

浅水波の振幅増大機構と KP 方程式のある行列式解

丸野健一¹, 辻英一², 及川正行²

¹九州大学・数理学研究院, ²九州大学・応用力学研究所

Ken-ichi Maruno¹, Hidekazu Tsuji² and Masayuki Oikawa²

¹Faculty of Mathematics, Kyushu University

²Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

1 序論

巨大な波は海洋で最も恐ろしい現象である。つい最近おきたインド洋津波は歴史上ない大きな被害を及ぼした。強大な波を予測することは、人類にとって重要な課題であるといえる。従来、海洋波の予測には線形理論に基づいた統計則が用いられ、波高が何十メートルにも及ぶような巨大な波はほとんど起こりえないとされてきた。ところが1990年代に、ほとんど起こりえないはずの巨大な波が各地で観測されることとなり、理論の修正を迫られることとなった。このような巨大な波は'Freak wave'または'Rogue wave'と呼ばれている[1]。Freak waveの生成機構、性質を詳しく理解することは船や海洋構造物を設計する上で大変重要であり、現在、多くの研究者によって活発に研究されている。Freak waveの生成機構には状況に応じて様々な種類が考えられるが、特に非線形性の効果に関連する研究が理論的にはよく行われている。現在よく観測されているのは深海域においてであるが、浅海域での研究もされている[1]。浅海域の場合に起こる巨大な波は、深海域でのFreak waveとはかなりイメージが違う。混乱をさけるために、むしろ'Solitary Killer Wave'と呼んだほうがよいかもしれない[2, 3]。浅海域での巨大な波Solitary Killer Waveはイングランド東海岸のHarwichで実際に起こった。このSolitary Killer Waveは高速Ferryによって生成された可能性が高いとの調査報告がある。

本稿では浅海域における巨大波の生成機構を考えることにする。Petersonらは浅水波を記述するKadomtsev-Petviashvili (KP) 方程式の2-ソリトン解の振幅を詳しく解析し、波高が線形理論で予測されるより大きくなる領域を調べ、巨大波の生成機構の一つである可能性を指摘した[4, 5, 6]。振幅が最も高くなるのは、1個の孤立波の振幅の4倍となる場合で、これはMilesが調べたソリトン共鳴の場合である[7, 8]。この理論の欠点は、2つのソリトン相互作用は定常的であり、非定常な現象を記述していないことである。すなわち、仮に何かのきっかけでソリトン共鳴解ができたとしても、その解は有限時間内で減衰はせず巨大波は消えることがない。普通、KP方程式の多ソリトン相互作用は定常的であるので、ソリトンを用いた非定常な巨大波生成の説明は無理なように思われる(また、[9]も参照)。

最近, Biondini と Kodama は, KP 方程式のあるクラスの厳密解を詳しく調べ, その厳密解がくもの巣状の非定常パターンを示すことを指摘した [10]. Biondini らの調べた厳密解は, N -ソリトン解が退化したものであり, N 個の孤立波がすべてお互いに共鳴関係にある. このような解は行列式の形に書くと自然に得られる. さらに Kodama は一般的なロンスキアン解について, グラスマニアン・シューベルト分解とソリトン相互作用を結びつけ, ヤング図形を用いてソリトン相互作用を分類した [11].

本稿では, KP 方程式のロンスキアン解を用いて N 個の孤立波の相互作用による振幅の増大について議論する. これまでの Web 構造を持つソリトン相互作用の研究は, パターンについての解析であったが, 我々は振幅の解析を行い, どのような解のクラスが振幅の増大現象を持ちうるかを示す.

2 支配方程式

粘性, 圧縮性, 表面張力の影響は無視する. また, 水の運動は渦なしであると仮定する. 波による擾乱を除いたときの水深 h は一定で, 波の代表的な振幅を a , 代表的な水平スケールを l とする. 水平方向の直角座標を (lx, ly) , 底面から測った鉛直座標を hz , 時間を $(l/c_0)t$ ($c_0 = \sqrt{gh}$, g は重力加速度), 波による水面変位を $a\eta$, 速度ポテンシャルを $(alc_0/h)\phi$ とすれば, 水の運動を支配する方程式と自由表面, 底での境界条件は以下のようになる.

$$\beta \nabla^2 \phi + \phi_{zz} = 0, \quad (0 < z < 1 + \alpha\eta), \quad (1)$$

$$\phi_z = 0, \quad (z = 0), \quad (2)$$

$$\eta_t + \alpha \nabla \phi \cdot \nabla \eta - \frac{1}{\beta} \phi_z = 0, \quad (z = 1 + \alpha\eta), \quad (3)$$

$$\phi_t + \frac{\alpha}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{\alpha}{2\beta} \phi_z^2 + \eta = 0, \quad (z = 1 + \alpha\eta). \quad (4)$$

ここで, $\nabla \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$, $\alpha = a/h$, $\beta = (h/l)^2$ であり, 弱い非線形性と弱い分散性が釣り合う弱非線形長波を考慮して $O(\alpha) \sim O(\beta) \ll 1$ と仮定し, 速度ポテンシャルを

$$\phi(x, y, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} (-\beta \nabla^2)^m f(x, y, t) \frac{z^{2m}}{(2m)!}, \quad (5)$$

と展開すると, 非線形と分散の最低次の効果を取り入れた Boussinesq 方程式系を得る.

次に伝播方向が異なる 2 つの孤立波を考える. それぞれの孤立波は KdV 方程式に従っているものとし, 相互作用を高次の効果で記述できると仮定すると, 底での速度ポテンシャル $f(x, y, t)$ は $f(\xi_1, \xi_2, \sigma) = F_1(\xi_1, \sigma) + F_2(\xi_2, \sigma) + \alpha F_{12}(\xi_1, \xi_2, \sigma)$, と書ける. ここで F_i はポテンシャル KdV 方程式 $2\alpha F_{\sigma} + \frac{3}{2}\alpha F_{\xi}^2 + \frac{1}{3}\beta F_{\xi\xi\xi} + O(\alpha^2) = 0$ を満足する. ただし, $\xi_i = \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{x} - t$, $\mathbf{n}_i = \{\cos \psi_i, \sin \psi_i\}$, $\sigma = \alpha t$, 孤立波の伝播方向が x 軸となす角を ψ_i とした. この時, 水面変位 η は

$$\eta = N_1(\xi_1 + \chi_2, \sigma) + N_2(\xi_2 + \chi_1, \sigma) + \alpha I(\kappa) N_1 N_2 + O(\alpha^2), \quad (6)$$

