLE PATH PROPERTIES OF THE CORRESPONDING NELSON DIFFUSIONS)

名和範人 (HAYATO NAWA)

大阪大学大学院基礎工学研究科 数理教室

ABSTRACT. 擬共型変換で不変となるような非線形Schrödinger方程式の爆発解の爆発時刻付近の漸近挙動および極限形状について報告したい．このような不変性がある (時空 $1+d$ 次元の) 非線形Schrödinger方程式の爆発解は際立った特徴を持っている事が分かっている：解の爆発現象は，解析的にはコンパクト性の破綻とよばれる現象の一つであると見なすと，この"大きな" 群の作用が背後にあるカラクリであり，幾何学でいう bubble と類似の現象でもある．さらに，爆発解は，Brown 運動の ubiquitous のひとつの証でもあるような振る舞いをしていることも，だんだんと分かって来た．

0. SELF-FOCUSING OF LASER BEAM

非線形媒質中を伝播するレーザービームの自己集束を記述する，ひとつの数学的モデルとして，非線形 Schrödinger 方程式が現れるのは良く知られている(例えば[12])．ここでは，Maxwell の方程式を基礎方程式として用いる従来の方法とは異なる見方を紹介したい．

非線形媒質中の電磁場 $\mathbb{E}$ を考える．媒質の非線形効果は分極 $\mathbb{P}$ に現われる：$\varepsilon\mathbb{E} = \varepsilon_0\mathbb{E} + \mathbb{P}$. ここで，$\varepsilon$ は媒質の，ε_0 は真空の誘電率である．今，χ_e を (非線形) 感受率とすれば，$\mathbb{P} = \chi_e(\mathbb{E})\mathbb{E}$ であるが，感受率 χ_e が電場の強度に比例するとすれば，$\chi_e = \chi_e|\mathbb{E}|^2$ (ここで右辺の χ_e は比例定数とした) だから，電磁気学の教えるところによれば，屈折率 n は $n^2 = \varepsilon$ を満たすので，

$$n^2 = \varepsilon_0 + \chi_e|\mathbb{E}|^2$$

となる．Fermat の原理によれば，媒質中の 2 点 p_1、p_2 を結ぶ幾何光学的軌跡は、c を真空中の光速度として，

$$\inf \frac{1}{c}\int_{p_1}^{p_2} n\,dl$$

なる変分問題で特徴付けられるから，(局所座標系で) 幾何光学的軌跡は計量

$$ds^2 = n^2dl^2 = (\varepsilon_0 + \chi_e|\mathbb{E}|^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{0.1}$$

に対する測地線の方程式を満足することになることに注意しよう．

今，非線形媒質中に直交座標系 O-xyz を設定し，xy-平面に垂直に，z-軸に平行に単色光 (レーザービーム) が伝播して行くとする．$k \gg 1$ として，その電場 $\mathbb{E}$ が

$$\mathbb{E}(x,y,z,t) = \Re\frac{1}{k}\widetilde{\mathbb{E}}\left(\frac{x}{k},\frac{y}{k},\frac{z}{k^2}\right)\exp(i(kz-\omega t))$$

と表されているとする．波数の逆数 $\frac{1}{k}$ をこの系の特徴的な長さ (specific length)，ビームの進行方向を表す変数 z は，所謂，遅い変数 (slow variable) と考える．このとき，V を

$$V(\xi,\eta,\zeta) = \left|\widetilde{\mathbb{E}}\left(\frac{x}{k},\frac{y}{k},\frac{z}{k^2}\right)\right|^2, \quad \xi = \frac{x}{k}, \eta = \frac{y}{k}, \zeta = \frac{z}{k^2}$$

と定義すれば，ビームの強度分布 I は

$$I(x,y,z)=\frac{1}{k^2}V\left(\frac{x}{k},\frac{y}{k},\frac{z}{k^2}\right),$$

で与えられる．今，定常的にビームが xy-平面に入射されていることから

$$\frac{d}{dz}\iint_{\mathbb{R}^2} I(x,y,z)dxdy=0$$

であることに注意しよう．レーザービームの自己集束を，少々無理があるかもしれないが，数学的に表現すれば：強度分布 I は

$$I(x,y,z)dxdy \rightharpoonup \sum_{j=1}^{L} A_j\delta_{a_j}(dxdy)+r(x,y)dxdy, \quad \text{as} \quad z\uparrow z_0 \tag{0.2}$$

を満たすこととなろうか (収束は測度の弱収束の意味である)．ここで，A_j $(j=1,2,\cdots,L)$ は正数，$\delta_a(dxdy)$ は xy-平面の点 a に集中した 2 次元 Dirac 測度であり，r は $\mathbb{R}^2$ 上の "L^1-関数" である．実際には，光の持つ不確定性により，Dirac 測度のような特異点は表れないのかもしれないが，$\frac{1}{k^2}\approx 0$ と考えているようなモデルでは許容されるべきものかも知れない．

我々は，なんらかの形で，この I または V を与えてくれる法則 (方程式) を探していることになる．以上の仮定により，(0.1) は

$$ds^2=n^2dl^2=(k^2\varepsilon_0+\chi_e V(\xi,\eta,\zeta))(d\xi^2+d\eta^2+k^2d\zeta^2) \tag{0.3}$$

と書けるので，実際に測地線の方程式を求めてみると，$s\approx k\zeta$ という仮定のもと $\frac{1}{k}$ の高次の項を落とすと

$$\begin{cases} \frac{d^2\xi}{d\zeta^2}=\frac{1}{2}\frac{\chi_e}{\varepsilon_0+\frac{\chi_e V}{k^2}}\frac{\partial V}{\partial\xi} \\ \frac{d^2\eta}{d\zeta^2}=\frac{1}{2}\frac{\chi_e}{\varepsilon_0+\frac{\chi_e V}{k^2}}\frac{\partial V}{\partial\eta} \end{cases} \tag{0.4}$$

となり，空間の第 3 軸方向の変数を時間軸とみなした Newton の運動方程式が得られる．対応する波動光学は，この軌跡を分布 V を持つように $\frac{1}{k}$ 程度「ぼかした」ものと考えられる．この「ぼかす」方法の一つとして，Nelson の確率過程量子化 [9,10] の精神に則っとると(この小文の付節も参照)，対応する過程は

$$\begin{cases} dX_\zeta=b(X_\zeta,t)d\zeta+\sqrt{\frac{1}{k}}dB_\zeta, \\ b=\frac{\hbar}{m}(\Re+\Im)\frac{\nabla\psi}{\psi} \end{cases} \tag{0.5}$$

を満足し，ここで，分布 V を決定する ψ は次の Schrödinger 方程式の解である：

$$\left\{2i\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)+\frac{1}{\varepsilon_0}\ln\left(1+\frac{\chi_e}{k^2\varepsilon_0}V(\xi,\eta,\zeta)\right)\right\}\psi(\xi,\eta,\zeta)=0. \tag{0.6}$$

$\frac{V}{k^2}\ll 1$ のとき，これは

$$2i\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial\zeta}\psi+\frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)\psi+\frac{\chi_e}{\varepsilon_0}V(\xi,\eta,\zeta)\psi=0 \tag{0.7}$$

