

## 非線形バネで接続された剛体はり系における局在モード

阪大院・基礎工 渡辺陽介 (Yosuke WATANABE),

杉本信正 (Nobumasa SUGIMOTO)

Graduate School of Engineering Science, Osaka University

### 1 はじめに

近年、欠陥や不純物が存在しない完全周期結晶格子において、格子自身に内在する非線形性とその構造の離散性のために、空間的に局在した振動が格子内に誘起される現象（非線形局在モード, Intrinsic Localized Mode, ILM）の存在が明らかになり、数多くの理論的、実験的研究がなされている [1-6]. このような結晶格子における波動現象を取り扱うための解析モデルはよく知られた多数の質点とばねからなる、“質点-バネ”モデルを基礎としている.“質点-バネ”モデルは、周期構造における“縦波”の波動現象を記述する解析モデルとみることができる.

一方、工学の分野においては、例えばパイプライン、列車、メガフロート（超大型浮体式構造物）、宇宙構造物など、空間周期性をもつ構造が多数見られるが、それらにおいて問題となる波動現象は“横波”が多い. このような周期構造における横波の波動現象の考察を行うために、最も単純な力学モデルの一つである 接続剛体はり を考える（図 1） [7]. 接続剛体はりは、同じ形状・性質を

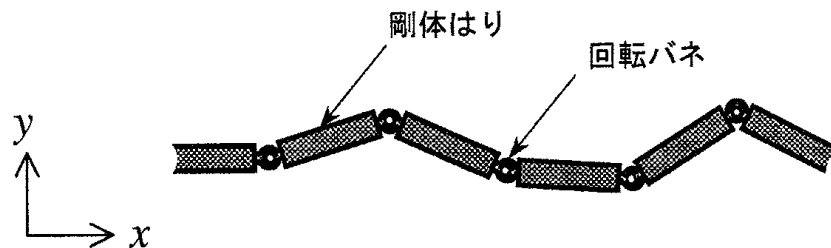


図 1: 接続はりモデル

もつ多数の剛体はりがそれぞれその両端で隣の剛体はりと連結部によってつながれた構造をしている. 連結部は、支点を中心とするはりの回転に対して、回転角に応じた復元モーメントを与えるものとする. その一例として図 2 に示すバネ構造を考え、以下、回転バネとよぶことにする. 非線

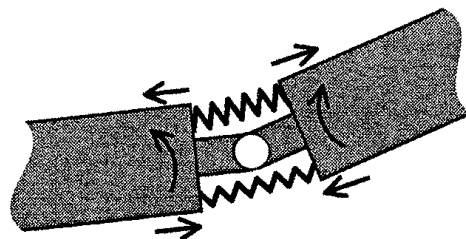


図 2: 連結部の拡大図（回転バネ）

形的な応答をする回転バネを考慮することにより接続剛体はり（以下単に接続はりと記す）に非線形性を与え、“横波”の非線形局在モードについて明らかになったことを報告する。

## 2 接続剛体はりモデル

### 2.1 基礎方程式

まず接続はりの運動を支配する方程式の導出を行う。接続はりの運動が  $x$ - $y$  平面内に限定されているとし、 $j$  番目のユニット ( $j = \dots, -1, 0, 1, \dots$ ) について、その幾何学的配置と作用する力、モーメントを図3のように定義する。ここで  $s_j, u_j, P_j, Q_j, M_j, \varphi_j$ （下付添字の  $j$  は  $j$  番目のユ

