数理解析研究所講究録 1431 巻 2005 年 148-155

2-D singular Cauchy problems for quasilinear equations

(2 次元準線形方程式に対する特異コーシー問題)

防衛大学校　打越敬祐

1 序文

$x\in\mathbf{C}^2$, $D_x=\partial/\partial x$ とし，$\mathbf{C}^2$ の原点の近傍 ω において準線形作用素

$$Eu=\sum_{|\alpha|=2}E_\alpha(x,u,\nabla_x u)D_x^\alpha u+E_0(x,u,\nabla_x u)$$

を考える．ただし

$$E_\alpha(x_1,x_2,u,p_1,p_2),E_0(x_1,x_2,u,p_1,p_2)\in\mathcal{O}_{\mathbf{C}^5,v^o}.$$

であるとする (ここで $\mathbf{C}^5$ における正則関数の層を $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^5}$ または $\mathcal{O}$ と表わし，定点 $v^o\in\mathbf{C}^5$ における正則関数の芽の集合を $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^5,v^o}$ とする). 定点 $v^o\in\mathbf{C}^5$ はあとで定める．この作用素に対して特異コーシー問題

$$(1)\qquad Eu=0,\ u(0,x_2)=u_0(x_2),\ D_{x_1}u(0,x_2)=u_1(x_2)$$

を考える．ここで $Y=\{0\}\times\mathbf{C}$, $\omega_Y=\omega\cap Y$ とし，$\omega_Y\setminus\{0\}$ の普遍被覆空間 $\mathcal{R}(\omega_Y\setminus\{0\})$ に対して

$$u_j\in\mathcal{O}(\mathcal{R}(\omega_Y\setminus\{0\}))$$

と仮定する．このとき (1) の解の特異性が複素領域でどのように伝播するかを考察する．

以下の条件を仮定する．まず Y は非特性的とする:

$$(2)\qquad E_{(2,0)}=1.$$

つぎに E の主表象 $\sigma_2(E)(x,u,p;\xi)$ を

$$\sigma_2(E)(x,u,p;\xi)=\sum_{|\alpha|=2}E_\alpha(x,u,p)\xi^\alpha$$

と定め，特性根 $\lambda_i(x,u,p)$ を

$$\sigma_2(E)(x,u,p;\xi)=(\xi_1-\lambda_1(x,u,p)\xi_2)(\xi_1-\lambda_2(x,u,p)\xi_2)$$

により定める．そして2つの特性根が点v°において相異なると仮定する:

$$\lambda_1(v^{\circ}) \neq \lambda_2(v^{\circ}). \tag{3}$$

したがって$\lambda_j(x,u,p) \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}^5,v^{\circ}}$である．

つぎに初期値がヘルダー連続であると仮定する．$q>0$, $q_0=[q]$として，$\mathcal{O}^q(\mathcal{R}(\omega_Y \setminus \{0\}))$は$\mathcal{R}(\omega_Y \setminus \{0\})$上で一様に

$$\begin{aligned} &|D_{x_2}^k f(x_2)| \le \exists a, && 0 \le k \le q_0,\\ &|D_{x_2}^k f(x_2)| \le \exists a|x_2|^{q-q_0-1}, && k=q_0+1 \end{aligned}$$

を満たす$f(x_2) \in \mathcal{O}(\mathcal{R}(\omega_Y \setminus \{0\}))$の全体と定める．そしてある実数$q>0$に対して

$$u_j(x_2) \in \mathcal{O}^{q+1-j}(\mathcal{R}(\omega_Y \setminus \{0\})),\ 0 \le j \le 1. \tag{4}$$

であると仮定する．

注意1. 上述のヘルダー連続性の定義は見かけ上は通常の定義と違うが，正則関数の場合は通常のものと一致する ([5], Chap 13, Lemma 8.7参照).