と近似でき，また $\frac{V}{k^2}\approx 1$ のときも漸近展開の第一項までの近似と思えば正しい式である．または，ビームの強度 V の大きなところでは，χ_e が「くりこまれている」と考える（(0.4) で，$\frac{\chi_e V}{k^2}$ が定数のように見える）べきかもしれない．いずれにせよ，Nelson の確率過程量子化の処方せんでは，幾何光学的な光跡 X_ζ の「分布」は$|\psi|^2$ であり，これが強度分布を与えるはずだから（$V\propto|\psi|^2$），非線形の前の定数を 1 としてしまえば，非線形 Shrödinger 方程式

$$2i\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial\zeta}\psi+\frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)\psi+|\psi|^2\psi=0 \tag{0.8}$$

を得る．これが V を，即ち，強度分布 I を決定する方程式である．この考え方の利点は，自然に複素振幅が得られることと，波数の逆数 $\frac{1}{k}$ が近似パラメーターであることが明確になっていることである．

この小文では，実際に(0.8) の爆発解と呼ばれるものが，(0.2) のように振る舞うことを数学として証明することができることを紹介し（第 2 節），さらに詳細な爆発解の性質を知るためには，上記に導入した Nelson 過程 (0.5) の解（弱解 = 道の空間の上の測度）を考察することが重要であることを報告したい（第 3 節）．

1. Nonlinear Schrödinger Equations

前節で導出した Schrödinger 方程式 (0.8) を一般化して ($k=1$ と無次元化しておく)，$1+d$ 時空で次のような非線形相互作用を持った Schrödinger 方程式の初期値問題を考える．

$$\begin{cases} \text{(NLS)} \quad 2i\dfrac{\partial\psi}{\partial t} + \triangle\psi + |\psi|^{p-1}\psi = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \\ \text{(IV)} \quad \psi(0) = \psi_0 \in H^1(\mathbb{R}^d) \end{cases}$$

ここで，$p \in (1, 2^*-1)$ とし($d \geqq 3$ に対し $2^* = \frac{2d}{d-2}$, $d=1,2$ のとき$2^*=\infty$) である．このとき $\psi \in C([0,T_m); H^1(\mathbb{R}^d))$ なる一意的な時間局所解 ($T_m > 0$ は解の最大延長時刻) が存在することは周知の事実であり，次の「粒子数」とエネルギー（ハミルトニアン）の保存則が成立する (Ginibre-Velo '79, Kato '87)：

$$\|\psi(t)\|^2 = \|\psi(0)\|^2;$$
$$\mathcal{H}_{p+1}(\psi(t)) \equiv \|\nabla\psi(t)\|^2 - \frac{2}{p+1}\|\psi(t)\|_{p+1}^{p+1} = \mathcal{H}_{p+1}(\psi_0).$$

ここで，$\|\cdot\|_q$ は空間変数に関する L^q ノルムである．特に $q=2$ のときは，単に $\|\cdot\|$ と添字を省略する．

我々は特に「擬共型」不変な場合 ($p = 1 + \frac{4}{d}$) に興味がある：

$$\text{(NSC)} \qquad 2i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \triangle\psi + |\psi|^{4/d}\psi = 0.$$

この場合のハミルトニアンを

$$\mathcal{H}(\psi(t)) \equiv \|\nabla\psi(t)\|^2 - \frac{2}{2+\frac{4}{d}}\|\psi(t)\|_{2+\frac{4}{d}}^{2+\frac{4}{d}}$$

と書くことにする．空間次元が 2 のとき，即ち $d=2$ のとき，(NSC) は前節 (0.8) 式 ($k=1$)となる．

この $p = 1 + \frac{4}{d}$という指数は，一見すると不思議に思えるが，以下に見るように方程式の解の性質と重要な関係があり，非線形項が 3 次であることは方程式の解の性質とはあまり関係がない；非線形の指数は次元と競合するのである．極めて prgamatic には，擬共型不変性とは第 2 節の (2.1) 式で与えられるような時空の変換に対して方程式が不変であることと理解してよいのだが((NLS) は$p = 1 + \frac{4}{d}$ のときに限り不変となる)．この方程式 (NSC) が持つ見かけ上の性質が解のそれにも受け継がれている．

次のように，指数 $p = 1 + \frac{4}{d}$ を境にして，方程式の記述する「世界」は劇的に変化する (この意味で，$p = 1 + \frac{4}{d}$ を臨界指数 critical power と呼ぼう)：

(1) Case 1: $p < 1 + \frac{4}{d}$ の場合
常に $T_m = \infty$ (時間大域解) である：エネルギーの保存則に次の Gagliardo-Nirenberg 不等式を用いると，$\|\nabla\psi(t)\|$ の a priori 評価を得ることができる．

$$\|f\|_{p+1}^{p+1} \leqq C\|f\|^{p+1-\frac{d}{2}(p-1)}\|\nabla f\|^{\frac{d}{2}(p-1)}.$$

(2) Case 2: $p \geqq 1 + \frac{4}{d}$ の場合
爆発解に接続する初期値のクラスが存在する (すべての解が爆発する訳ではなく，漸近的に自由な解や定在波解など大域解も存在し，解の世界は多様である)．ここで爆発解とは，

$$T_m < \infty, \quad \lim_{t\to T_m}\|\nabla\psi(t)\| = \infty$$

となる解を指す．

爆発解の存在は，重み付きの空間では，次の Virial 等式から示せる (Zakharov '72, Glassey 77, M. Tsutsumi '78)：

$$\||\mathbf{x}|\psi(t)\|^2 = \||\mathbf{x}|\psi(0)\|^2 + 2t\Im\langle\psi(0), \mathbf{x}\cdot\nabla\psi(0)\rangle + t^2\mathcal{H}_{p+1}(\psi(0))$$
$$- \frac{d}{p+1}\left(p+1-\left(2+\frac{4}{d}\right)\right)\int_0^t (t-\tau)\|\psi(\tau)\|_{p+1}^{p+1}d\tau,$$

$\mathcal{H}_{p+1}(\psi(0)) < 0$ の時，解が時間大域的に存在するとすれば，有限時間で右辺がゼロとなり矛盾する．$p = 1 + \frac{4}{d}$ のとき，Virial 等式は次のような簡単な形になることに注意：

$$\text{(1.1)} \qquad \||\mathbf{x}|\psi(t)\|^2 = \||\mathbf{x}|\psi(0)\|^2 + 2t\Im\langle\psi(0), \mathbf{x}\cdot\nabla\psi(0)\rangle + t^2\mathcal{H}(\psi(0))$$

この事実は，$p = 1 + \frac{4}{d}$ の場合に方程式の持つ対称性 (擬共型不変性) によるものと言える．

擬共型不変性についての詳細は，拙文 [7] や Sulem-Sulem [12] を参照されたい．

2. Blowup solutions at criticality

擬共型不変な場合，即ち $p=1+\frac{4}{d}$の時，次のような変換（これは伸長変換 (dilation) と擬共型変換 (psedo-conformal transformation) を合成したものである）を用いて爆発する特解を作れる (Weinstein '86, N '86)：

$$[\mathcal{G}(T)\psi](x,t)=(T-t)^{-d/2}\exp\left\{-\frac{i|x|^2}{2(T-t)}\right\}\psi\left(\frac{x}{T-t},\frac{t}{T(T-t)}\right),\qquad T>0; \tag{2.1}$$