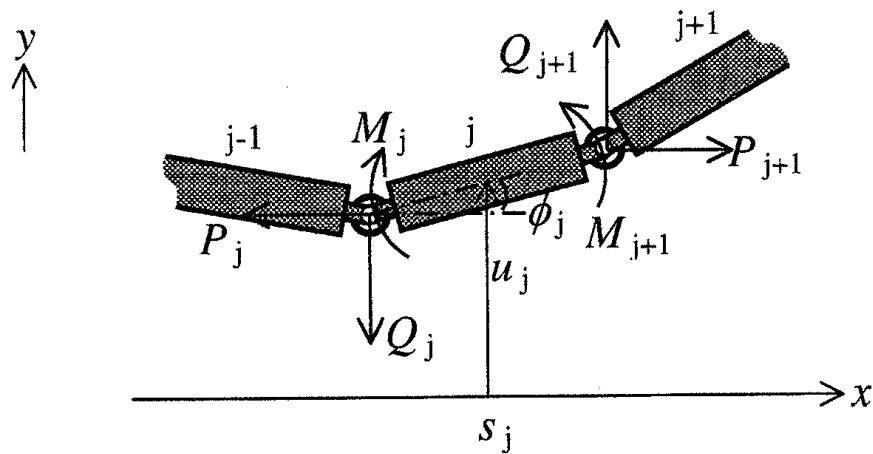


図3:  $j$  番目のユニットに働く力とモーメント

ニットに関する量であることを示す) はそれぞれ

- $s_j$ :  $j$  番目のユニットの質量中心の  $x$  座標,
- $u_j$ :  $j$  番目のユニットの質量中心の  $y$  座標,
- $P_j$ :  $j$  番目のユニットの左端に作用する  $x$  方向の力,
- $Q_j$ :  $j$  番目のユニットの左端に作用する  $y$  方向の力,
- $M_j$ :  $j$  番目のユニットの左端に作用する回転バネによるモーメント,
- $\varphi_j$ :  $j$  番目のユニットの中心線が  $x$  軸となす角

であり、図に示す向きを正とする。ユニットに関する諸量は次のように表す:

- $l$ : ユニットの長さ,
- $\rho$ : ユニットの線密度,
- $I$ : 重心回りの慣性モーメント ( $= \rho l^3 / 12$ ).

また回転バネによって与えられる復元モーメントの大きさは回転角とその3乗に比例するとし、これらの比例係数（モーメントの次元をもつ）をそれぞれ  $K_L, K_C$  とおく。すなわち

$$M_j = K_L (\varphi_j - \varphi_{j-1}) + K_C (\varphi_j - \varphi_{j-1})^3.$$

このとき  $j$  番目のユニットについて、 $x, y$  方向の運動方程式、回転に対する運動方程式および接続部での変位の連続の幾何学的条件を記述する方程式はそれぞれ

$$\begin{aligned} \rho l \frac{d^2 s_j}{dt^2} &= P_{j+1} - P_j, \\ \rho l \frac{d^2 u_j}{dt^2} &= Q_{j+1} - Q_j, \\ I \frac{d^2 \varphi_j}{dt^2} &= K_L (\varphi_{j+1} - \varphi_j) + K_C (\varphi_{j+1} - \varphi_j)^3 - K_L (\varphi_j - \varphi_{j-1}) - K_C (\varphi_j - \varphi_{j-1})^3 \\ &\quad - \frac{l}{2} (P_{j+1} + P_j) \sin \varphi_j + \frac{l}{2} (Q_{j+1} + Q_j) \cos \varphi_j, \\ s_j &= s_{j-1} + \frac{l}{2} \cos \varphi_{j-1} + \frac{l}{2} \cos \varphi_j, \\ u_j &= u_{j-1} + \frac{l}{2} \sin \varphi_{j-1} + \frac{l}{2} \sin \varphi_j \end{aligned}$$

と書き表すことができる。

## 2.2 無次元化と $\varphi_j$ に対する方程式

無次元量  $s'_j = s_j/l, u'_j = u_j/l, P'_j = P_j/(K_L/l), Q'_j = Q_j/(K_L/l), \varphi'_j = \varphi_j, t' = t/\sqrt{\rho l^3/K_L}$  を導入すると、上の方程式系は

$$\frac{d^2 s'_j}{dt'^2} = P'_{j+1} - P'_j, \quad (1a)$$

$$\frac{d^2 u'_j}{dt'^2} = Q'_{j+1} - Q'_j, \quad (1b)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi'_j}{dt'^2} &= 12 \left[ (\varphi'_{j+1} - \varphi'_j) + K (\varphi'_{j+1} - \varphi'_j)^3 - (\varphi'_j - \varphi'_{j-1}) - K (\varphi'_j - \varphi'_{j-1})^3 \right] \\ &\quad - 6 \left[ (P'_{j+1} + P'_j) \sin \varphi'_j - (Q'_{j+1} + Q'_j) \cos \varphi'_j \right], \end{aligned} \quad (1c)$$

$$s'_j = s'_{j-1} + \frac{1}{2} (\cos \varphi'_{j-1} + \cos \varphi'_j), \quad (1d)$$

$$u'_j = u'_{j-1} + \frac{1}{2} (\sin \varphi'_{j-1} + \sin \varphi'_j) \quad (1e)$$

