

# 長距離相互作用を持つハミルトン系における秩序構造形成

小山博子\* (早稲田大理工)      小西哲郎† (名古屋大理)

## 概要

ハミルトン系の緩和過程において、ランダムな初期状態から非自明な空間構造が生成される例として、1次元べきポテンシャルモデルでフラクタルな構造が形成される現象を紹介する。特に、この系の  $\mu$  空間で渦パターンが形成されることに着目し、流体において渦パターンが形成される乱流との関連性を探りたい。 $\mu$  空間と実空間の違いはあるが、両者に共通する渦に着目して動力学を捉えなおしたり統一的に理解できる可能性がある。

## 1 保存力学系での動的な構造

自然界では、生命体から宇宙といった広大なスケールにわたってさまざまな空間構造がみられる。とりわけ、それらの構造が、系を構成する要素間の相互作用によって形成される場合、その動的なふるまいの記述法を見出すことは力学系の重要な課題である。

我々はハミルトン系において、なんらかの空間構造が動的に形成される場合について、その根底にある力学機構はなにか、それを如何に記述し理解できるか、を考えていきたい。ハミルトン系を考える場合、その多くは長時間後には熱平衡状態に達することが予想される。しかしそのような場合であっても、途中過程で動的に構造がつくられる可能性はある。おそらくそれは、系がある種の大域結合系であったり長距離相互作用をもつような場合に期待できると思われる(図1)。そのような場合、ハミルトニアンからダイナミクスを考える必要がでてくるが、遷移過程としての力学構造をどのように記述すればよいか問題となってくる。