を，定在波解 $Q(x)e^{i\frac{t}{2}}$ (Q は $\Delta Q-Q+|Q|^{\frac{4}{d}}Q=0$ の解) に作用させることにより

$$\widetilde{Q}(x,t)=(T-t)^{-d/2}\exp\left\{-\frac{i|x|^2}{2(T-t)}\right\}Q\left(\frac{x}{T-t}\right)\exp\left(\frac{it}{2T(T-t)}\right)$$

を得る．この解は

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to T}\|\nabla\widetilde{Q}(t)\|=\infty,\\
&\lim_{t\to T}\int_{\mathbb{R}^d}|x|^2|\widetilde{Q}(x,t)|^2dx=0,\\
&\lim_{t\to T}|\widetilde{Q}(x,t)|^2dx=\|Q\|^2\delta_0(dx)
\end{aligned}$$

を満たし，我々の目標が正しそうであることを示唆してくれるが，実は，Dirac 測度的な特異点が現れるという性質を除くと，それほど「一般的 (generic)」なものではない．

では，一般的な爆発解はどのようなものであるのかを Theorem 1 (とそれ以降の議論) として提示する前に，少しだけ定在波解について触れておこう．$p=1+\frac{4}{d}$の時，定在波解のうちの基底解 (ground state) は

$$\inf_{\substack{f\in H^1(\mathbb{R}^d)\\ f\neq 0}}\left\{\|\nabla f\|^2+\|f\|^2-\frac{2}{2+\frac{4}{d}}\|f\|_{2+\frac{4}{d}}^{2+\frac{4}{d}}\;\middle|\;\mathcal{H}(f)=0\right\}$$

で特徴付けられるが，以下の変分問題と同等なものとなる．

$$\mathcal{N}_1:=\inf_{\substack{f\in H^1(\mathbb{R}^d)\\ f\neq 0}}\left\{\|f\|^2\;\middle|\;\mathcal{H}(f)\leqq 0\right\}, \tag{2.2}$$

$$\mathcal{N}_2:=\inf_{\substack{f\in H^1(\mathbb{R}^d)\\ f\neq 0}}\frac{\|f\|^{\frac{4}{d}}\|\nabla f\|^2}{\|f\|_{2+\frac{4}{d}}^{2+\frac{4}{d}}}. \tag{2.3}$$

二つの変分値は無関係なものではなく，

$$\mathcal{N}_2=\frac{2}{2+\frac{4}{d}}\mathcal{N}_1^{\frac{2}{d}}$$

なる関係があり，特に $\mathcal{N}_2$ は補間不等式の最良定数を与える：

$$\|f\|_{2+\frac{4}{d}}^{2+\frac{4}{d}}\leqq\frac{1}{\mathcal{N}_2}\|f\|^{\frac{4}{d}}\|\nabla f\|^2.$$

実際に下限を実現するのが基底解 Q_gで，それは次の問題の球対称な正値解である (Weinstein '83, N '94)：

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}(Q_g)=0,\\
&\mathcal{N}_2=\frac{2}{2+\frac{4}{d}}\|Q_g\|^{\frac{4}{d}},\\
&\Delta Q_g-Q_g+|Q_g|^{\frac{4}{d}}Q_g=0.
\end{aligned}$$

以上の情報は，以下の Thoerem 1 の記述および証明にとって重要である．実際，N'94 においては，変分問題 (2.2) を解く方法が Theorem 1 の証明の難形となった．

いよいよ，一般的な爆発解がどのような振る舞いをするのかを見ることにしよう．そのために，今日では「くりこみ群的手法」と呼ばれるようになった方法を導入する．ψ を (NSC) の爆発解とし，時間列 $\{t_n\}$，スケールパラメーター $\{\lambda_n\}$ を

$$t_n \uparrow T_m, \quad \sup_{t\in[0,t_n)} \|\psi(t)\|_{2+\frac{4}{d}} = \|\psi(t_n)\|_{2+\frac{4}{d}},$$
$$\lambda_n = \frac{1}{\|\psi(t_n)\|_{2+\frac{4}{d}}^{1+\frac{2}{d}}}.$$

と定めて，これらを用いて爆発解を scale down して作られる関数列（時間推進，伸長変換と時間反転を行っている）：

$$\psi_n(x,t) :\stackrel{\mathrm{def}}{=} \lambda_n^{\frac{d}{2}} \overline{\psi(\lambda_n x, t_n - \lambda_n^2 t)}, \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{2.4}$$

の振る舞いを考察する（ここで，ψ の上のバーは複素共役を表す）．爆発解の爆発時間近傍での振る舞いは，関数列 $\{\psi_n(x,t)\}$ の $n\to\infty$ での振る舞いとして符号化 (encode) されたことになる．擬共型不変性より，ψ_n は，時刻 t_n で「くりこまれた」$\lambda_n^{\frac{d}{2}}\overline{\psi(\lambda_n x, t_n)}$ を初期値とする (NSC) の解であることに注意しよう．また，ここで $t_n = T_m$ と採ることはできない．それ故に，厳密には「くりこみ群」とは言えず，時間推進と伸長の「半直積」は「非線形な対応」となっているので，「くりこみ変換」と言った方がいいかもしれない．

半線形の熱方程式の場合のように爆発のオーダーが分かっている場合には，上記の λ_n の素性がハッキリとしている訳だから，$t_n = T_m$ と見た，伸長変換群による繰り込み操作だけでよく，その不動点である自己相似解が，爆発解の生成する特異点の特徴付けに重要な役割を果たす (Giga-Kohn '89)．しかし我々の場合はそうではない．だが，「悪いこと」ばかりではなく，我々の場合では，特異点の近傍だけではなく爆発解の全体像に関する情報もある程度得られる．

関数列 $\psi_n(x,t)$ の関数空間 $C([0,T];L^2(\mathbb{R}^d))$ (for any $T>0$) 内での振る舞い（コンパクト性の破綻の様子）を追跡することにより，次の定理を得る (N '94, '99 [7])：

Theorem 1. *We have:*

$$\psi_n(x,t) \sim \sum_{j=1}^{L} \psi^j(x-\gamma_n^j, t) + \varphi_n(x,t), \quad n\to\infty \tag{2.5}$$

in the strong topology of $C([0,T];L^2(\mathbb{R}^d))$ *(for any* $T>0$*). Here,*
(i) $\psi^j(x,t)$*'s are solutions of* (NSC) *in* $C_b(\mathbb{R}_+;H^1(\mathbb{R}^d))$ *with* $\mathcal{H}(\psi^j)=0$*;*
(ii) $\varphi_n(x,t)$ *solves:*

$$\begin{cases} 2i\dfrac{\partial\varphi_n}{\partial t} + \triangle\varphi_n = 0, & (x,t)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+, \\ \varphi_n(x,0) = \psi_n(x,0) - \sum_{j=1}^{L}\psi^j(x-\gamma_n^j,0), & x\in\mathbb{R}^d, \end{cases}$$