となる。但し  $K$  は  $K = K_C/K_L$  であり非線形性の強さを示している。以下では'の表記を省略する。

以下では平衡状態 ( $\varphi_j \equiv 0$ ) 周りの振動を考え、 $K$  の値を十分大きく取り、張力  $P$  を無視して

解析を進める. このとき上の方程式系は  $u_j, Q_j, \varphi_j$  に関する方程式系

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u_j}{dt^2} &= Q_{j+1} - Q_j, \\ \frac{d^2 \varphi_j}{dt^2} &= 12 \left[ (\varphi_{j+1} - \varphi_j) + K (\varphi_{j+1} - \varphi_j)^3 - (\varphi_j - \varphi_{j-1}) - K (\varphi_j - \varphi_{j-1})^3 \right] \\ &\quad + 6(Q_{j+1} + Q_j) \cos \varphi_j, \\ u_j &= u_{j-1} + \frac{1}{2} (\sin \varphi_{j-1} + \sin \varphi_j)\end{aligned}$$

となる.  $j-1, j+1$  番目のユニットについても同様の方程式系が成り立つので, これらを用いると変数  $u_j$  と  $Q_j$  を消去することができ,  $\varphi_j$  に関する単一の支配方程式を得ることができる:

$$\begin{aligned}& \left( \frac{1}{3 \cos \varphi_{j-1}} - \cos \varphi_{j-1} \right) \frac{d^2 \varphi_{j-1}}{dt^2} - 2 \left( \frac{1}{3 \cos \varphi_j} + \cos \varphi_j \right) \frac{d^2 \varphi_j}{dt^2} + \left( \frac{1}{3 \cos \varphi_{j+1}} - \cos \varphi_{j+1} \right) \frac{d^2 \varphi_{j+1}}{dt^2} \\ &= \frac{4}{\cos \varphi_{j-1}} \varphi_{j-2} - 8 \left( \frac{1}{\cos \varphi_{j-1}} + \frac{1}{\cos \varphi_j} \right) \varphi_{j-1} + 4 \left( \frac{1}{\cos \varphi_{j-1}} + \frac{4}{\cos \varphi_j} + \frac{1}{\cos \varphi_{j+1}} \right) \varphi_j \\ &\quad - 8 \left( \frac{1}{\cos \varphi_j} + \frac{1}{\cos \varphi_{j+1}} \right) \varphi_{j+1} + \frac{4}{\cos \varphi_{j+1}} \varphi_{j+2} - \left( \frac{d\varphi_{j-1}}{dt} \right)^2 \sin \varphi_{j-1} - 2 \left( \frac{d\varphi_j}{dt} \right)^2 \sin \varphi_j \\ &\quad - \left( \frac{d\varphi_{j+1}}{dt} \right)^2 \sin \varphi_{j+1} + \frac{4K}{\cos \varphi_{j-1}} (\varphi_{j-2} - \varphi_{j-1})^3 - 4K \left( \frac{1}{\cos \varphi_{j-1}} + \frac{2}{\cos \varphi_j} \right) (\varphi_{j-1} - \varphi_j)^3 \\ &\quad + 4K \left( \frac{2}{\cos \varphi_j} + \frac{1}{\cos \varphi_{j+1}} \right) (\varphi_j - \varphi_{j+1})^3 - \frac{4K}{\cos \varphi_{j+1}} (\varphi_{j+1} - \varphi_{j+2})^3.\end{aligned}\tag{2}$$

### 2.3 線形分散関係

ここで方程式 (2) の線形分散関係を調べておく. 方程式 (2) を線形化すると

$$\frac{d^2}{dt^2} (\varphi_{j-1} + 4\varphi_j + \varphi_{j+1}) + 6(\varphi_{j-2} - 4\varphi_{j-1} + 6\varphi_j - 4\varphi_{j+1} + \varphi_{j+2}) = 0\tag{3}$$