注意2. $j+k \le 1$とする．このとき適当な$\varepsilon > 0$をとって$D_{x_2}^k u_j(x_2) = \int_{\varepsilon}^{x_2} D_{x_2}^{k+1} u_j(\tau)d\tau + D_{x_2}^k u_j(\varepsilon)$となり，$x_2 \to 0$とできるから，

$$D_{x_1}^j D_{x_2}^k u(0,0) = D_{x_2}^k u_j(0) = \lim_{x_2 \to 0} D_{x_2}^k u_j(x_2) \in \mathbf{C}$$

と定義する．

そこで$u^{\circ}=u(0)$, $p^{\circ}=\nabla_x u(0)$として，$v^{\circ}=(0,u^{\circ},p^{\circ}) \in \mathbf{C}^5$と定める．以上の仮定のもとで(1)を解き，特異性の伝播を調べる．

線形方程式の場合にはこの問題は[1, 7]ほか多くの論文で研究された．この場合は特性根λ_1, λ_2は$(u, \nabla_x u)$に依存しないので，ただちに特性関数$\psi_1(x), \psi_2(x)$を

$$(D_{x_1} - \lambda_i(x) D_{x_2})\psi_i(x) = 0,\ \psi_i(0,x_2) = x_2. \tag{5}$$

により定義できる．そこで原点を通る特性曲線Z_1, Z_2を$Z_i = \{x \in \omega;\ \psi_i(x) = 0\}$により定める．線形作用素$E$が条件(2)–(4)を満たすとき，$\omega$を小さく取り直せば解$u(x) \in \mathcal{O}(\mathcal{R}(\omega \setminus Z_1)) + \mathcal{O}(\mathcal{R}(\omega \setminus Z_2))$

が存在することが知られている．半線形方程式は E. Leichtnam [3] と A. Nabaji, C. Wagschal [4] によって研究された．この場合は主要部が線形なので Z_1, Z_2 を同様に定めて同じ結果が得られている．

準線形方程式の場合は筆者の最近の論文 [6] で研究された．本稿では2次元の場合についてより詳しく調べる．その結果を要約すると次の通りである．

(i) 準線形方程式の解は原点を通るいくつかの複素曲線の外で正則になる．これらの複素曲線は複雑な構造をもつことがあり，**モノイダル変換**を用いて記述する．

(ii) $q \geq 1$ のとき，これらの複素曲線は**特性的**である．

(iii) $0 < q < 1$ のとき，これらの複素曲線は**非特性的**な場合があり，特異点集合はいくつかの**分枝**にわかれることがある．

特異初期値問題を解くためにモノイダル変換を用いたのは [2] が最初である．筆者はこの手法は超局所解析の一種であると考え，[6] の中でも用いた．

2 主要結果および例

まずモノイダル変換について解説する．

特性根 $\lambda_i(x,u,p)$ の線形化特性根 λ_i° を $\lambda_i^\circ = \lambda_i(v^\circ)$ によって定める．また線形化特性根 λ_i° に対応する特性関数 y_1, y_2 を $y_i = x_2 + \lambda_i^\circ x_1$ と定める．また小さな $\varepsilon > 0$ に対して ω_1, ω_2 を $\omega_i = \{x \in \omega;\ |y_i| > \varepsilon|(y_1, y_2)|\}$ と定め，さらに $Z_i' = \omega \setminus \omega_i$ と定める．条件 (3) により $dy_1 \wedge dy_2 \neq 0$ であり，$Y = \{y_1 = y_2\}$ である．

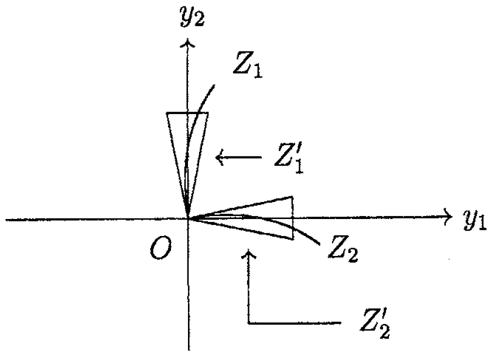
$\lambda_i(x,u,p) \fallingdotseq \lambda_i^\circ$ だから解 $u(x)$ の特異点は $\{y_1 = 0\}$, $\{y_2 = 0\}$ の近く (すなわち Z_2', Z_1' の中) に現われると予想され，この論説文中では結果的にこのことはいつも正しい．そうだとすれば解の特異点集合 $Z_i \subset Z_i'$ を求め，Z_1, Z_2 の外で解 $u(x)$ を求めればよい．しかし Z_1, Z_2 は複雑な構造をもつかもしれないので，Z_1, Z_2 をふたつ同時に求めるのではなく，ひとつずつ別々に求める．すなわち結果的に $Z_i \subset Z_i'$ となるのだから，