で与えられる. N_1, N_2 は

$$N_i = (\partial_{\xi_i} - \frac{1}{3}\beta\partial_{\xi_i}^3)F_i + \frac{1}{4}\alpha(\partial_{\xi_i}F_i)^2 + O(\alpha^2), \quad (i=1,2), \quad (7)$$

で, 相手の存在により $O(\alpha)$ の位相のずれ χ_1, χ_2 を生じた水面の波形を表し, 相互作用パラメータ $I(\kappa)$ は $I(\kappa) = \frac{3}{2}\kappa^{-1} - 3 + 2\kappa$, 斜め度 κ は $\kappa = \frac{1}{2}(1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) = \sin^2 \frac{\psi_1 - \psi_2}{2}$, 位相のずれ χ_i は $\chi_i = \alpha(\frac{3}{4}\kappa^{-1} - 1)F_i(\xi_i, \tau)$ である.

もし $\kappa = O(\alpha) \ll 1$ のように 2 つの孤立波の伝播方向が近づいてくると相互作用項の係数 $\alpha I(\kappa)$ は $O(1)$ となり, 相互作用は高次の効果であると仮定した上記の解析は破綻してしまう. しかしながらこの時は, 2 つの孤立波の相互作用は KP 方程式

$$\frac{\partial}{\partial x_*} \left(\frac{\partial \eta_*}{\partial t_*} + c_0 \frac{\partial \eta_*}{\partial x_*} + \frac{3c_0}{2h} \eta_* \frac{\partial \eta_*}{\partial x_*} + \frac{1}{6} c_0 h^2 \frac{\partial^3 \eta_*}{\partial x_*^3} \right) + \frac{c_0}{2} \frac{\partial^2 \eta_*}{\partial y_*^2} = 0, \quad (8)$$

によって記述される. ただし, η_*, t_*, x_*, y_* は無次元化していない元の量である. この方程式は完全可積分であることが知られており, 厳密解を構成できることが知られている. $\eta_* = h\tilde{\eta}, x_* = hX, y_* = hY, t_* = (h/c_0)T$ と規格化し, $\tilde{\eta} = \frac{4}{3}(\log \tau)_{XX}$ と置くと, τ に対する双線形方程式 $(D_X(D_T + D_X + \frac{1}{6}D_X^3) + \frac{1}{2}D_Y^2)\tau \cdot \tau = 0$ を得られ, 1-ソリトン解は

$$\tau = 1 + \exp(2\Theta), \quad \Theta = \mathbf{K} \cdot \mathbf{X} - \Omega T + \Theta^0 = KX + LY - \Omega T + \Theta^0, \quad (9)$$

$$\Omega = K \left(1 + \frac{2}{3}K^2 + \frac{L^2}{2K^2} \right), \quad (10)$$

となり, 無次元水面変位は $\tilde{\eta} = \frac{4K^2}{3} \text{sech}^2 \Theta$ となる.

さらに, 2-ソリトン解は

$$\tau = 1 + \exp(2\Theta_1) + \exp(2\Theta_2) + A \exp(2\Theta_1 + 2\Theta_2), \quad (11)$$

$$\Theta_i = \mathbf{K}_i \cdot \mathbf{X} - \Omega_i T + \Theta_i^0 = K_i X + L_i Y - \Omega_i T + \Theta_i^0, \quad (12)$$

$$\Omega_i = K_i \left(1 + \frac{2}{3}K_i^2 + \frac{L_i^2}{2K_i^2} \right), \quad (i=1,2), \quad (13)$$

$$A = \frac{4(K_1 - K_2)^2 - (\tan \psi_1 - \tan \psi_2)^2}{4(K_1 + K_2)^2 - (\tan \psi_1 + \tan \psi_2)^2}, \quad (14)$$

$$\tan \psi_i = L_i / K_i, \quad (i=1,2), \quad (15)$$

で与えられる.

3 ロンスキアン解と共鳴ソリトン解

KP 方程式の双線形方程式として

$$(D_x(-4D_t + D_x^3) + 3D_y^2)\tau \cdot \tau = 0, \quad (16)$$

を選ぶと都合がよい. ここでの x, y, t は第2節のものとは異なり, $x = X - T = (x_* - c_0 t)/h, y = Y = y_*/h, t = -2T/3 = -(2c_0/3h)t_*$ で与えられる. τ は前節と同じで, $\tilde{\eta} = \eta_*/h = \frac{4}{3}(\log \tau)_{xx}$ の関係がある. (16) の解 τ はロンスキアン

$$\tau_N = \begin{vmatrix} f_1^{(0)} & \cdots & f_N^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(N-1)} & \cdots & f_N^{(N-1)} \end{vmatrix}, \quad (17)$$

$$f_i^{(n)} = \frac{\partial^n f_i}{\partial x^n}, \quad (i = 1, \dots, N), \quad (18)$$

と書ける. ただし $f_i(x, y, t)$ は

$$\frac{\partial f_i}{\partial y} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} \quad \frac{\partial f_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^3}, \quad (i = 1, \dots, N), \quad (19)$$

を満足するような関数である. 通常の N -ソリトン解を得るには

$$f_i = e^{\theta_{2i-1}} + e^{\theta_{2i}}, \quad (i = 1, \dots, N), \quad (20)$$

$$\theta_j = -k_j x + k_j^2 y - k_j^3 t + \theta_j^0, \quad (j = 1, \dots, 2N), \quad (21)$$

とおけばよい.