となる. 無次元の波数と角振動数をそれぞれ  $\kappa, \omega$  として  $j$  番目のユニットを伝播する波を

$$\varphi_j = \exp [i(\kappa j - \omega t)]$$

と表し, (3) 式に代入すると次のように分散関係が求まる:

$$\omega = \sqrt{\frac{48 \sin^4(\kappa/2)}{3 - 2 \sin^2(\kappa/2)}}.\tag{4}$$

分散曲線 (4) を図 4 に示す. 曲線 (4) は  $\kappa$  について周期的であるが, 実際には最も短い波長が 2 であるから図 4 では  $|\kappa| \leq \pi$  としている. またこの図から cut-off 周波数  $\omega = \omega_\pi (= 4\sqrt{3})$  が存在することが分かる.

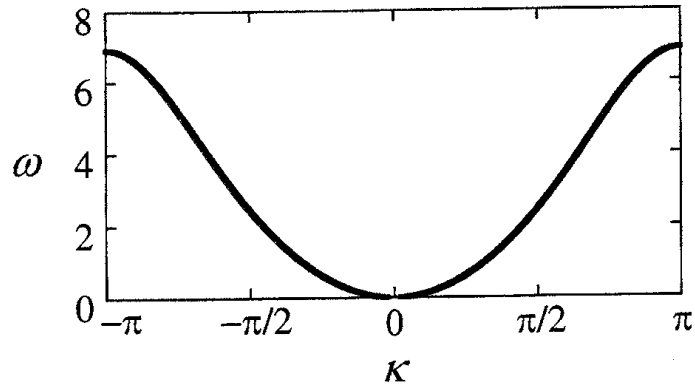


図 4: 線形分散関係

### 3 数値計算

#### 3.1 初期条件と境界条件

以下では方程式(2)に対して数値計算を行い, 定在型の局在モードの存在を調べた. 振幅  $\varphi_a (\ll 1)$  をもつ波長2の正弦波 ( $\pi$ モード) の定在波 ( $\varphi_a \cos(\pi j - \omega_\pi t - \text{const.}) + \varphi_a \cos(\pi j + \omega_\pi t - \text{const.})$ ) を基本として, これに接続はりの形状が全体として左右対称となるような, sech型の変調を与えたものを  $\varphi_j$  の初期値とした. このときの接続はりの概形を図5に示す. また  $d\varphi_j/dt$  の初期値は全てのユニットについて0とした. すなわち  $t=0$  で



図 5: 初期条件の概形

$$\varphi_j = 2\varphi_a \operatorname{sech} \alpha(j - j_c) \cos \pi(j - 1),$$

$$\frac{d\varphi_j}{dt} = 0$$

を与える. 但し  $\alpha$  は変調に係る任意パラメータであり,  $j_c$  は接続はりの  $x$  方向の対称中心位置を示している. 計算には Runge-Kutta 法を用い, 今,  $x$  方向の変位を無視しているので, 端では周期境界条件を課す. またユニット数はそれが局在モードに影響を与えない程度に十分に大きく取るようにする. モードが局在していることの確認はいくつかの代表的な位置のユニットの  $\varphi_j$  の時間発展を調べることにより行った.

### 3.2 数値計算結果

$K, \varphi_a, \alpha$  をパラメータとし試行錯誤的に局在モードを探した.  $K = 30, \varphi_a = \pi/180, \alpha = 0.22$  と選んだときに得られた局在モードを図 6 に示す. ここではユニット数を 96 として求めている