$$\Omega_1 = \omega \setminus Z_1' \setminus Z_2,\ \Omega_2 = \omega \setminus Z_1 \setminus Z_2'$$

と定めるとき

$$\omega \setminus Z_1 \setminus Z_2 = \Omega_1 \cup \Omega_2$$

である (図を参照).



簡単のため普遍被覆空間の記号をしばらく省略する. $\Omega_1 \cup \Omega_2$ で (1) を解くためにはまず (1) の解 $u^i(x) \in \mathcal{O}(\Omega_i)$ $(i = 1, 2)$ を求める. このとき $\Omega_1 \cap \Omega_2$ において $u^1 = u^2$ となるので, u^1 と u^2 を貼りあわせて解 $u(x) \in \mathcal{O}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ を得る. だから (1) を Ω_1 と Ω_2 で別々に解けばよい. たとえば (1) を $\Omega_1 = \omega_1 \setminus Z_2$ で解くことにする.

きちんと整理すれば, 特異点集合 $Z_2 \subset \mathcal{R}(\omega_1)$ および解 $u(x) \in \mathcal{O}(\mathcal{R}(\mathcal{R}(\omega_1) \setminus Z_2))$ を求めればよい.

以上の考え方を用いて $q \geq 1$ の場合の結果を述べる. $B(r) = \{z \in \mathbf{C};\ |z| < r\}$, $\hat{B}(r) = B(r) \setminus \{0\}$ とする. $\varphi_2'(y_1) \in \mathcal{O}(\mathcal{R}(\hat{B}(r)))$ が

$$|\varphi_2'(y_1)| \leq \varepsilon |y_1| \tag{6}$$

を満たしているとして, $\varphi_2(y) = y_2 - \varphi_2'(y_1) \in \mathcal{O}(\mathcal{R}(\omega_1))$ とする. このとき

$$Z_2 = \{\tilde{x} \in \mathcal{R}(\omega_1);\ \varphi_2 = 0\}.$$

と定める. 自然な写像 $\mathrm{proj}_{\omega_1} : \mathcal{R}(\omega_1) \longrightarrow \omega_1$ に対して条件 (6) により $\mathrm{proj}_{\omega_1}(Z_2) \subset Z_2'$ となる.

定理 1. 条件 (2)–(4) および $q \geq 1$ のとき, $\varepsilon > 0$ と ω とを小さくすれば, (6) を満たす $\varphi_2'(y_1) \in \mathcal{O}(\mathcal{R}(\hat{B}(r)))$ と (1) の一意的な解 $u(x) \in \mathcal{O}(\mathcal{R}(\mathcal{R}(\omega_1) \setminus Z_2))$ が存在する. Z_2 は上のように定める.

またこの解 u はヘルダー連続である:

$$|D_x^\alpha u(x)| \leq \exists M |y_2 - \varphi_2'(y_1)|^{-(|\alpha| - q - 1)_+},$$
$$|\alpha| \leq [q] + 2.$$

ただし $c_+ = \max(c, 0)$ とする.