that is, $\varphi_n(x,t)$*'s are solutions of the free Schrödinger equation; and*
(iii) *the sequences* $\{\gamma_n^1\}$, $\{\gamma_n^2\}$, $\cdots$, $\{\gamma_n^L\}$ *are in* $\mathbb{R}^d$ *such that*
$\lim_{n\to\infty}|\gamma_n^j-\gamma_n^k| = \infty$ $(j\neq k)$*.*
In the original world of ψ*, we have*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[t_n-\lambda_n^2 T, t_n]} \left\| \overline{\psi(\cdot,t)} - \sum_{j=1}^{L}\psi_n^j(\cdot,t) - \widetilde{\varphi}_n(\cdot,t) \right\| = 0$$

with

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n^2 \sup_{t\in[t_n-\lambda_n^2 T, t_n]} \|\widetilde{\varphi}_n(t)\|_{2+\frac{4}{d}}^{2+\frac{4}{d}} = 0,$$

where

$$\psi_n^j(x,t) = \frac{1}{\lambda_n^{d/2}}\psi^j\left(\frac{x-\gamma_n^j\lambda_n}{\lambda_n}, \frac{t_n-t}{\lambda_n^2}\right),$$
$$\widetilde{\varphi}_n(x,t) = \frac{1}{\lambda_n^{d/2}}\varphi_n\left(\frac{x}{\lambda_n}, \frac{t_n-t}{\lambda_n^2}\right).$$

この定理の証明を若干改良すれば，もし，測度の族 $\{|\psi(x,t)|^2dx\}_{0\leqq t<T_m}$ が緊密 (tight) ($\forall\varepsilon>0$, $\exists R_0>0$ s.t. $R>R_0 \to \sup_t\int_{|x|>R}|\psi(x,t)|^2dx<\varepsilon$) であれば，$s_n := t_n - \lambda_n^2 T$. なる列にそって（必要なら部分列を取る），

$$|\psi(x,s_n)|^2dx \rightharpoonup \sum_{j=1}^{L}\|\psi^j(0)\|^2\delta_{a^j}(dx) + \mu(dx) \quad \text{as} \quad n\to\infty \tag{2.6}$$

なる収束が測度の弱収束の意味で成り立つことを示せる．ここで，測度 μ は $|\widetilde{\varphi}_n(x,t)|^2dx$ の極限として得られるものである．

Theorem 1 の内容を標語的に言えば，考えている「系の特徴的な解(ゼロエネルギーの時間大域解)」が，作用している「ノンコンパクトな群（伸長変換と平行移動）の軌道」に乗って「(関数空間の）無限の彼方」へと逃げていくのである．これを爆発解の振る舞いに則して言えば，爆発時刻付近での解の漸近展開第一項は，(NSC) それ自身の“零エネルギー”を持つ（有界な）“時間大域解”（定在波解がこれらの性質を持っている）を相似変換して得られる“有限個の特異点”の重ね合わせで記述され，また漸近展開第二項目以降は，まだ“干渉性”を持った自由Schrödinger方程式の解を用いて表現されると言うことになる：この事より解の絶対値の自乗は爆発時刻において Dirac 測度的特異点を持つことを示すことができて，レーザービームの自己集束のモデルと言う観点からは，ビームが有限個の焦げつきを作ったことになる；漸近展開第二項目以降はコンピュータを用いた数値実験等によれば，“肩”と呼ばれる“非特異”な部分を作ることになる．

ここで大事な点は，関数列 $\{\psi_n\}$ のコンパクト性が崩れて行く過程で，ψ^j 達が有限個しか出てこないことである．証明の中で鍵となっているのは，$L=\infty$ と仮定すると出て来る，

$$\limsup_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k}\mathcal{H}(\psi^j) \leqq 0$$

なる不等式である．これからすべての j について $\mathcal{H}(\psi^j)=0$ を証明することが肝要で，そのために，以下の Theorem 2 (これ自身，爆発解の存在定理として重要である；解が属する空間は Virial 等式 (1.1) が使える空間よりも広いことに注意) を用いている (N '93, 99 [7])：

Theorem 2.
$$\mathcal{H}(\psi_0)<0 \Rightarrow \sup_{t\in[0,T_m)}\|\nabla\psi(t)\| = \infty.$$

If $T_m=\infty$, we have that, for any $R>0$,

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{|x|>R}|\nabla\psi(x,t)|^2dx = \infty.$$

この定理から，極限として得られる ψ^j 達は，すべてゼロ以上のエネルギーを持つ ($\mathcal{H}(\psi^j)\geqq 0$) ことが分かるから，$\mathcal{H}(\psi^j)=0$ である．そして，変分値 $\mathcal{N}_1$ の特徴付けより $\|\psi^j(0)\|^2\geqq\mathcal{N}_1$ が分かり，$L<\infty$ が結論される．また次の等式も成立する：$\|\psi_0\|^2=\sum_{j=1}^{L}\|\psi^j(0)\|^2+\mu(\mathbb{R}^d)$. 初期値 ψ_0 が球対称である時は，$L=1$ で $a^1=0$ となる (原点は常に「爆発点」である) ことを付け加えておこう．また，爆発する特解とは違い，一般に測度 μ に相当する部分は消えることはないことも分かっている (N'99 [7])；$\widetilde{Q}(x,t)$ のような爆発解は稀な存在なのである．

測度の族 $\{|\psi(x,t)|^2dx\}_{0\leqq t<T_m}$ の緊密性 (tightness) についても簡単に触れておこう．次の定理が成り立つ(N '99 [7])．

Therorem 3. *Suppose that $p = 1 + \frac{4}{d}$. Suppose one of the following two conditions holds:*
(i) $d = 1$ *and* $\mathcal{H}(\psi_0) < 0$,
(ii) $d \geqq 2$, $\mathcal{H}(\psi_0) < 0$ *and* ψ_0 *being radially symmetric. Then we have* $T_m < \infty$, *that is, the corresponding solution* ψ *of* (NSC) - (IV) *blows up in finite time* T_m. *Furthermore the family of Radon measures* $\{|\psi(x,t)|^2 dx\}_{0 \leqq t < T_m}$ *defined by the solution* ψ *is tight.*

実は，Theorem 2 の証明にも，上記の緊密性に関する結果 Theorem 3 を用いている．重み付きの空間：$\psi_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ かつ $|x|\psi_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ならば Virial 等式 (1.1) が使えるので，$T_m < \infty$ のとき，測度の族 $\{|\psi(x,t)|^2 dx\}_{0 \leqq t < T_m}$ は，いつでも緊密 (tight) であることは容易に分かるのだが，一般の場合は難しい．重み $|x|$ を「うまく削って」Virial 等式の局所化されたものを考えて，無限遠方での L^2 mass を制御するのだが，そのためには工夫が必要で，(2.2) や (2.3) を局所化した問題と組み合わせて証明を行う．重み付きの空間では，その空間の性質として無限遠方での振る舞いが制限されているので，爆発解の存在証明は容易となっていたのである．一般の場合に，このように無限遠方での解の挙動を制御することは容易なことではないようであるのだが，爆発のオーダーが分かってしまうと，突然に「世界」は「平和」なものとなる；時間の「端」は空間のそれと「双対的」なのかもしれない．それを次章に見よう．