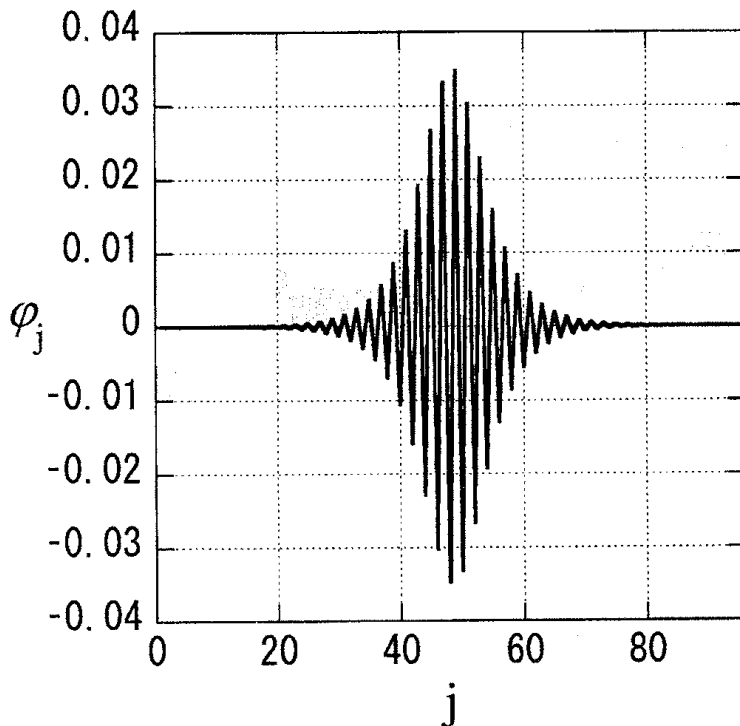


図 6: 得られた非線形局在モードの例

が, 局在モードがユニット数に依存しないことはユニット数を変えた計算, 例えば 128 とした計算を行って確認している. 図 7, 8 は代表的な  $\varphi_j$  ( $j = 48, 30, 15$ ) の時間発展を示している. これらの図から定在型の局在モードの存在を確認することができる. また数値計算結果から角振動数を求めると 7.1 となる. この値は図 4 の cut-off 周波数  $\omega_\pi$  の値よりも大きく, ここで得られた局在モードが非線形的な振動であることを示している. パラメータ  $K, \varphi_a, \alpha$  をうまく選べば上の局在モードとは異なった振動数, 振幅, 局在幅をもった非線形局在モードが求まる.

一方, 選択した  $K, \varphi_a, \alpha$  の“バランス”が悪いと, 短時間のうちに初期波形が崩れて中心から離れた位置のユニットへエネルギーが流れ, 接続はり全体として複雑な振動をするようになる. しかしこのような場合, 長時間の後も多数のユニットにエネルギーが分散したままなのか, それとも何らかの局在状態に落ち着くのかどうかは未確認である.

## 4 今後の課題

本稿では接続剛体はり系において, 張力を無視し, 変数  $\varphi_j$  に関する支配方程式を導出し, これを数値的に解くことにより非線形局在モードの存在を示した.

今後の課題として, 無視した張力  $P_j$  を考慮した系において, 局在モードの存在を示しその定性的性質を明らかにすることが挙げられる.  $s_j, u_j, P_j, Q_j, \varphi_j$  に関する方程式系 (1) から  $s_j, u_j, P_j,$