定理 1 で $Z_2 \subset \mathcal{R}(\omega_1)$ は特性因子 $D_{x_1} - \lambda_{x_2}(x, u, \nabla u)D_2$ に対して特性的である. ただし特性的という概念は次のような注意を要する. (1) の解 u と関数 $\psi_2(x)$ が $\lambda_2'(x) = \lambda_2(x, u(x), \nabla u(x))$ に対して

(7) $$(D_{x_1} - \lambda_2'(x)D_{x_2})\psi_2(x) = 0$$

を満たしているとき, $W_2 = \{\psi_2(x) = 0\}$ を特性曲線とよぶのは自然なようにみえる. しかし $u(x) \in \mathcal{O}(\mathcal{R}(\mathcal{R}(\omega_1) \setminus Z_2)$ だから $\lambda_2'(x) \in \mathcal{O}(\mathcal{R}(\mathcal{R}(\omega_1) \setminus Z_2))$ であり, したがって一般的に (7) の解 ψ_2 もせいぜい $\mathcal{R}(\mathcal{R}(\omega_1) \setminus Z_2)$ の上でしか定義されていない. だから ψ_2 や W_2 は Z_2 の外でしか定義されていない. するとたとえば Z_2 が特性的である, という命題は意味を成さない. そこで特性曲線という概念をあらためて次のように定める.

定義. $Z_2 \subset \mathcal{R}(\omega_1)$ と $u(x) \in \mathcal{O}(\mathcal{R}(\mathcal{R}(\omega_1) \setminus Z_2))$ は定理 1 の通りであるとする. $\psi_2'(y_1) \in \mathcal{O}(\mathcal{R}(\hat{B}(r))$ が $|\psi_2'(y_1)| \leq \varepsilon |y_1|$ を満たしているとして, $W_2 = \{y \in \mathcal{R}(\omega_1);\ y_2 = \psi_2'(y_1)\}$ と定める. W_2 が特性的であるとは, W_2 の複素近傍 $W_2' \subset \mathcal{R}(\omega_1)$ と定数 $a > 1$ と関数 $b(x) \in \mathcal{O}(\mathcal{R}(W_2' \setminus Z_2))$ があり, $\mathcal{R}(W_2' \setminus Z_2)$ において

$$\begin{aligned} &\{D_{x_1} - \lambda_2(x, u, \nabla_x u)D_{x_2}\}\{b(x)(y_2 - \psi_2'(y_1))\} = 0, \\ &1/a \leq |b(x)| \leq a \end{aligned}$$

となることと定める. $\psi_2(x) = b(x)(y_2 - \varphi_2'(y_1))$ とおけば, (7) が成立し, $\psi_2(x)$ 自身は Z_2 で定義されていなくてもよい.

このときつぎの結果を得る.

定理 2. 定理 1 において Z_2 は λ_2 に対応する複素特性曲線である.

この事実を明示する例をあげる.

例. 一般的に $q > 0$, $q \notin \mathbf{Z}$ として, つぎの初期値問題を考える.

(8) $$\begin{cases} Eu = D_{x_1}^2 u + D_{x_1}u \cdot D_{x_1}D_{x_2}u = 0, \\ u(0, x_2) = 0,\ D_{x_1}u(0, x_2) = x_2^q + 1. \end{cases}$$

この場合 $u^\circ = 0$, $p^\circ = (1, 0)$ で,

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -p_1, \quad \lambda_1^\circ = 0, \quad \lambda_2^\circ = -1$$

である．したがって $y_1 = x_2$，$y_2 = x_2 - x_1$ となり，

$$\omega_1 = \{x \in \omega;\ |x_2| > \varepsilon|(x_2 - x_1, x_2)|\},$$
$$\omega_2 = \{x \in \omega;\ |x_2 - x_1| > \varepsilon|(x_2 - x_1, x_2)|\}$$

である．$u'(x) = D_{x_1}u(x)$ とすると

$$\begin{cases} Eu = D_{x_1}u' + u' \cdot D_{x_2}u' = 0, \\ u'(0, x_2) = x_2^q + 1 \end{cases}$$