今, 関数 $f_i(x, y, t)$ の選び方には任意性があることに注目し,

$$f_1 = \sum_{i=1}^M e^{\theta_i} =: f, \quad f_i = f^{(i-1)}, \quad 1 < i \leq N \leq M, \quad (22)$$

と選ぶと

$$\tau_N = \begin{vmatrix} f^{(0)} & \cdots & f^{(N-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^{(N-1)} & \cdots & f^{(2N-2)} \end{vmatrix}, \quad (23)$$

となる. $M = M_+ + M_-, N = M_+, (1 \leq M_+ \leq M - 1)$ とおくと τ 関数は

$$\tau_{M_+} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{M_+} \leq M} \Delta(i_1, \dots, i_{M_+}) \exp\left(\sum_{j=1}^{M_+} \theta_{i_j}\right), \quad (24)$$

と書ける. (Binet-Cauchy の定理から簡単に導ける.) ここで $\Delta(i_1, \dots, i_{M_+})$ は van der Monde 行列式

$$\Delta(i_1, \dots, i_{M_+}) = \prod_{1 \leq j < l \leq M_+} (k_{i_j} - k_{i_l})^2,$$

で与えられる [10]. この解を (M_-, M_+) -ソリトン解と呼ぶ. この解は $y \rightarrow -\infty$ で M_- 個のソリトンが, $y \rightarrow \infty$ で M_+ 個のソリトンが形成され, また中間領域でこれらのソリトンが共鳴的に相互作用しており, 共鳴ソリトン解の一般形である.

さらに, $N \times M$ 行列 $A_{(N,M)} := (a_{ij})$ を用いて f_i が

$$f_i = \sum_{j=1}^M a_{ij} e^{\theta_j}, \quad \text{for } i = 1, \dots, N, \quad \text{and } M > N, \quad (25)$$

により定義されるとき τ 函数 (17) は

$$\tau = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_N \leq M} \xi(i_1, \dots, i_N) \prod_{1 \leq j < l \leq N} (k_{i_j} - k_{i_l}) \exp \left(\sum_{j=1}^N \theta_{i_j} \right), \quad (26)$$

と書ける [11]. (これも Binet-Cauchy の定理から簡単に導ける.) ここで $\xi(i_1, \dots, i_N)$ は $N \times N$ 小行列式

$$\xi(i_1, \dots, i_N) := \begin{vmatrix} a_{1,i_1} & \cdots & a_{1,i_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N,i_1} & \cdots & a_{N,i_N} \end{vmatrix}.$$

である. この解は, 共鳴ソリトンと非共鳴ソリトン両者を含んだ一般的なソリトン相互作用を示す.

図 1 にいくつかの共鳴ソリトン解を示した. 図 1(a) は, よく知られた Y 字型の共鳴ソリトン解であり, 2-ソリトン解の退化したものである. 入射している二つのソリトンが共鳴して, 大きなもう一つのソリトンができていたのだが, 生成された大きなソリトンの振幅は入射してくる一つのソリトンの振幅の 4 倍となって, 共鳴により振幅が大きく増幅されている. 図 1(b),(c) に (2,2)-ソリトン解を示した. 図 1(b) では, ソリトンに囲まれたホールができていた. しかしながら, 図 1(c) ではホールがなく, H 字型となっている. これは, 解に含まれる二つの波数 k_2, k_3 を近づけたことによる. 図 1(b),(c) における相互作用部分の振幅に注目すると, 図 1(b) の相互作用部分は, 少し高くはなっているものの, 入射している二つのソリトンの重ね合わせた振幅より高くはなっていない. 一方, 図 1(c) では, H 字型ソリトンの相互作用部分は, 入射してくるソリトンの振幅の 4 倍となっていて, 単なる重ね合わせよりはるかに大きな振幅となっている. 図 1 (b) では相互作用部分はホールを形成し, 波が分散されているのに対して, 図 1(c) ではホールが消滅したことで, 波が一箇所に集中し振幅が大きく増大したと考えることができるだろう. 図 1(c) のような, 有限部分だけが 4 倍の振幅を持つ共鳴ソリトン解の存在は, Miles により方程式の対称性の議論から知られていたが, 厳密解はこれまで具体的には与えられていなかった. この解は Y 字型共鳴ソリトン解のように 2-ソリトン解からの退化としては導出はできないことを注意しておく. 通常のソリトン解からの退化としてこの解を得ようとするならば, 4-ソリトン解の退化を考えなくてはならない. ホールをもつような共鳴ソリトンは過去のソリトン共鳴に関する数値計算で現れており, ソリトン共鳴に関する現象に自然に現れると考えられる [12, 13]. むしろ, いくつかのソリトンが生成されたとき, 自然に現れる共鳴ソリトンは Y 字型ではなく, ホールをもつ共鳴ソリトンや H 字型共鳴ソリトンであろう. Y 字型ソリトンはそれらの極限と考えられる.

図 2 では, (2,3)-ソリトンの時間発展の様子を示した. 通常の非共鳴ソリトン解と比較して, 複雑な非定常な相互作用を示すことが見てとれる. 図 3 では, (3,3)-ソリトンの時間発展

の様子を示した。こちらはホールが4個できている。一般に τ 函数 (24) で書ける (M_-, M_+) -ソリトン解は $(M_- - 1)(M_+ - 1)$ 個のホールを持つ Web 構造 (くもの巣状構造) をなす [10]。このような Web 状構造は, KP 方程式だけでなく, Coupled KP 方程式, 2次元戸田格子方程式, 離散時間2次元戸田格子方程式や超離散2次元戸田方程式でも確認されている [14, 15, 16]。Web 構造が安定なのかどうかは自明ではないが, 数値計算をおこなったところ, 図4に示すようにほぼ厳密解のとおり相互作用をしており, Web 構造は安定な構造であろうということがわかる。(この数値計算は疑スペクトル法で行ったため, Web 構造を示すような初期値を無理に入れたために境界からごみが出ている。しかし, それでもなお, 相互作用部分は安定である。)

このような共鳴ソリトンが持つ複雑な相互作用と振幅増幅の効果を同時に併せ持つような解, つまりある瞬間にある領域の振幅が増大しそして有限時間内に振幅が元に戻るような Freak wave 的性質を持つ解は存在するのだろうか? 図2と図3を見るとわかるように, Web 構造を持つ共鳴ソリトン解の振幅はそれほど大きくはならず, むしろある瞬間に振幅が減少する。図5と図6に最大値の時間変化を示したが, そのことが見て取れる。一般的に, Web 構造を持つ共鳴ソリトン解はある瞬間に振幅が巨大化することはない。