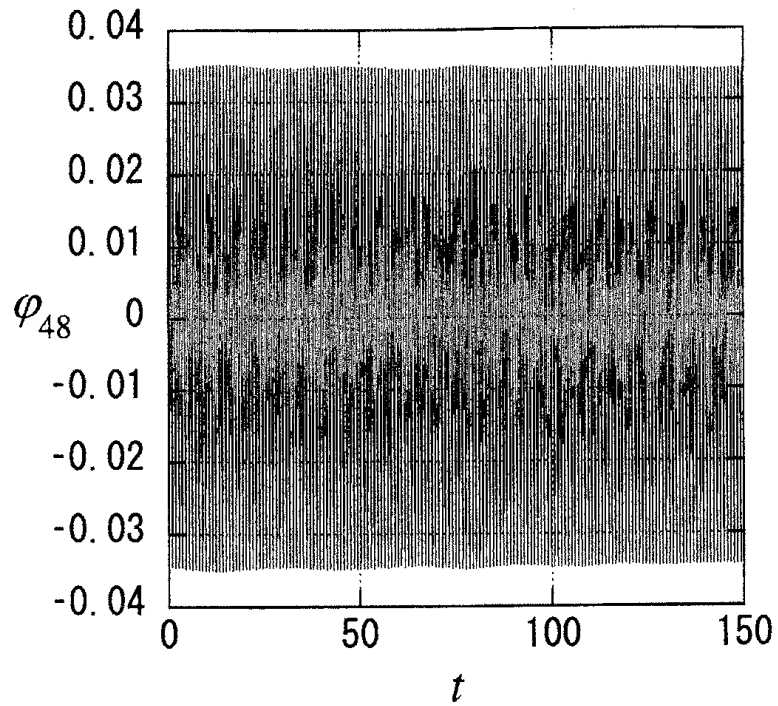


図 7:  $\varphi_{48}$  の時間発展

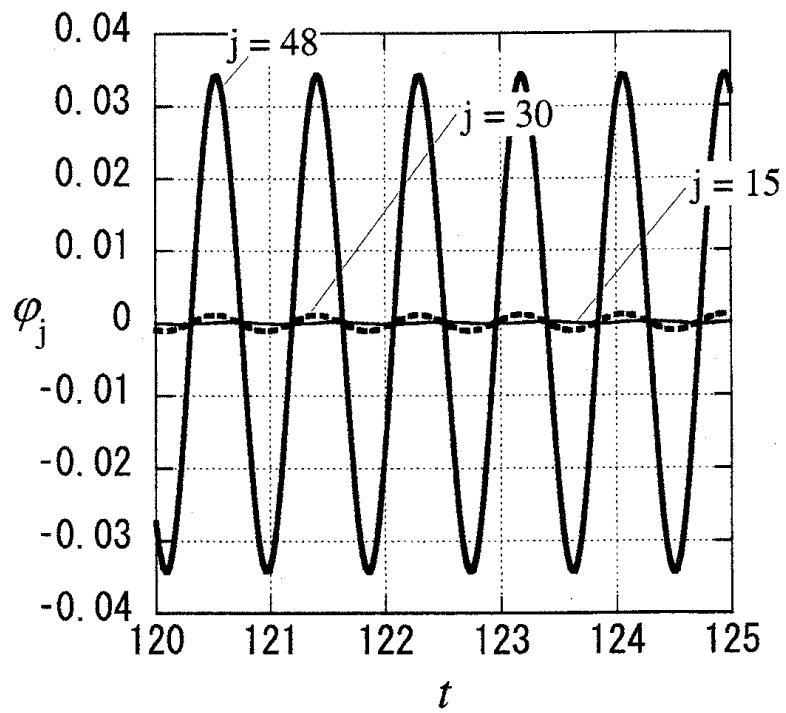


図 8:  $\varphi_{48}$ ,  $\varphi_{30}$ ,  $\varphi_{15}$  の時間発展 ( $t = 120 \sim 125$ )

$Q_j$  を消去して  $\varphi_j$  についての単一の支配方程式を導出することができる:

$$\begin{aligned}
 & F_A \frac{d^2 \varphi_{j-2}}{dt^2} + F_B \frac{d^2 \varphi_{j-1}}{dt^2} + F_C \frac{d^2 \varphi_j}{dt^2} + F_D \frac{d^2 \varphi_{j+1}}{dt^2} + F_E \frac{d^2 \varphi_{j+2}}{dt^2} \\
 &= F_F \varphi_{j-3} + F_G \varphi_{j-2} + F_H \varphi_{j-1} + F_I \varphi_j + F_J \varphi_{j+1} + F_K \varphi_{j+2} + F_L \varphi_{j+3} \\
 &+ F_M (\varphi_{j-3} - \varphi_{j-2})^3 + F_N (\varphi_{j-2} - \varphi_{j-1})^3 + F_O (\varphi_{j-1} - \varphi_j)^3 \\
 &+ F_P (\varphi_j - \varphi_{j+1})^3 + F_Q (\varphi_{j+1} - \varphi_{j+2})^3 + F_R (\varphi_{j+2} - \varphi_{j+3})^3 \\
 &+ F_S \left( \frac{d\varphi_{j-1}}{dt} \right)^2 + F_T \left( \frac{d\varphi_j}{dt} \right)^2 + F_U \left( \frac{d\varphi_{j+1}}{dt} \right)^2. \tag{5}
 \end{aligned}$$

但し  $F_A, \dots, F_U$  は  $\varphi_{j-2}, \dots, \varphi_{j+2}$  の関数である. (5) 式を前章と同じ初期条件, 境界条件, パラメータの組に対して数値計算して得られた結果を図 9 に示す. 図から, 初期波形は直ちに崩れ始