となる．これはバーガーズの方程式と呼ばれ，もっとも基本的な準線形方程式であるが，1階偏微分方程式だから特性曲線の方法で解けて，

(9) $$u' = (x_2 - x_1u')^q + 1$$

となる．

まず $q > 1$ の場合を考える．このとき定理 1 と定理 2 が成立することはつぎのようにして直接確認できる．$q > 1$ の場合に限り，原点の小近傍 ω で陰関数定理により (9) を $u' = u'(x)$ の形に書き直せて，

$$u' \text{ が非正則} \Longleftrightarrow x_2 - x_1u' = 0 \Longleftrightarrow u' = 1 \Longleftrightarrow x_2 - x_1 = 0$$

となる．$\{x_2 - x_1 \neq 0\}$ において u' の原始関数 $u''(x)$ $(= \int u'(x)dx_1)$ が存在する．したがって $u(x) = u''(x) - u''(0, x_2)$ は (8) をみたし，$\{x_2 - x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0\}$ において正則である．すなわち $Z_i = \{y_i = 0\}$ として $u \in \mathcal{O}(\mathcal{R}(\omega \setminus Z_1 \setminus Z_2))$ である．定理 1 はこの事実を $u \in \mathcal{O}(\mathcal{R}(\mathcal{R}(\omega_1) \setminus Z_2))$ (および $u \in \mathcal{O}(\mathcal{R}(\mathcal{R}(\omega_2) \setminus Z_1))$) と表現している．さらにこの場合 Z_1, Z_2 が特性的であることを確認しよう．$\lambda_1 = 0$ と $y_1 = x_2$ は $(D_{x_1} - \lambda_1 D_{x_2})y_1 = 0$ をみたすから，Z_1 は特性的である．一方

$$(D_{x_1} - \lambda_2 D_{x_2})((u' - 1)^{1/q}) = q^{-1}(u' - 1)^{(1-q)/q}Eu = 0,$$
$$(u'(0, x_2) - 1)^{1/q} = x_2,$$

であり，$\psi_2 = (u'-1)^{1/q}$ は (7) をみたす．また $b(x) = (u'-1)^{1/q}/y_2$ として適当な $a > 1$ に対して $1/a \leq |b(x)| \leq a$ となる．したがって上の定義において $\psi_2' = x_1$，$b(x) = (u' - 1)^{1/q}/y_2$ と考えれば，$Z_2 = \{x_1 = x_2\}$ も特性的である．

$0 < q < 1$ の場合は定理 1 と定理 2 は正しくない．それどころか状況は一変する．まず $q = 1/2$ としてみる．(9) により

$$u' = 1 + \frac{1}{2}\Big(-x_1 + \sqrt{x_1^2 - 4x_1 + 4x_2}\,\Big)$$

である．原点の小近傍 ω をとり，今度はあらためて

$$
\begin{aligned}
Z_1 =&\{x \in \omega;\ y_1 = 0\}, \\
Z_2 =&\{x \in \omega;\ x_1^2 - 4x_1 + 4x_2 = 0\} \\
=&\{x \in \omega;\ y_2 = -(y_1 - y_2)^2/4\} \\
(=&\{x \in \omega;\ y_2 = \exists\varphi_2'(y_1)\})
\end{aligned}
$$

とすると，$u' \in \mathcal{O}(\mathcal{R}(\omega \setminus Z_2))$ である．先のように $D_{x_1}u'' = u'$ をみたす $u''(x) \in \mathcal{O}(\mathcal{R}(\omega \setminus Z_2))$ があり，$u(x) = u''(x) - u''(0, x_2) \in \mathcal{O}(\mathcal{R}(\omega \setminus Z_1 \setminus Z_2))$ となる．先のように Z_1 は λ_1 に対して特性的である．しかし Z_2 は非特性的である．実際，$\psi_2 = (u' - 1)^{1/q}$ は (7) をみたし，$W_2 = \{x \in \mathcal{R}(\mathcal{R}(\omega_1) \setminus Z_2);\ u' = 1\} \subset \{x_1 - x_2 = 0\}$ は特性的であるが，$Z_2 \neq W_2$ である．

最後に $q = 1/3$ としてみる．(9) により

$$
\begin{aligned}
u' = 1+ &\left(\frac{1}{2}\left(x_2 - x_1 + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 4x_1^3/27}\ \right)\right)^{1/3} \\
+ &\left(\frac{1}{2}\left(x_2 - x_1 - \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 4x_1^3/27}\ \right)\right)^{1/3}
\end{aligned}
$$