その前に，ここで，以上のような解析の不満な点 (問題点) を整理しておく．

問題点

(1) 漸近形を与える，エネルギーゼロ，運動量ゼロの解は定在波解だろうか？
(2) 離散的くりこみ群を連続的なものにかえられるか？この定理では，特異点の個数や生成される場所が点列の選び方によることを否定できない．極限形状において $a_i = a_j$ $(i \neq j)$ もあり得る．
(3) 極限形状に現れる測度 μ は絶対連続であろうか？
(4) ゼロエネルギーを持つ時間大域解の集合は「豊か」であろうか，それとも「痩せた」ものであろうか？
(5) 爆発解から定義される Radon 測度の族 $\{|\psi(x,t)|^2 dx\}_{0 \leqq t < T_m}$ は，いつでも緊密 (tight) であろうか？
(6) くりこみ変換 (2.4) を用いる方法は，ある情報を捨て去ることによって，考えている系の特徴的なものを我々の前に明らかにしてくれている．この場合，失った情報は解 ψ の位相 $\frac{\psi}{|\psi|}$ に関するものである．ψ を場と見れば，運動量に関する情報を失っている．

上にも述べたが，これらの問題 (の一部は) は爆発のオーダーと密接に結びついている．

3. LogLog law and Nelson diffusions

爆発解のオーダーを決定することは，数値解析や漸近解析ではずいぶんと以前から積極的に行われて来た (Sulem-Sulem '99[12] を参照)．擬共型不変な場合に対する，その結果 (予想) は

$$\|\nabla\psi(t)\| \asymp \sqrt{\frac{\ln\ln(T_m - t)^{-1}}{T_m - t}}$$

であり，loglog law と呼ばれている．数学的には，下からの評価が以前より知られていて (Y.Tsutsumi '89, Cazenave-Weissler '90)，

$$\|\nabla\psi(t)\| \gtrsim \frac{1}{\sqrt{T_m - t}}.$$

である．まだ予想との間には少しギャップがあった．ところが，先に紹介した定在波解から「擬共型変換」で作られた，爆発する特解の爆発オーダーは

$$\|\nabla\psi(t)\| \asymp \frac{1}{T_m - t}.$$

となっていて悩ましい．爆発のオーダーという観点から見た場合も特解は一般的ではないようだ．

最近になって，基底定在波解の近くの爆発解に対して

$$\|\nabla\psi(t)\| \lesssim \sqrt{\frac{\ln\ln(T_m - t)^{-1}}{T_m - t}}$$

なる評価がなされた(Perelman 2001 [11], Merle-Raphael 2003 [6])．予想にかなり近付いたが，両者とも定在波解での線形化作用素のスペクトルに関してある仮定をおいているようである．Merle-Raphael は現在も精力的に研究を

続けているが,「大きな」解に対しては未解決であり, $\log\log$型が現れるカラクリが明らかにされたとは言えないように思える. 因に, $p > 1 + \frac{4}{d}$ 場合は, 数学的には未解決であるが, 予想は

$$\|\nabla\psi(t)\| \asymp \sqrt{\frac{1}{(T_m - t)^{\frac{p+1}{p-1} - \frac{d}{2}}}}$$

である. しかしながら下からの評価は数学的として厳密に得られていて (Y.Tsutsumi '89, Cazenave-Weissler '90):

$$\|\nabla\psi(t)\| \gtrsim \sqrt{\frac{1}{(T_m - t)^{\frac{p+1}{p-1} - \frac{d}{2}}}}.$$

上からの評価が欲しいところだ. 面白いのは, この爆発オーダーは半線形の熱方程式の場合と同じであって,「代数的」な指数しか現れていない. なぜ, $p = 1 + \frac{4}{d}$ のときだけ, 重対数補正が必要になるのかは考えるべき課題であるように思われる.

実は, 擬共型不変な場合 (即ち (NSC) の爆発解に対して) は, loglog law が正しいとすると, Theorem 1 の結果において(極限形状を考える際), 特異点の配置やその個数は時間列の取り方に依存せずに一意的に決まってしまう. このような意味でも爆発オーダーの決定は数学的に重要な問題であると言える. 証明は, 関数解析的にもできるが, 確率過程 (Nelson diffusion と呼ばれる [9,10,1]) を用いる方法を紹介しよう (N 2001 [8]): Carlen '83 [1], '85 [2] に従えば ([3] も参照), 道の空間 $\Gamma \equiv C([0,T_m);\mathbb{R}^d)$ 上に

$$P[X_t \in dx] = \frac{|\psi(x,t)|^2 dx}{\|\psi_0\|^2}$$

なる確率測度 P を作ることができる. ここに X_t は

$$X_t(\gamma) := \gamma(t), \quad \gamma \in \Gamma$$

なる「確率変数」である. このような測度 P は次の伊藤型確率微分方程式

$$dX_t = b(X_t, t)dt + dB_t$$

の弱解として得られる. ここで, B_t は標準 Brown 運動であり, 移流項 b は, Shrödinger 方程式の解 ψ から

$$u(x,t) \equiv \begin{cases} \Re\dfrac{\nabla\psi(x,t)}{\psi(x,t)}, & \text{if } \psi(x,t) \neq 0 \\ 0, & \text{if } \psi(x,t) = 0, \end{cases}$$
$$v(x,t) \equiv \begin{cases} \Im\dfrac{\nabla\psi(x,t)}{\psi(x,t)}, & \text{if } \psi(x,t) \neq 0 \\ 0, & \text{if } \psi(x,t) = 0. \end{cases}$$

と定めた, osmotic velocity u と current velocity v を用いて

$$b(x,t) \equiv u(x,t) + v(x,t)$$

と定義されるものである.

正確な形で, Carlen の結果を書いておこう (Carlen の証明は, 相互作用がポテンシャルで与えられるような線形Schrödinger 方程式の解に対するものだが, 非線形の場合も同様である).

Theorem (Carlen). *Let u, v, b and ρ be defined through the solution ψ of* (NSC) - (IV) *as above. We associate $\Gamma \equiv C([0,T_m);\mathbb{R}^d)$ with its Borel σ-algebra $\mathcal{F}$. Let $(\Gamma, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t)$ be evaluation stochastic process $X_t(\gamma) \equiv \gamma(t)$ for $\gamma \in \Gamma$ with natural filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leqq t)$. Then there exists a Borel "probability" measure P on Γ such that:*

(i) *$(\Gamma, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, P)$ is a Markov process;*

(ii) *the image of P under X_t has density $\rho(x,t)$, that is,*

$$P[X_t \in dx] = \frac{|\psi(x,t)|^2 dx}{\|\psi_0\|^2};$$

(iii) *The following process B_t is a $(\Gamma, \mathcal{F}_t, P)$-Brownian motion:*

$$B_t \equiv X_t - X_0 - \int_0^t b(X_\tau, \tau)d\tau.$$

この定理で得られる拡散過程を Nelson diffusion と呼んでいるが，この性質を調べることによって，loglog law より弱い仮定 $\int_0^{T_m} \|\nabla\psi(t)\|dt < \infty$ のもと，Theorem 1 が改良されることになる．証明の流れを模式的に書けば次にようになる：

$$\int_0^{T_m} \|\nabla\psi(t)\|dt < \infty,$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \lim_{t\uparrow T_m} X_t \quad \text{a.s.},$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \lim_{t\uparrow T_m} P[X_t \in dx] \equiv \lim_{t\uparrow T_m} \frac{|\psi(x,t)|^2 dx}{\|\psi_0\|^2},$$

$$\Downarrow$$

$$|\psi(x,t)|^2 dx \rightharpoonup \sum_{j=1}^{L} A_j \delta_{a^j}(dx) + \mu(dx) \quad \text{as} \quad t \uparrow T_m.$$