本研究の目標は

- ハミルトン系で動的な構造形成が起きる簡単な例を調べることにより、動的な構造の特性、成因などを知る。

---

\*koyama@gravity.phys.waseda.ac.jp

†tkonishi@r.phys.nagoya-u.ac.jp

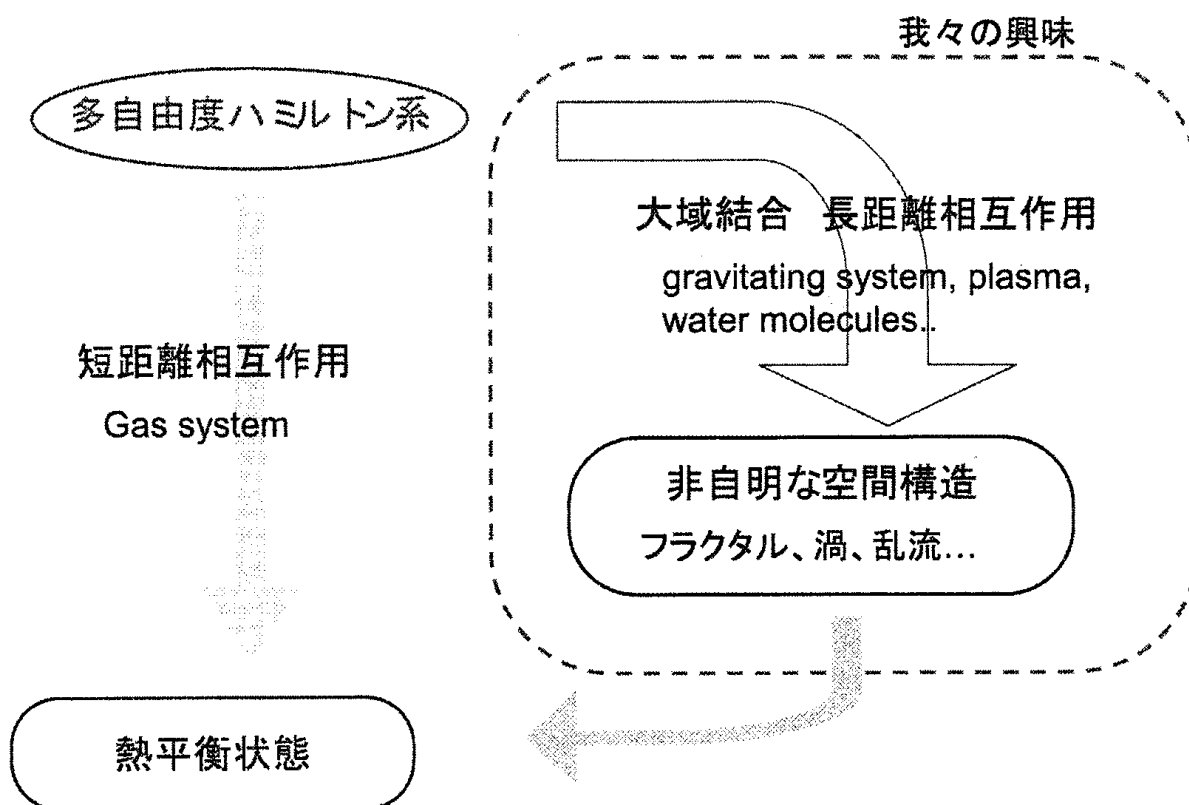


図 1: ハミルトン系での動的構造形成

- 構造がつけられる力学機構を理解するためのアプローチ法を探る。

ここでは簡単な例として、大域結合系でありスケール不変なべき型ポテンシャルを持つハミルトン系からフラクタルな空間構造が自発形成される現象 [1] について述べる。

## 2 1次元べきポテンシャルモデルにおけるフラクタルな空間構造の動的形成

モデルとして、ハミルトニアンが

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{N} \sum_{i>j} |x_i - x_j|^\alpha \quad (1)$$

で記述される、等質量の  $N$  個の粒子が、指数  $\alpha$  のべき型ポテンシャルで相互作用する系をかながえる。とくに  $\alpha = 1$  の場合、1次元自己重力多体系 (または、シートモデル) とよばれる。無限に広がった平行に並んだシートが、お互いのニュートン重力で運動するのに対応する。

## 2.1 cold-random 初期条件からの時間発展

初期条件  $(x_i(0), v_i(0))$  が

$$v_i(0) = 0, \quad x_i(0) = \text{uniformly random in } [0, 1] \quad (2)$$

の下での  $\mu$  空間での時間発展を調べる。以下では粒子数が  $N = 2^{16}$  での結果を示す。

ポテンシャルのべき指数が  $\alpha \sim 1$  付近の場合、 $\mu$  空間で小さな渦ができ、お互いを巻き込みながら渦の入れ子構造ができていく様子が見える (図 2)。