では, τ 函数 (26) で書ける解はどうであろうか? この解は非常に多くのクラスの解を含んでいるが, 中には非定常である瞬間に振幅が急激に増大するものもある。図7にその一例を示した。図7は 2×2 -ロンスキアン解から作られたもので, 一つの Y 字型共鳴ソリトンと別の 1-ソリトンが相互作用している。Y 字型共鳴ソリトンと 1-ソリトンは, 共鳴に近い関係にある。1-ソリトンが共鳴ソリトンの最大振幅部分に入ったとき, 振幅は重ね合わせよりも大きな値に増幅されていることが図7と図8からわかるだろう。つまり, 共鳴ソリトンに別のソリトンが入射し, その両方も共鳴関係に近ければ, 波はある瞬間に増幅されるのである。この原理を拡張すれば, ある瞬間に振幅が巨大化し, しばらくしてもとに戻る解は存在することがわかる (Y 字型共鳴ソリトンの代わりに, H 型共鳴ソリトン ((2,2)-ソリトン) を用いればよい)。つまり, 以下のような振幅増大機構が考えられる。いくつかのソリトンが高速フェリーなどが原因で生成され, その中のいくつかが共鳴条件を満たすとき, H 字型共鳴ソリトンが生成され振幅が増幅される部分ができる。そこに別のソリトンが入射し, H 字型共鳴ソリトンの最大振幅部分と入射ソリトンが共鳴関係にある場合, 入射ソリトンが H 字型共鳴ソリトンの最大振幅部分に達したとき, 振幅はさらに増幅される。そして, 入射ソリトンが H 字型共鳴ソリトンの最大振幅部分を通り過ぎると, 振幅は減少する。

このことは, ソリトン共鳴が巨大波の発生原因の一つとなりうることを示している。また, 多数のソリトンが共鳴的に相互作用すると, その振幅は一個の孤立波の4倍以上になる場合があることがわかり, この現象がもし実際の海洋で起こると重大な被害を与える危険性がある。

4 まとめ

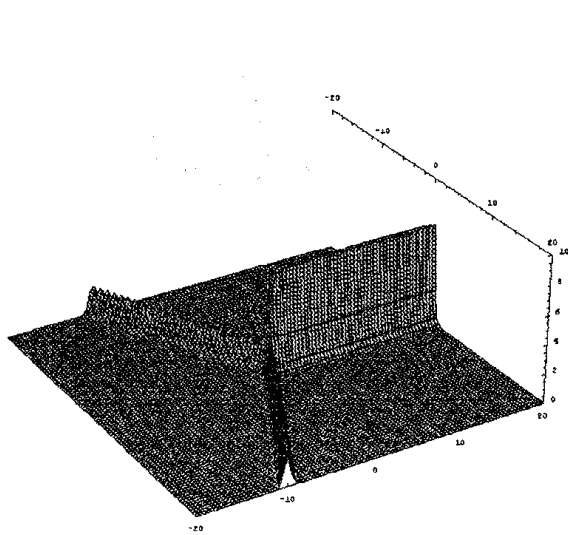
KP 方程式のロンスキアン解には豊富な解が埋まっている。その中から物理的に興味深

い解を見つけることは、まだ十分に行われているとは言い難い。本稿では、海洋での巨大波 (Solitary Killer Wave や Freak Wave) の生成機構を説明するような解が KP 方程式のロンスキアン解の中に埋まっているかを探した。結果、物理的に妥当な解があることがわかった。しかしながら、このような解が実際の海洋中で本当に起こるのかは全く不明であり、今後、観測や実験との比較をすべきであろう。また、Freak Wave は深海域で主に観測されており、その場合のソリトンとの関係を理解することも大事な課題である。

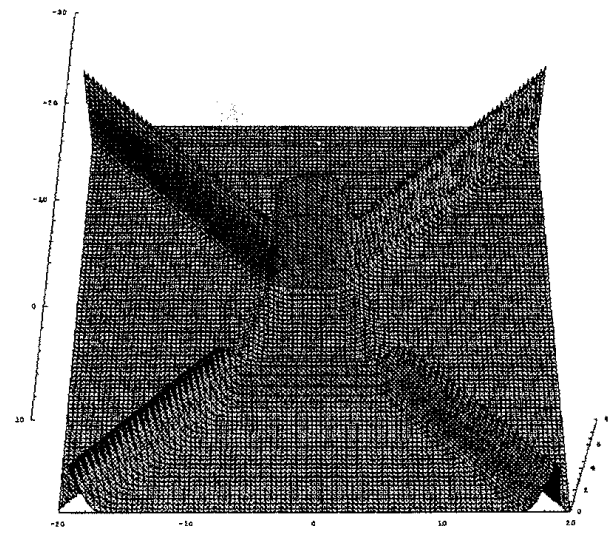
参考文献

- [1] Kharif, C. and Pelinovsky, E.: Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon, *Euro. J. Mech. B*, 22 (2003) 603-634.
- [2] Hamer, M.: Solitary killers, *New Scientist*, No.2201, 163 (1999) pp.18-19.
- [3] Li, Y. and Scлавounos P.D.: Three-dimensional nonlinear solitary waves in shallow water generated by an advancing disturbance, *J. Fluid Mech.*, 470 (2002) 383-410.
- [4] Peterson, P., Soomere, T., Engelbrecht, J. and van Groesen, E.: Soliton interaction as a possible model for extreme waves in shallow water, *Nonlinear Processes in Geophysics*, 10 (2003) 503-510.
- [5] Soomere, T.: Interaction of Kadomtsev-Petviashvili solitons with unequal amplitudes, *Phys. Lett. A*, 332 (2004) 74-81.
- [6] Soomere, T. and Engelbrecht, J.: Extreme elevations and slopes of interacting solitons in shallow water, *Wave Motion*, 41 (2005) 179-192.
- [7] Miles, J. W.: Obliquely interacting solitary wave, *J. Fluid Mech.*, 79 (1977) 157-169.
- [8] Miles, J. W.: Resonantly interacting solitary wave, *J. Fluid Mech.*, 79 (1977) 171-179.
- [9] Porubov, A.V., Tsuji, H., Lavrenov, I. V. and Oikawa, M.: Formation of the rogue wave due to nonlinear two-dimensional waves interaction, *Wave Motion* に投稿中.
- [10] Biondini, G. and Kodama, Y.: On a family of solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation which also satisfy the Toda lattice hierarchy, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 36 (2003) 10519-10536.
- [11] Kodama, Y.: Young diagrams and N -soliton solutions of the KP equation, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 37 (2004) 11169-11190.
- [12] Kako, F. and Yajima, N.: Interaction of Ion-Acoustic Solitons in Two-Dimensional Space, *J. Phys. Soc. Jpn.*, 49 (1980) 2063-2071.