である．ここで

$$
\begin{aligned}
Z_{2\pm} =&\ \ \{x \in \mathcal{R}(\omega_1);\ x_2 - x_1 = \pm 2\sqrt{x_1^3/27}\} \\
=&\ \ \{x \in \mathcal{R}(\omega_1);\ y_2 = \pm 2\sqrt{(y_2 - y_1)^3/27}\} \\
(=&\ \ \{x \in \mathcal{R}(\omega_1);\ y_2 = \exists\varphi_{2,\pm}'(y_1)\}).
\end{aligned}
$$

とすれば u' は $Z_2 = \{x \in \mathcal{R}(\omega_1);\ (x_2 - x_1)^2 + 4x_1^3/27 = 0\} = Z_{2+} \cup Z_{2-}$ に沿って特異点をもつ．$Z_1 = \{y_1 = 0\}$ として先のように $u(x)$ は $\mathcal{R}(\omega \setminus Z_1 \setminus Z_2)$ において正則になる．この場合も Z_1 は特性的であり，$Z_{2\pm}$ は非特性的である．さらに Z_2 はふたつの成分 $Z_{2\pm}$ に分岐している．

以上の事に注意して $0 < q < 1$ の場合の一般論を述べる．$m \in \mathbf{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ に対して

$$
\mathcal{O}^{q,m}(\mathcal{R}(\omega_Y \setminus \{0\})) = \{g(x_2) \in \mathcal{O}^q(\mathcal{R}(\omega_Y \setminus \{0\}));\ g(x_2^m) \in \mathcal{O}(\omega_Y)\}
$$

とする．つまり原点の周りで m 価正則な関数を考える．

定理 3. $0 < q < 1$, $m \in \mathbf{N}$ かつ $mq \in \mathbf{N}$ とする．$u_j \in \mathcal{O}^{q+1-j,m}(\mathcal{R}(\omega_Y \setminus \{0\}))$ とする．このとき適当な $m' \in \{1, \cdots m-1\}$ と

$$
\begin{aligned}
&|\varphi_{2j}'(y_1)| \leq \varepsilon |y_1|, \\
&\varphi_{2i}'(y_1) \neq \varphi_{2j}'(y_1),\ \ \forall i \neq \forall j,\ \forall y_1 \in \mathcal{R}(\hat{B}(r))
\end{aligned}
$$

をみたす $\varphi'_{21}(y_1), \cdots, \varphi'_{2m'}(y_1) \in \mathcal{O}(\mathcal{R}(\hat{B}(r))$ が存在し，(1) の解は $\mathcal{R}(\mathcal{R}(\omega_1) \setminus Z_2)$ において正則である．ただし

$$Z_2 = Z_{21} \cup \cdots \cup Z_{2m'},$$
$$Z_{2j} = \{y \in \mathcal{R}(\omega_1);\ y_2 = \varphi'_{2j}(y_1)\}$$

とする．これらはたがいに交わらない．これらは特性的とは限らない．

References

[1] Y. Hamada, *The singularities of the solution of the Cauchy problem*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., **5** (1969), 21–40.

[2] E. Leichtnam, *Le problème de Cauchy ramifié*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., **23** (1990), 369–443.

[3] E. Leichtnam, *Le problème de Cauchy ramifié semi-linéaire d'ordre deux*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., **24** (1991), 189–214.

[4] A. Nabaji and C. Wagschal, *Singularités à croissance lente*, J. Math. Pures Appl., **72** (1993), 335–375.

[5] M. E. Taylor, *Partial differential equations, vol. 3*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1996.

[6] K. Uchikoshi, *Singular Cauchy problems for quasilinear equations of order two*, J. Math. Pures Appl., **83** (2004), 1151–1178.

[7] C. Wagschal, *Problème de Cauchy analytique à données méromorphes*, J. Math. Pures Appl., **51** (1972), 375–397.