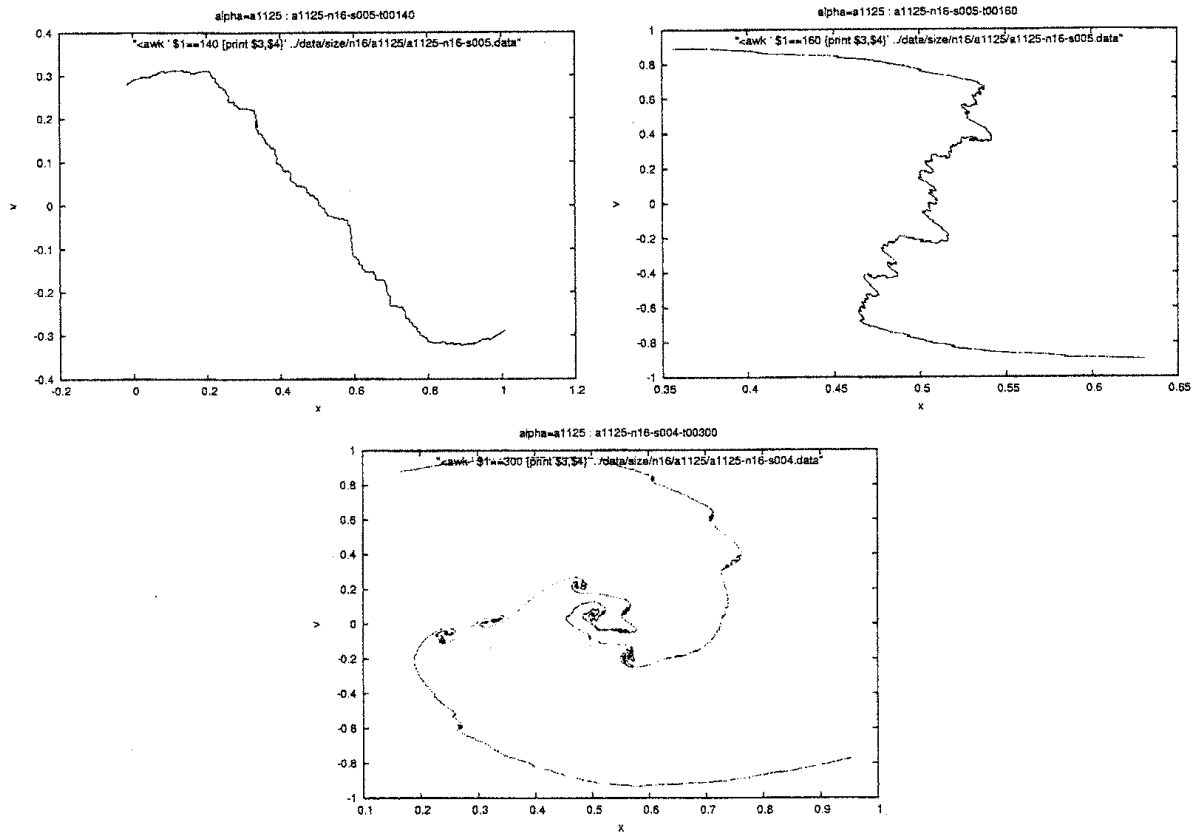


図 2:  $\mu$  空間の時間発展。相互作用ポテンシャルのべき指数は  $\alpha = 1 + 1/8$

$\mu$  空間で渦の入れ子構造ができているとき、粒子の空間分布のボックスカウント次元を測ると非整数になる (図 3)。ランダムな初期状態から、フラクタルな空間構造が形成されることが確かめられる。

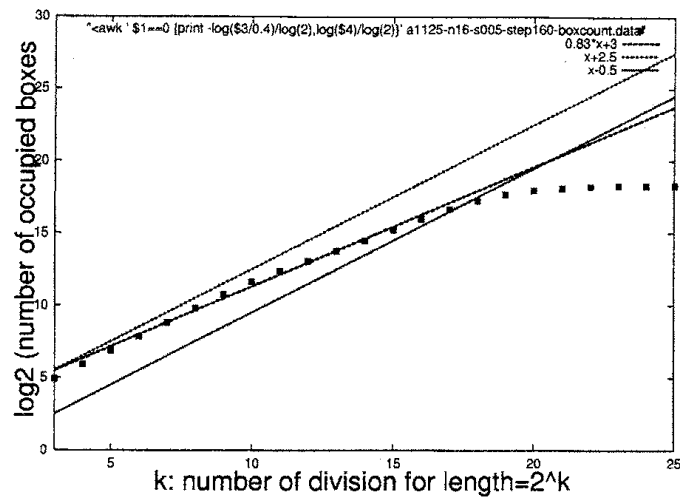


図 3: ボックスカウント次元  $D \approx 0.83$

なおゼロでない速度分散がある“hot”な初期条件からの時間発展では、 $\mu$ 空間で渦の入れ子構造はつukられない [1]。

一方、ポテンシャルのべき指数が  $\alpha > 1.3$  あたりになると、近傍に働く力が弱すぎて、 $\mu$ 空間で渦の入れ子構造はできず、ひとつの螺旋が巻きあがっていく様子が見える (図 4)。