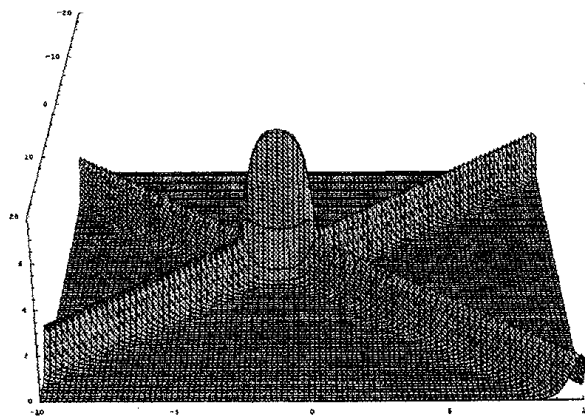
- [13] Tsuji, H. and Oikawa, M.: Two-Dimensional Interaction of Internal Solitary Waves in a Two-Layer Fluid, *J. Phys. Soc. Jpn.*, 62 (1993) 3881-3892.
- [14] Isojima, S., Willox, R. and Satsuma, J.: On various solution of the coupled KP equation, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 35 (2002) 6893-6909.
- [15] Isojima, S., Willox, R. and Satsuma, J.: Spider-web solution of the coupled KP equation, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 36 (2003) 9533-9552.
- [16] Maruno, K. and Biondini, G.: Resonance and web structure in discrete soliton systems: the two-dimensional Toda lattice and its fully discrete and ultra-discrete analogues, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 37 (2004) 11819-11839.



(a) (1,2)-ソリトン ($k_1 = -2, k_2 = 0, k_3 = 2$)



(b) (2,2)-ソリトン ($k_1 = -2, k_2 = -1, k_3 = 1, k_4 = 2$)



(c) (2,2)-ソリトン ($k_1 = -2, k_2 = -0.01, k_3 = 0.01, k_4 = 2$)

図 1: 共鳴ソリトン

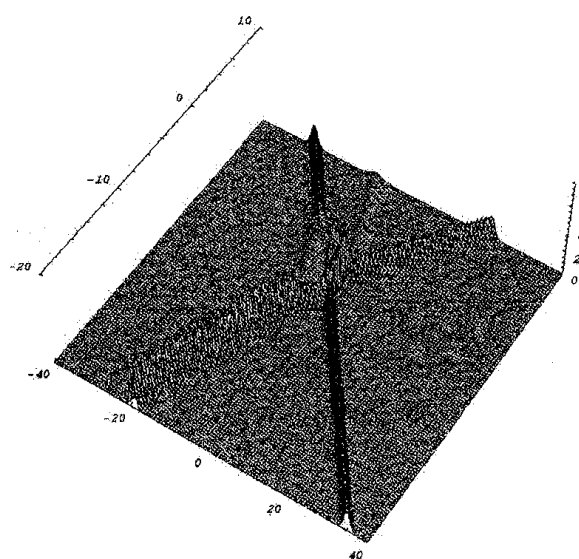
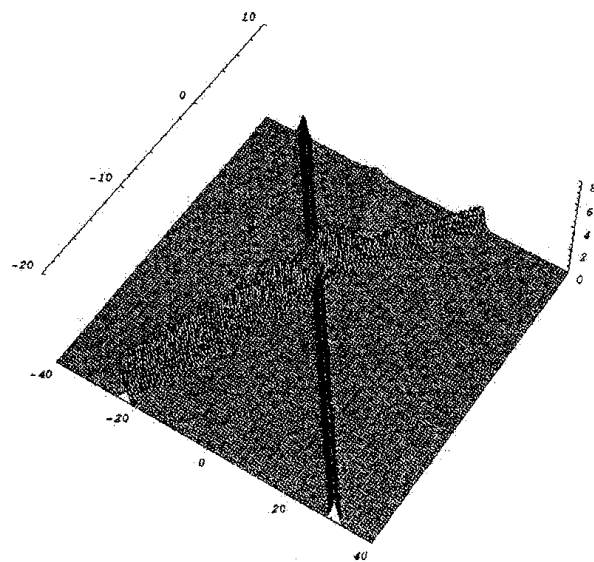
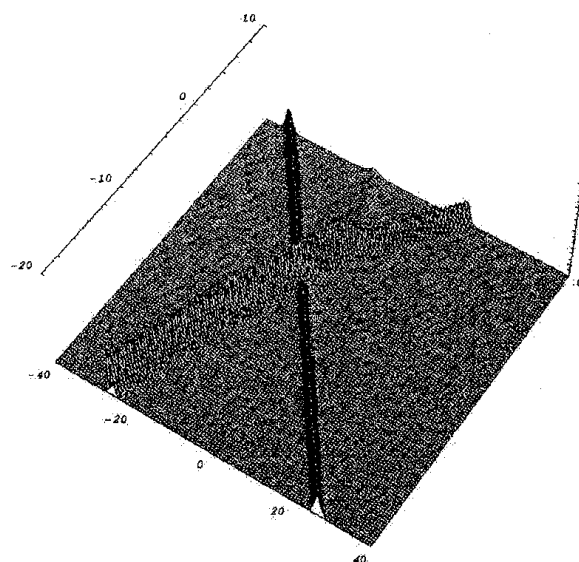
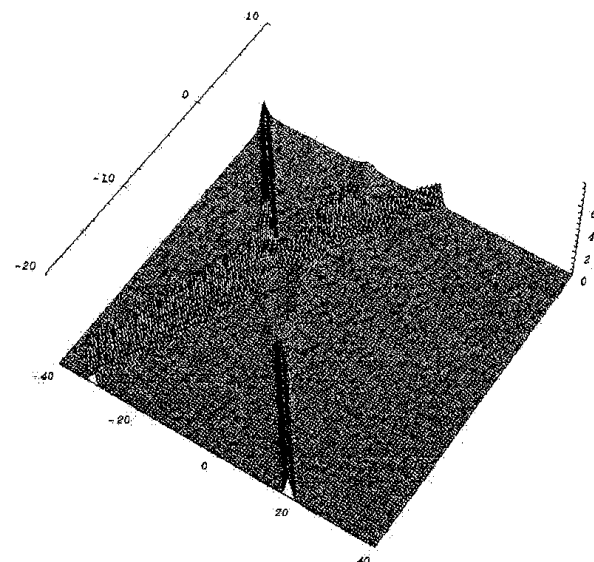
(a) $t=0$ での (2,3)-ソリトン(b) $t=1$ での (2,3)-ソリトン(c) $t=2$ での (2,3)-ソリトン(d) $t=4$ での (2,3)-ソリトン