２段目から３段目は，「process の収束は分布の収束を導く」という確率論では良く知られた結果であるが，これで Radon 測度の族 $\{|\psi(x,t)|^2 dx\}_{0\leqq t<T_m}$ の緊密性 (tightness) が得られ，ある部分列にそっては (2.6) 式が成り立っているので，最後の結論を得る．

この小文の残りは夢を語って終わりにしたい．このような確率過程をを用いる方法は，くりこみ変換によって壊れてしまった，解の持つ運動量に関する情報を補完してくれるものである可能性がある．また，条件 $\int_0^{T_m} \|\nabla\psi(t)\|dt < \infty$ は，ちょうど良い具合に，爆発する特解を除外してくれるている．そこで，この積分量が有限であるとの仮定をおけば，loglog law が得られるのではないかと言う気にもなってくる：統計力学的な言葉を拝借すれば，爆発オーダーには普遍性 (universality) があるということになる．

今，原点が「爆発点」になっていたとしよう．このとき

$$\Gamma_0(R) := \bigcup_{\eta>0} \bigcap_{\eta<t<T_m} \left[\, |\gamma(t)| \geqq R \int_t^{T_m} \|\nabla\psi(\tau)\|d\tau \right] \bigcap [\, |\gamma(t)| \to 0 \, \text{as} \, t \to T_m]$$

なる道の集合が

$$P\left(\Gamma_0(R)\right) > 0$$

を満足したとすると (極限形状に関する，もう少し詳しい情報があれば証明できそうである)，この事実を用いて，発見的な方法ではあるが，

$$\|\nabla\psi(t)\| \lesssim \sqrt{\frac{\ln\ln(T_m - t)^{-1}}{T_m - t}}.$$

を「証明」できる．Brown 運動の重対数法則を思い起こそう：

$$\limsup_{s\downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{s \ln\ln \frac{1}{s}}} |B_{T_m} - B_{T_m - s}| < \infty.$$

これから

$$\limsup_{t\uparrow T_m}\sqrt{\frac{T_m-t}{\ln\ln(T_m-t)^{-1}}}\left|\frac{B_{T_m}-B_t}{T_m-t}\right|$$
$$=\limsup_{t\uparrow T_m}\frac{1}{\sqrt{(T_m-t)\ln\ln(T_m-t)^{-1}}}|B_{T_m}-B_t|<\infty,\quad \text{a.s.},$$

を得る．一方で，$\Gamma_0(R)$ に属する道を用いて，Nelson 拡散が満たす確率微分方程式：

$$\frac{B_{T_m}-B_t}{T_m-t}=\frac{X_{T_m}-X_t}{T_m-t}-\frac{1}{T_m-t}\int_t^{T_m}b(X_\tau,\tau)d\tau.$$

より

$$\limsup_{t\uparrow T_m}\sqrt{\frac{T_m-t}{\ln\ln(T_m-t)^{-1}}}\left(\frac{1}{T_m-t}\int_t^{T_m}\|\nabla\psi(\tau)\|d\tau\right)\lesssim 1$$

を得る．これは大体ではあるが loglog law を示していると言ってよいと思われる．

問題は，果たして

$$P(\Gamma_0(R))>0$$

となるであろうか，ということである．以下の二つの解析的な結果，Theorem 4 と Theorem 5（準備中）が，これをサポートしているように思える．

Theorem 4. *Suppose that ψ is a blowup solution of* (NSC) *such that* $\lim_{t\uparrow T_m}\|\nabla\psi(t)\|=\infty$. *We put:*

$$\text{(A)}\qquad \begin{cases}\displaystyle\int_0^{T_m}\|\nabla\psi(t)\|dt<\infty,\\ \displaystyle\lim_{t\uparrow T_m}\sqrt{T_m-t}\|\nabla\psi(t)\|=\infty,\\ \displaystyle\lim_{t\uparrow T_m}(T_m-t)\|\nabla\psi(t)\|=0.\end{cases}$$

This condition (A) *is imcompatible with the following:*

(B) *We have* $L=1$ *and* $\varphi_n\equiv 0$ *in (2.5) of Theorem 1.*

条件 (A) と (B) のもと，爆発解は

$$\exists a\in\mathbb{R}^d;\quad \lim_{t\to T_m}|\psi(x,t)|^2dx=\|\psi_0\|^2\delta_a(dx)$$

となることが示される．ところが，これら 2 条件は両立しないと主張しているわけで，一方で

Theorem 5. *Suppose that ψ is a blowup solution of* (NSC) *such that* $\lim_{t\uparrow T_m}\|\nabla\psi(t)\|=\infty$. *If we have* $L=1$ *and* $\varphi_n\equiv 0$ *in (2.5) of Theorem 1, then*

$$\limsup_{t\uparrow T_m}\sqrt{T_m-t}\|\nabla\psi(t)\|=\infty.$$

なる結果も示せて，特解 $\widetilde{Q}(x,t)$ のように，一点にすべての L^2 mass を集中させてしまうような爆発解は，loglog law を満足しないことが分かる．すなわち，loglog law が成立するための必要条件は，(2.5) 式において，$L\geqq 2$ または $\varphi_n\neq 0$ となることである．このことから，次の結果を得ることが出来そうなのだが，未だ完全な証明には至っていない．

"Theorem". *We put $a_1 = 0$ (by space translation). Suppose one of the following two conditions holds:*
(i) $a_1 = a_j$ *for some* $1 \neq j$,
(ii) $\mu(\{a_1\}) \neq 0$.
Then we have:

$$P(\Gamma_0(R)) > 0,$$

for some $R > 0$.

ここで，条件 (i) は，特異点が最終的には重なる（共鳴，resonance）ことを言っている．数学的には (2.5) 式は一般に $L \geqq 2$ で成立する．しかし，物理的な局所性を考えれば，現実世界では共鳴が起こっていると考えた方が自然のようにも思える．また，条件 (ii) は弱い形の共鳴だが，これは，Haussdorf 次元が正の特異点が生成しないとする speculation とは，もちろん矛盾はしない．

(2.6) 式で与えられる結果は，これらとは矛盾しないことも付け加えておこおう：論理的には，ある異なる i と j で，$a_i = a_j$ (resonannce) が起こることを否定していないし，測度 μ については，その絶対連続性も未解決のままであって，もし，仮に (ii) のように弱い形の共鳴が起こったとしても，極限形状が Dirac 測度と関数だけでなるという speculation とも矛盾しない．問題は (2.5) から得られる (2.6) が，どこまで忠実な (faithful) 極限形状の表現になってるかということである．

もうひとつ，爆発のオーダーと漸近形に関する定理（予想）を付け加えておこう．

"Theorem" 6. *In Theorem 1, we suppose that* $|x|\psi(0) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *and*

$$\lim_{t \uparrow T_m} \sqrt{T_m - t}\|\nabla\psi(t)\| = \infty.$$

Then ψ^j*'s must be standing waves, that is,*

$$\psi^j(x,t) = Q^j(x)e^{i\omega_j t/2} \quad \textit{for some} \quad \omega_j > 0,$$

where Q^j*'s solve*

$$\begin{cases} \Delta Q - \omega_j Q + |Q|^{\frac{4}{d}} Q = 0, \\ Q \in H^1(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}. \end{cases}$$