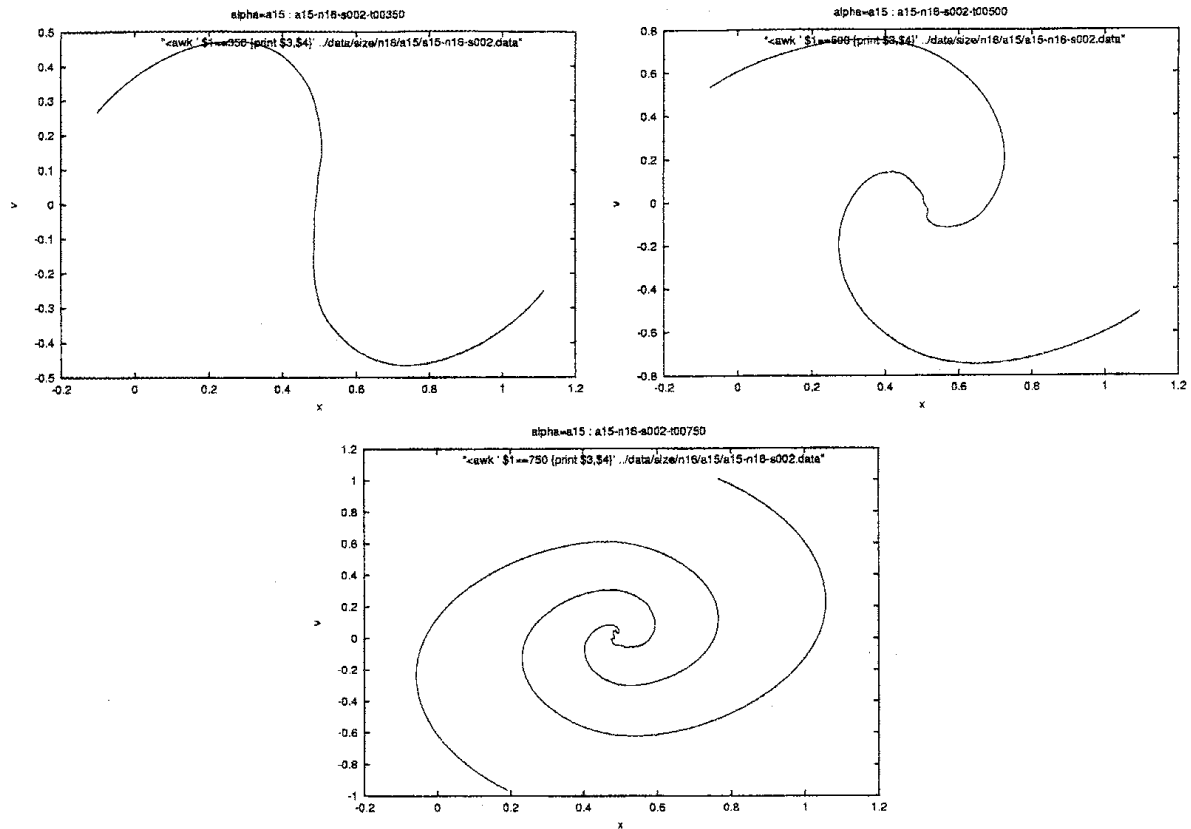


図 4:  $\mu$  空間の時間発展。相互作用ポテンシャルのべき指数は  $\alpha = 1 + 1/2$

以上のように、相互作用ポテンシャル (1) のべき指数によって、同一の初期条件から  $\mu$  空間に形成される渦パターンに違いが現れる。

- $\alpha \ll 1$  内部構造が壊れるのが速い
- $\alpha \sim 1$  渦の入れ子構造ができる。フラクタルな空間構造が形成される。
- $\alpha \gg 1$   $\mu$  空間で螺旋が巻きあがる

## 2.2 渦パターンの緩和と多重フラクタル

ここでは、フラクタルな空間構造が形成されていく状況 (図 2)、相互作用ポテンシャル (1) の指数が  $\alpha \sim 1$  の場合での時間発展を、より詳しく見ていく。 $\mu$  空間で形成される渦の入れ子構造は、動的に作られていき、状態としては遷移的である。ハミルトン系なので、この入れ子構造の状態は、アトラクタではなく、最終的には熱平衡へ向かう緩和過程のひとつのフェイズである考えられる。