図 2: (2,3)-ソリトンの時間発展 ($k_1 = -2, k_2 = -1, k_3 = -1/100, k_4 = 1/100, k_5 = 2$)

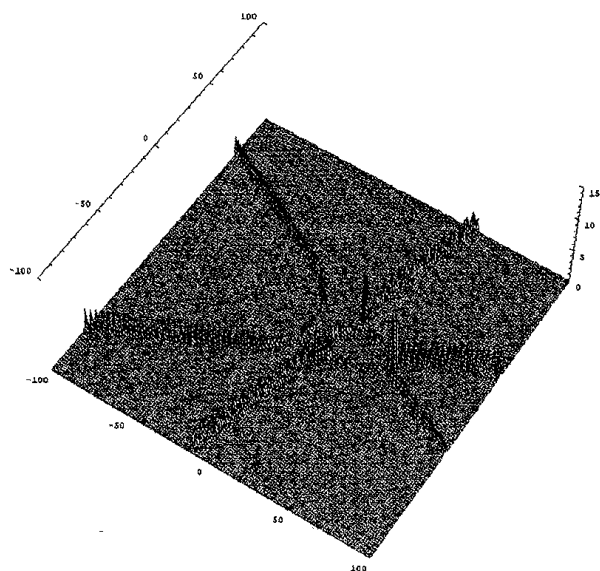
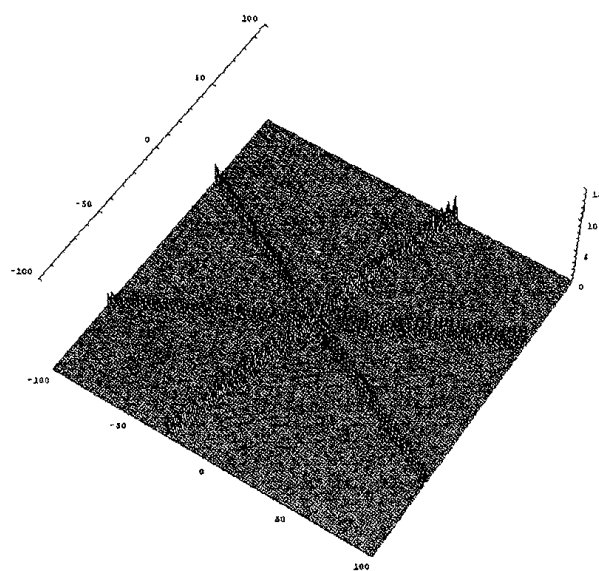
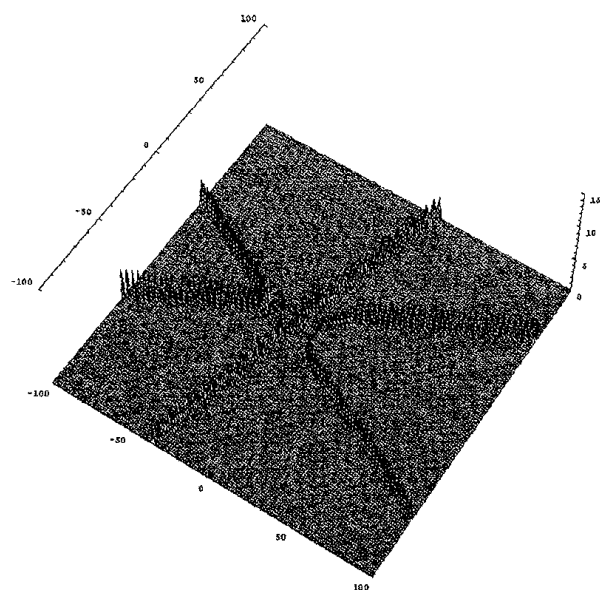
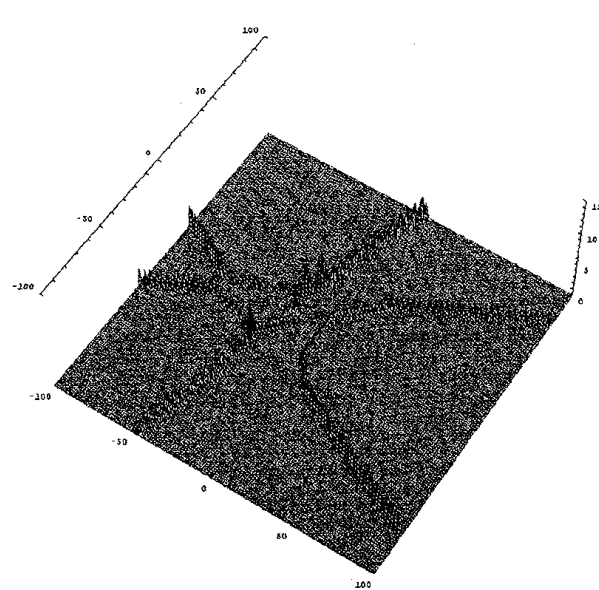
(a) $t=0$ での (3,3)-ソリトン(b) $t=1$ での (3,3)-ソリトン(c) $t=2$ での (3,3)-ソリトン(d) $t=4$ での (3,3)-ソリトン

図 3: (3,3)-ソリトンの時間発展 ($k_1 = -5/2, k_2 = -5/4, k_3 = -1/2, k_4 = 1/2, k_5 = 3/2, k_6 = 5/2$)