さて，最後に，loglog law (重対数補正) が必要となる理由について，未だ完全ではないが，私見を述べて結びとしたい：実は重対数補正が必要になる原因はどこに潜んでいたかというと，Nelson diffusion を定めている確率微分方程式

$$B_t = X_t - X_0 - \int_0^t b(X_\tau, \tau)d\tau.$$

の Brown 運動の中にであって，そのBrown 運動の道に関する有名な重対数法則が，本来は「裏」の世界にあって隠れてしまっていて見えないはずなのに，確率測度 P の分布が

$$|\psi(x,t)|^2 dx \rightharpoonup \sum_{j=1}^{L} A_j \delta_{a^j}(dx) + \mu(dx) \quad \text{as} \quad t \uparrow T_m,$$

と，爆発時刻 T_m において Dirac 測度を生成することにより,「表」の世界に現れ出て来たものだと言えそう (なの) である．

Appendix

ここでは，道の空間 (path space) $\Gamma \equiv C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ 上に通常の量 子力学と同じ予言を与える確率測度 P を与える，Nelson の確率過程量子化 (stochastic quantization) [9.10] について簡単に紹介したい (Nelson に先んじて、Fńyes [4] が同様の考えを提唱したらしい)．Γ には広義一様収束による Fréchet topology が入っているとし，その Borel σ-albebla を $\mathfrak{B}$ と書くことにする．

Nelson's Observation.

最初に，量子力学の基礎方程式である，一体の Schrödinger 方程式

$$(A.0)\qquad i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(x,t) + V(x,t)\psi(x,t)$$

があるとする．この方程式の背後に，ひとつの確率過程が潜んでいることを，Nelson に従って眺めてみる．まず，$\rho := |\psi|^2$ は次の二つの方程式を満足することが (形式的に) 確かめられる：

$$(A.1)\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(b_+\rho) - \frac{\hbar}{2m}\Delta\rho = 0,$$

$$(A.2)\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(b_-\rho) + \frac{\hbar}{2m}\Delta\rho = 0.$$

ここで，

$$(A.3)\qquad b_\pm = \frac{\hbar}{m}(\Re \pm \Im)\frac{\nabla\psi}{\psi}$$

である．今 X_t を $X_t : \Gamma \ni \gamma \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^d$ なる evaluation map で，Γ 上に $P[X_t \in dx] = \rho(x,t)dx$ を満足する (無限次元) 測 度 P があったとすれば，(A.1) は、次の伊藤型確率微分方程式 (Itô type SDE) の前向き (forward) Kolomogorov 方程式とな っている：

$$(A.4)\qquad dX_t = b_+(X_t,t)dt + \sqrt{\frac{\hbar}{m}}dB_t.$$

ここで B_t は測度 P に関する標準的な d 次元 Wiener process (Brown 運動) である．また (A.2) は (A.4) の後ろ向き (backward) Kolomogorov 方程式と呼ばれる ものであるが，測度 P に関するもう一つの標準的な d 次元 Wiener process (Brown 運動) B^* を導入することによって

$$(A.5)\qquad d^*X_t = b_-(X_t,t)dt + \sqrt{\frac{\hbar}{m}}d^*B_t.$$

に対するforward Kolomogorov 方程式と見なすこともできる．以上では $dX_t = X_{t+dt} - X_t$，$d^*X_t = X_t - X_{t-dt}$ $(dt > 0)$ なる記号を用いた．B_t と B_t^* の違いは，$t > s$ に対して，$B_t - B_s$ は $\{X_\tau | -\infty < \tau \le s\}$ に独立，$B_t^* - B_s^*$ は $\{X_\tau | t \le \tau < \infty\}$ に独立となっている ことである．

ここまでが，Nelson の量子化の運動学的部分となる．また，(A.4) と(A.5) の両方において，$b_\pm$ をこのように$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ 上の可測関数と仮定す る事は，問題としている確率過程 (process) が Markovian であると仮定した事になっている．

次に動力学的部分 (dynamics) はどのようになるのかを考えよう．次の Nelson's conditional derivatives と呼ばれる，D_+ 及び D_- を定義する：

$$(A.6)\qquad D_\pm f(X_t,t) = \lim_{h\downarrow 0} E\left[\frac{f(X_{t\pm h}, t\pm h) - f(X_t,t)}{\pm h}\middle| X_t\right], \quad f \in \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}).$$

特に $X_t \in L^2(\Gamma, \mathfrak{B}, P)$ (finite energy diffusion) の時 は $f = x$ とできて、これらは先に見た (A.4) と (A.5) から，それぞれ b_+ と b_- に一致することが分かる：

$$(A.7)\qquad D_+X_t = b_+(X_t,t),$$

$$(A.8)\qquad D_-X_t = b_-(X_t,t).$$

さらに，伊藤の公式 (Itô formula) を使えば，

$$(A.9)\qquad D_+f(X_t,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + b_+\cdot\nabla + \frac{\hbar}{2m}\Delta\right)f(X_t,t),$$

$$(A.10)\qquad D_-f(X_t,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + b_-\cdot\nabla - \frac{\hbar}{2m}\Delta\right)f(X_t,t).$$

(A.9) および (A.10) を各々 0 と置いた f に対する方程式が，forward martingale，backward maritingale 方程式である．

さらに計算を進め，Nelson が stochastic accelation (SA) と呼ぶところの

$$\alpha(X_t) \equiv \frac{D_+D_- + D_-D_+}{2} X_t \tag{A.11}$$

を計算しよう．ここで，current velocity $v = \frac{b_+ + b_-}{2}$ と osmotic velocity $u = \frac{b_+ - b_-}{2}$ を購入すると，面倒な計算の後，$\alpha(X_t)$ は u と v で書けることが分かる：

$$\alpha(X_t) = \frac{\partial v}{\partial t} - (u \cdot \nabla)u + (v \cdot \nabla)v - \frac{\hbar}{2m}\Delta u. \tag{A.12}$$

または、波動関数を $\psi = \exp(R + iS)$ $(\rho = \exp R)$ と極分解すれば，$u = \frac{\hbar}{m}\nabla R$，$v = \frac{\hbar}{m}\nabla S$ だから

$$\alpha(X_t) = \hbar\nabla\left(\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\hbar}{2m}|\nabla R|^2 + \frac{\hbar}{2m}|\nabla S|^2 - \frac{\hbar}{2m}\Delta R\right) \tag{A.13}$$

と書けることが分かり，結果として，Schrödinger 方程式 (A.0) から

$$m\alpha(X_t) = -\nabla V(X_t, t) \tag{A.14}$$

が導かれる．これが Newton 力学の第2法則の確率論的形式とみなされるものである．

注意すべき事は、(A.12) または (A.13) 式は (A.4)，(A.5)，(A.7)，(A.8) から導かれ，$b_\pm$ の具体的 な形には依らない事である．

Stochastic Quantization.