ここでは渦パターンをより定量的に記述するために、粒子の空間分布をマルチフラクタル解析で分析した結果を図 5 に示す。

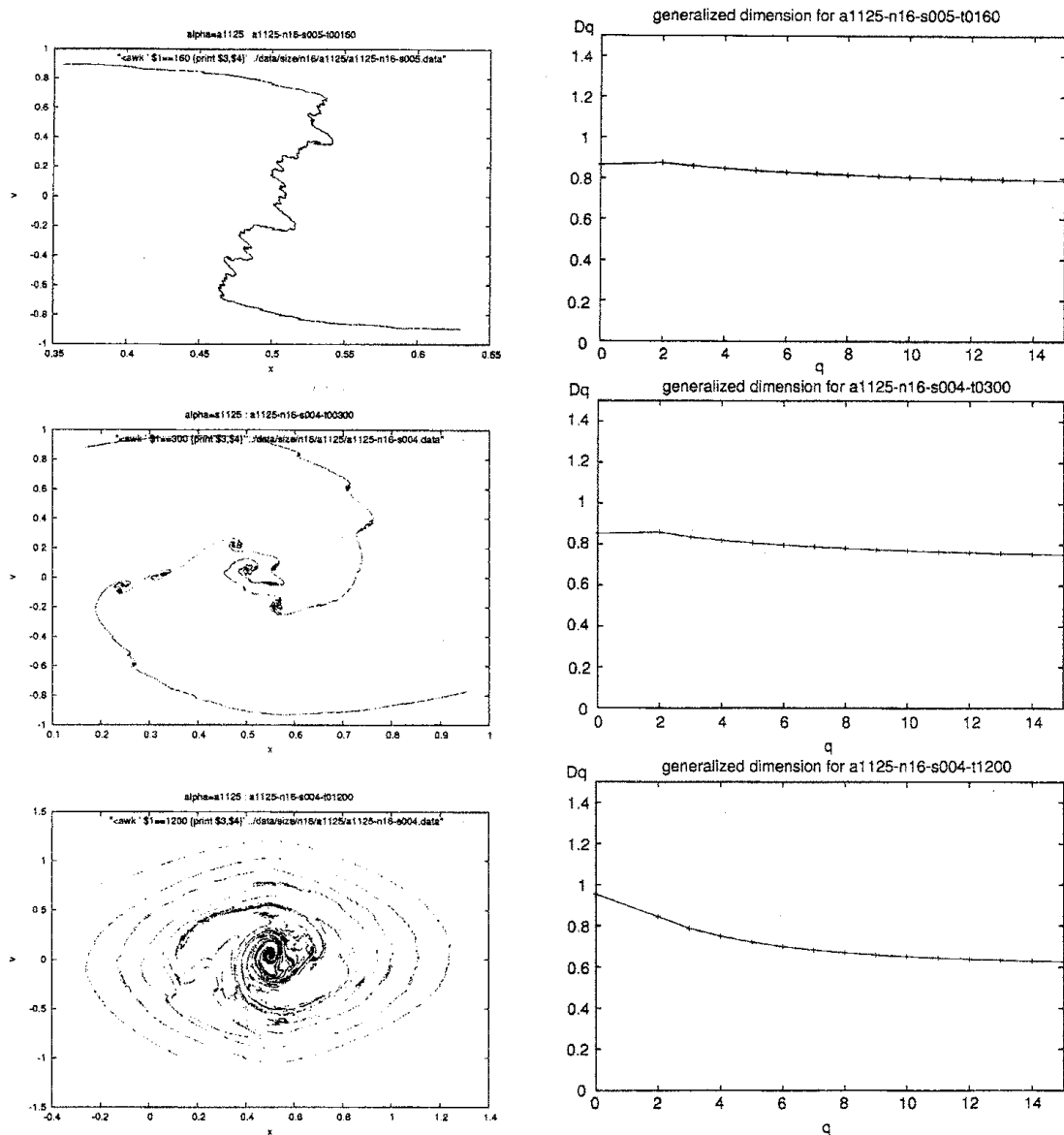


図 5:  $\mu$  空間の時間発展 (左) と、対応する空間構造の一般次元 (右)。相互作用ポテンシャルのべき指数は  $\alpha = 1 + 1/8$ 。渦の入れ子構造が崩れていくにしたがって、モノフラクタルからマルチフラクタルへ遷移していく。