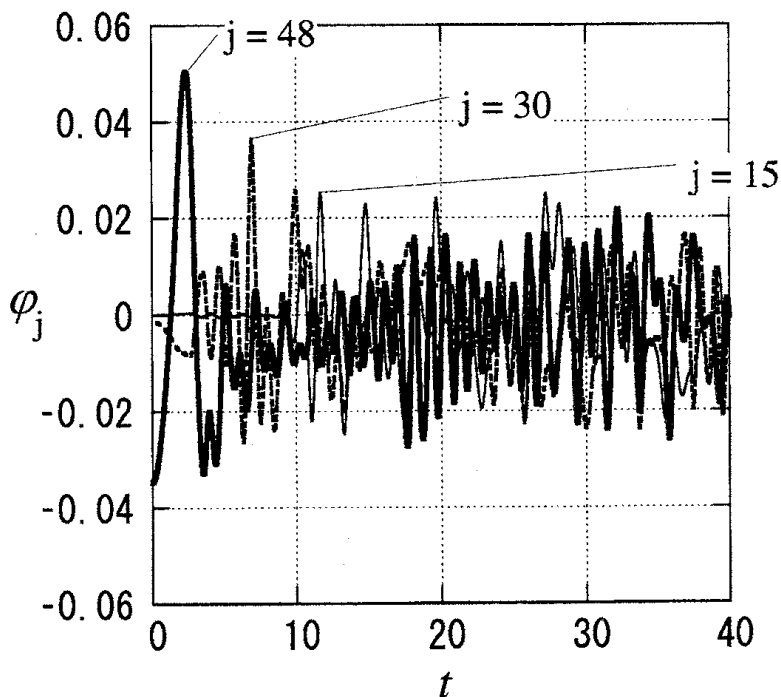


図 9: 張力  $P_j$  を考慮した場合の  $\varphi_{48}, \varphi_{30}, \varphi_{15}$  の時間発展

め, ほとんどのユニットが非周期的な振動するようになり, 接続はりに局在モードが見られないことが分かる. 更に様々なパラメータの組に対して計算を行ってみたが, この系に対して局在モードを確認することはできなかった. その原因として,  $x$  方向の変位を考慮すると周期境界条件が成立しなくなることが挙げられる. その代り周期境界条件ではなく, 接続はりの両端で外力が無いような境界条件の下で調べ直してみる必要がある.

また今回は定在型の非線形局在モードに絞って考察を行ったが, 移動型の局在モードについても考えてみたい. 実際, 格子モデルでは移動型の局在モードの存在が知られており, シミュレーションによる, 局在モード同士が衝突するときの振る舞いや, 2つのモード間でのエネルギーやり取りに関する研究等も行われている [5]. さらに接続はりの周囲に流体がある場合やユニットのはりが弾性はりである場合 (接続弾性はり) についても考察を行う.



## 参考文献

- [1] A. J. Sievers and S. Takeno, "Intrinsic localized modes in anharmonic crystals," *Phys. Rev. Lett.*, **61**, 970-973 (1988).
- [2] 武野正三, "格子力学と非線形波動," 『数理科学』, **387**, 54-61 (1995).
- [3] D. K. Campbell, S. Flach and Y. S. Kivshar, "Localizing energy through nonlinearity and discreteness," *Physics Today*, **57**, 43-49 (2004).
- [4] 武野正三, "Intrinsic localized modes in nonlinear lattices," 『非線形波動現象の数理とその応用』, 数理解析研究所講究録 **1311**, 186-198 (2003).
- [5] 土井祐介, "非線形局在モードの衝突の数値シミュレーション," 『非線形波動現象の数理とその応用』, 数理解析研究所講究録 **1311**, 199-211 (2003).
- [6] 池田公輔, "Morse potential を持つ格子系における非線形局在モードの生成," 『波動の非線形現象とその応用』, 数理解析研究所講究録 **1368**, 189-196 (2004).
- [7] Y. Watanabe and N. Sugimoto, "Flexural wave propagation in a spatially periodic structure of articulated beams," *Wave Motion* (2005) (in press).