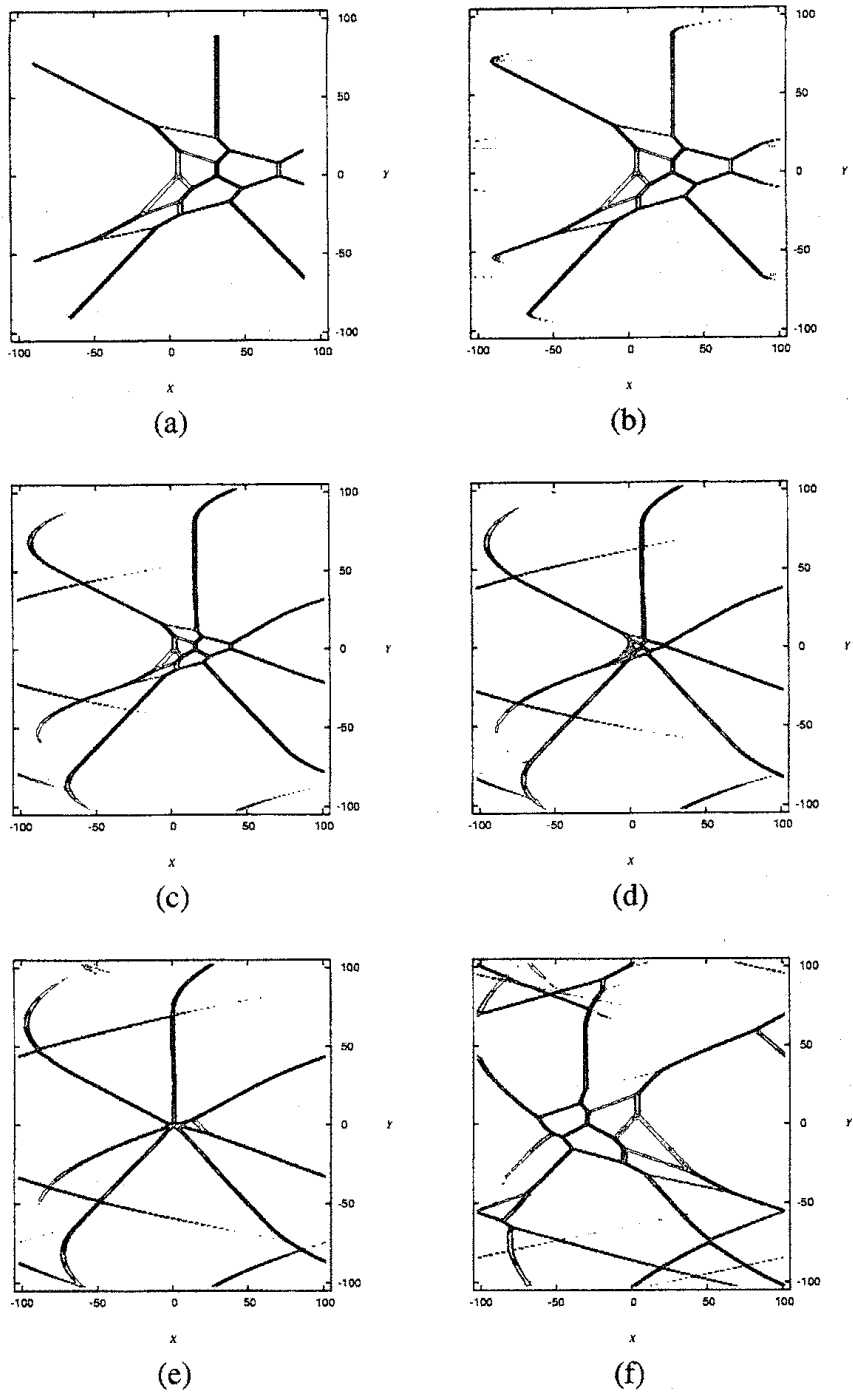


図 4: (3,3)-ソリトンの時間発展：数値計算

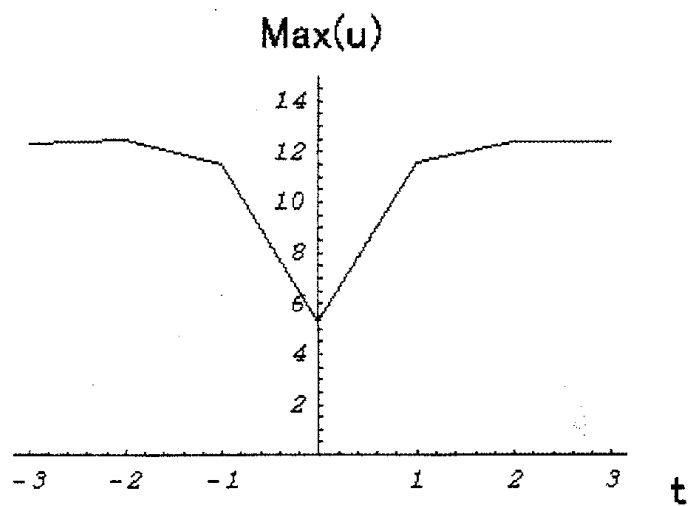


図 5: (3,3)-ソリトンの最大値の時間発展

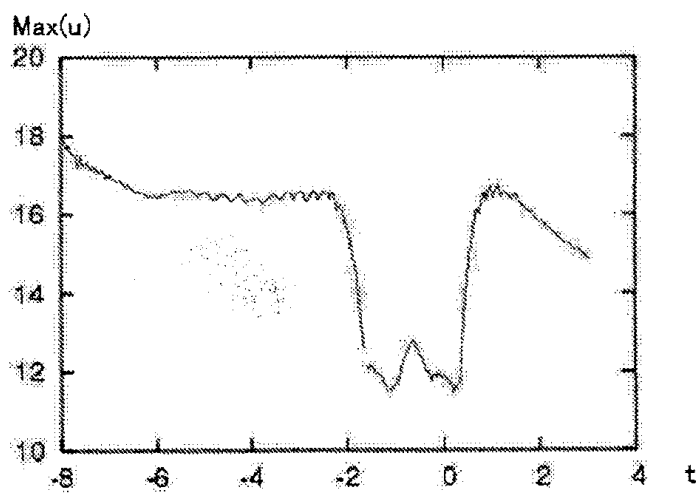


図 6: (3,3)-ソリトンの最大値の時間発展 (数値計算)