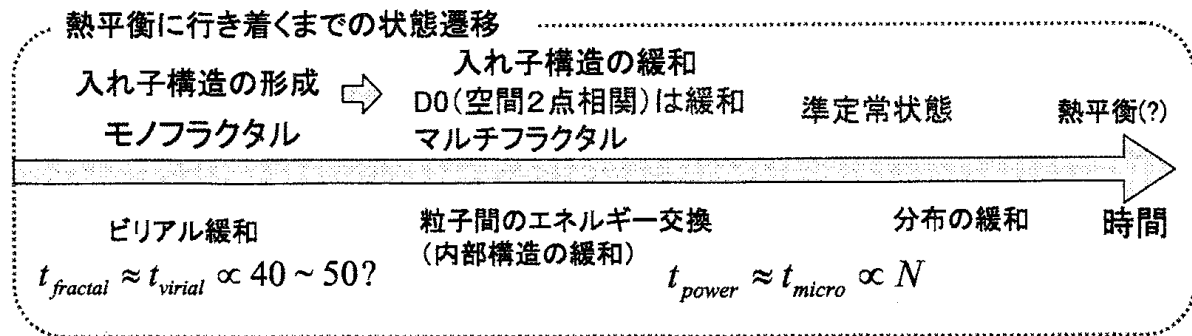
小さい渦から巻きあがっていき、 $\mu$  空間で渦の入れ子構造が顕著に現れているとき、粒子の空間分布は、その一般次元  $D_q$  がほぼ一定値のモノフラクタル構造になっている。渦の入れ子構造が自己相似的であることが定量的に確かめられる。一方、図 5 左から分かるように、時間が経つにつれて  $\mu$  空間の渦の入れ子構造は崩れていく。この内部構造の緩和は、ボックスカウント次元  $D_0$  が 1 へと緩和していくことと対応している。相関次元  $D_2$  などはまだ緩和しておらず、一般次元の緩和のタイムスケールの違い

によって多重フラクタル性が現れてくることがわかる。

相関次元  $D_2$  は空間 2 点相関に対応しており、実際空間 2 点相関がべき的である状態は、およそ粒子数程度の長寿命を持つ [1]。

### 3 まとめ

ハミルトン系の緩和過程において空間構造が出現する例として、1 次元べきポテンシャルモデルでフラクタルな構造が形成される現象について述べた。相互作用ポテンシャルのべき指数が 1 付近の場合、“cold-random” な初期条件から、フラクタルな空間構造が形成されていく。このとき  $\mu$  空間では、渦の入れ子構造がつけられていく。状態そのものは遷移的であり、渦の入れ子構造が顕著な時期では、ほぼモノフラクタル構造であるが、やがて渦が壊れていくにつれて、ボックスカウント次元はゼロへと緩和していく。しかしまだ相関次元は緩和しておらず、多重フラクタル構造へと遷移していく。熱平衡状態が達するのはさらにずっと先になる [1]。



$\mu$  空間で形成される渦パターンと、流体において渦パターンが形成される乱流とが関連があることが、[2] などでも指摘されている。 $\mu$  空間と実空間の違いはあるが、両者に共通する渦に着目することで動力学を捉えなおしたり統一的に理解できる可能性があり、新たなパラダイムが拓けたら面白いと思う。

最後に、今回の研究に関して、非線形ダイナミクスとしての意味付けと展望を述べたい。まず、この系はハミルトニアンで記述される保存系であるにもかかわらず、その時間発展が単なる熱平衡への単調な緩和過程とはならず一旦相関を形成しているのは特異な現象である。熱平衡に単調に緩和する系の範囲はどのように定義できるのかは未だわかっていない。