Nelson の言う確率過程量子化というのは、以上の手続き逆を辿っていくことになる．

Nelson は、とにかく欲しい確率空間 (量子力学と同じ予言を与える Γ 上の 確率測度 P) があると思って，evaluation map $X_t : \Gamma \ni \gamma \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^d$ に対して Itô type SDE の forward 及び backward 方程式 (A.4) と (A.5) をともに書く．ここで，drift b_+ と b_- が出てくる．この部分が「Nelson 力学」の運動学的部 分 (kinematics) であるが，この b_+ と b_- を決める事が Nelson の量子化の 手続きの一部と言ってよい．また，上でも述べたが，$b_\pm$ をこのように$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ 上の可測関数と仮定する事は，問題としている process が Markovian であると仮定した事になっている.「Nelson 力学」の動力学 (dynamics) の部分が，Newton の運動方程式を randomize した確率論的運動方程式 (A.14) となる．即ち，Nelson の確率過程量子化 とは，数学的には (A.4)，(A.5)，(A.14) を満足する drift b_+ と b_- と Γ 上の測度 P を決定せよと言う問題となる．いわゆる確率微分方程 式 (A.4) の弱解を求めよと言う事である．

また (A.14) の左辺である (SA) は current velocity v と osmotic velocity u で書かれることから，pragmatic には確率論的運動方程式 (A.14) に運動学的条件とし て，(A.4) と (A.5) に附随するforward 及び backward Kolomogorov 方程式 (A.1)-(A.2)を 組み合わせたものが「Nelson 力学 (mechanics)」と言って良い．以下の 議論で見るように，b_+ と b_- は独立なものではなく，これらは分布 ρ を通して結びついており，Nelson の Stochastic quantization とは，分布 ρ と移流項 b_+ を与える規則だと思うこともできる．欲しい Γ 上の測度 P の分布 ρ がKolomogorov 方程式から決まり，このρ が Born の確率則を与える．則ち通常の量子力学と同じ予言を 与える事になる．このような確率論的力学は変分法的な定式化も行なわれている (Guerra - Morato [5], Yasue [13])．

今，述べたことを具体的に計算してみよう．(A.1) から (A.2) を引いて，

$$u = \frac{\hbar}{2m}\nabla \log \rho \tag{A.15}$$

を得る．また (A.1) と (A.2) を加えて，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(v\rho) = 0 \tag{A.16}$$

を得る．(A.15) を t で微分して (A.16) を用いれば，

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla(v\cdot u) - \frac{\hbar}{2m}\nabla(\nabla\cdot v) \tag{A.17}$$

が得られる．その一方で，(A.12) と (A.14) から

$$\frac{\partial v}{\partial t} = (u\cdot\nabla)u - (v\cdot\nabla)v + \frac{\hbar}{2m}\Delta u - \nabla V \tag{A.18}$$

が成立していたから，二つの velosity u と v に対する連立非線形偏微分方程式 (A.17)-(A.18) を得た事になる．このとき，分布 ρ は (A.16) から決まる．

実際に，「Nelson 力学」から Schrödinger 方程式が得られる様子を以下に見てみよう．上で得た u と v の方程式は，それほど扱いやすくはない．そこで，これらから適当な複素数値関数を導入すると，それが Schrödinger 方程式を満足 し，その絶対値の自乗が ρ と一致する事が示される：具体的には (A.15) の ρ と $v = \frac{1}{m}\nabla\tilde{S}$ なる $\tilde{S}$ を用いて，

$$\psi \equiv \sqrt{\rho}\exp(i\tilde{S}/\hbar) \tag{A.19}$$

と置けば良い．このとき (A.0) を得る．「古典力学の Newton の運動方程式から Schrödinger 方程式を導くこと」を「量子化」と呼べば，確かに Nelson の処方せんはひとつの量子化であり，面白いことに，Born の確率則は ψ の定義から自動的に出て来ている．

これで御終いでもいいけれど，当初の目的であった，量子力学と同じ予言を与える確率測度を path space Γ 上に確率測度を実際に作らなければいけない．これを遂行したのが Carlen [1,2,3]．そして、この path space 上の測度 P に対して

$$P[X(t)\in dx] = \frac{|\psi(x,t)|^2dx}{\|\psi(0)\|^2} \tag{A.20}$$

が成立し，Born の確率則も導かれれる．Carlen の議論は確率過程量子化の手続きと は無関係に，Schrödinger 方程式 (A.0) の解で $\psi\in C(\mathbb{R};H^1(\mathbb{R}^d))$ なるものが与えられれば (A.20) を満たす測度 P が path space Γ 上に構成できることを主張している．

Acknowledgments. 講演の機会を与えて下さった，杉本信正先生，吉永隆夫先生に感謝致します．

本文中，文献の引用は簡便な形ですませました．参考文献として以下のものを挙げておきます．それらの文献表をたどれば，本文中の文献等に簡単に到達できると思います．どうか，お許し頂きますよう．

References

1. Carlen, E., *Conservative diffusions*, Commun. Math. Phys. **94** (1983), 293–315.
2. Carlen, E., *Existence and sample path properties of the diffusions in Nelson's stochastic Mechanics* Springer Lecture Notes in Mathematics 1158 (Albeverio, S. et al, eds.), Stochastic processes in Mathematics and Physics, vol.345, Springer-Verlag, Berlin Heiderberg New York, 1985, pp. 25–51.
3. Carlen, E., *Progress and problems in stochastic mechanics* Stochastic methods in mathematical physics (Karwowski, W, eds.), Stochastic processes in Mathematics and Physics, vol.345, World Scientific, Singapore, 1989, pp. 3–31.
4. Fényes, I., *Eine wahrsheinlichkeistheoretishe begrüdung und interpretation der Quanten-mechanik*, Z. Phys. **132** (1952), 81–106.
5. Guerra, F., Morato, L., *Quantization of dynamical systems and stochastic control theory*, Phys. Rev. **D27** (1983), 1774–1786.
6. Merle, F. and Raphael, P., *Sharp upper bound on the blow-up rate for thecritical nonlinear Schrödinger equation*, Geom. Func. Anal. **13** (2003), 591–642.
7. Nawa, H., *Asymptotic and limiting profiles of blow-up solutions of the nonlinear Schrödinger equation with critical power*, Commun. Pure and Apllied Math. **52** (1999), 193–270.
8. Nawa, H., *Nelson diffusions and blow-up phenomena in solutions of the nonlinear Schrödinger equation with critical power*, Nonlinear Dynamics and Renormalization Group (I. M. Sigal and C. Sulem, eds.), CRM Proceedings and lecture note; vol.27, American Mathematical Society, 2001, pp. 117–134.
9. Nelson, E., *Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian Dynamics*, Phys. Rev. **150** (1966), 1079–1085.
10. Nelson, E., *Quantum fluctuations*, Princeton Unuversity Press, Princeton, 1984.
11. Perelman, G., *On the blow-up phenomenon for the critical nonlinear Schrödinger equation in 1D*, Ann. Henri Poincare **2** (2001), 605–673.
12. Sulem, C. and Sulem, P.-L., *Nonlinear Schrödinger equation* Applied Mathematical Sciences 139, Springer, New York, 1999.
13. Yasue, K., *Stochastic Calculus of Variations*, J. of Funct. Anal. **41** (1981), 327–340.