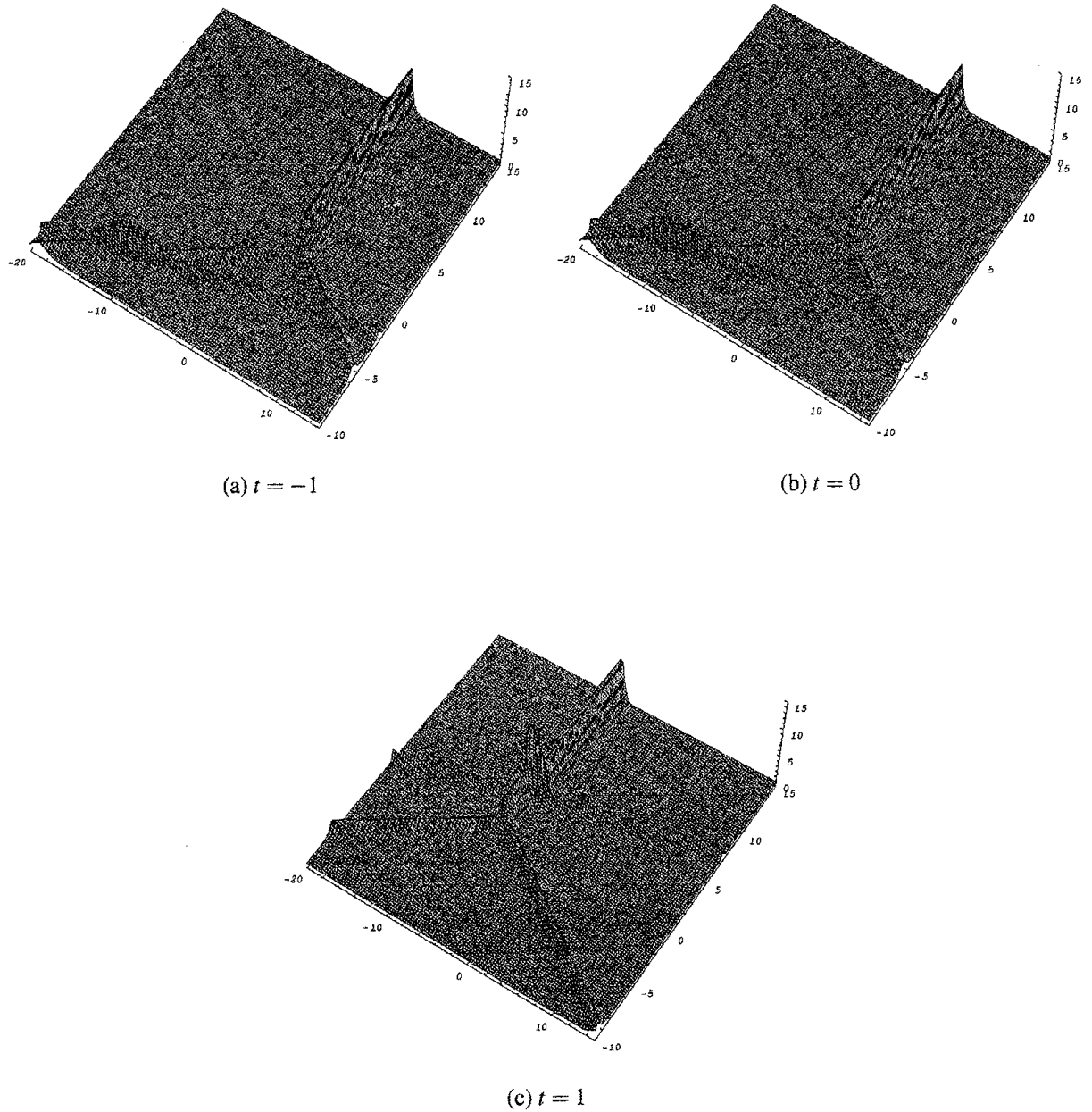


図 7: τ 関数 (26) で書けるソリトン解の時間発展: 2×2 -ロンスキアン, $f_1 = \sum_{k=1}^3 e^{\theta_k}$, $f_2 = \sum_{k=4}^5 e^{\theta_k}$ ($k_1 = -2, k_2 = 0, k_3 = 2, k_4 = 2.01, k_5 = 4$)

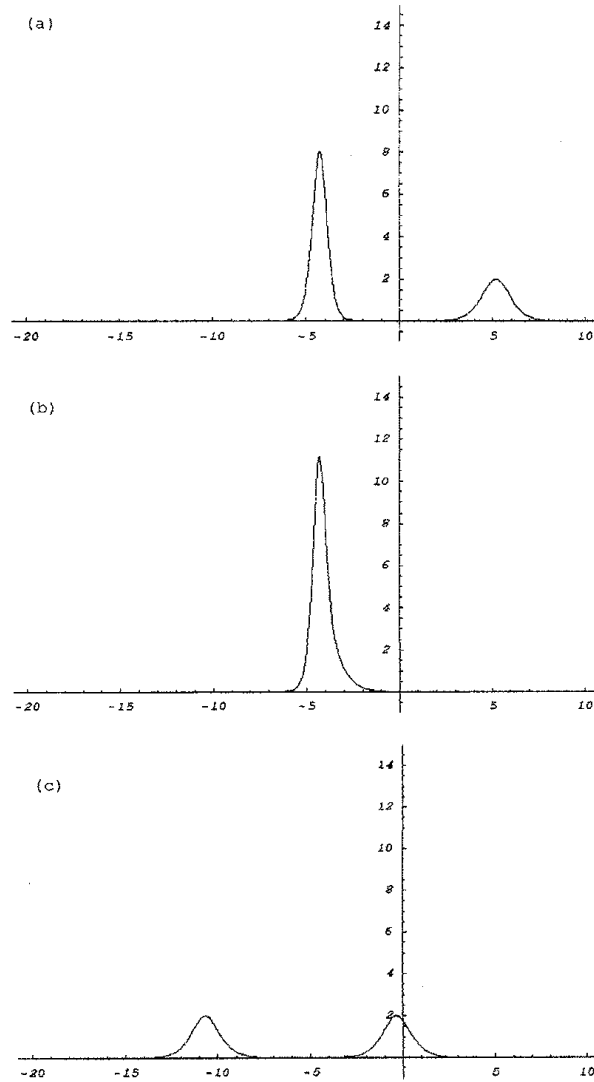


図 8: 図 7 のソリトン解の $t = 1$ での断面図: (a) $y=5.5$, (b) $y=4$, (c) $y=-2$