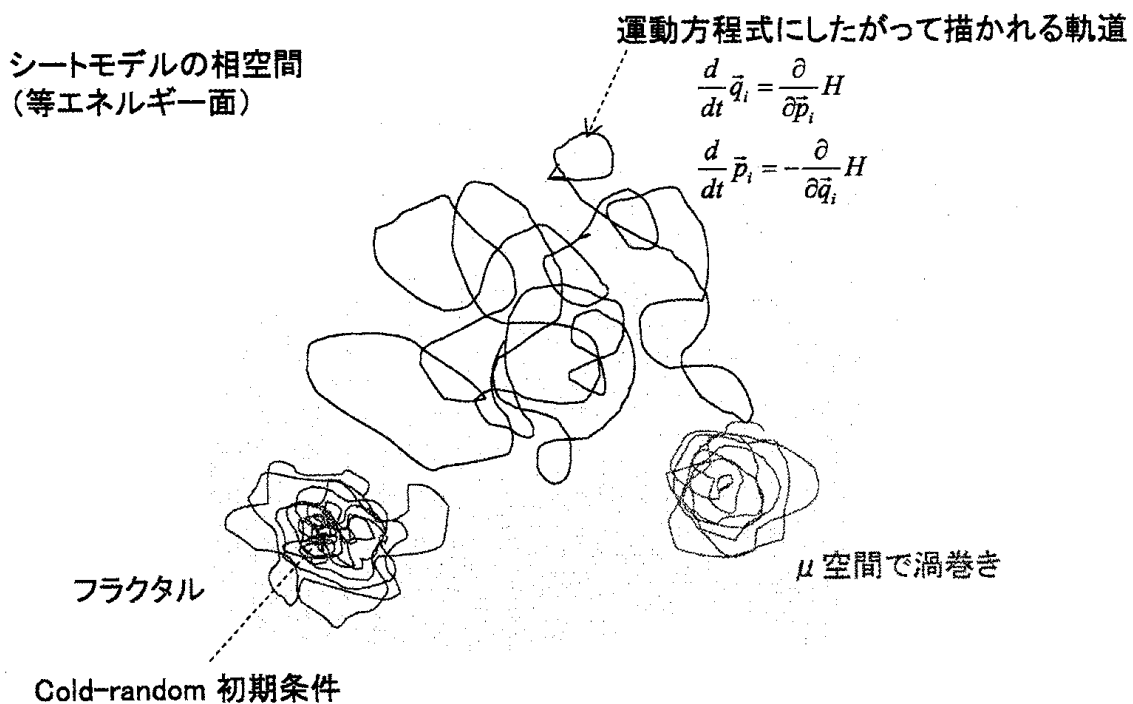
また、この系に散逸が入っているならば、フラクタル構造を持った状態が実はアトラクタになっていて、その状態へ系が漸近する、と解釈出来る可能性があるが、ハミルトン系であるからもちろんそうは解釈できない。

近可積分なハミルトン系の場合、規則的な運動をする準周期軌道 (トーラス) 近傍

に長時間滞在する(いわゆる「淀み運動」)ことが一見アトラクタ的に見えることもある。べき相関が見えている状態がこの種の淀み運動であるとする、それは、空間的にべき相関を持った準周期軌道の存在を示唆することになる。その準周期軌道の存在を示せるかどうか、更に、解析的に得ることができるかどうかは3次元への拡張も含めて興味深い問題である。

一方、淀み運動でないとすれば、フラクタル構造の自発形成は、多自由度の保存系で起きている現象で、カオス的で、熱平衡ではなく、トーラス近傍の運動でもない事になる。このような状態としては、これまで同じモデル(シートモデル)で知られている準平衡状態 [3] があるが、それらは相関が失われた状態であり、今回発見されたものとは異なる。すなわち、この状態は、空間相関がべき的であるという顕著な特徴を持った状態でありながら、力学系としてはその性質をうまく説明できない事になる。この場合、ポテンシャル(運動法則)のスケールフリー性が状態あるいは相空間構造に与える制約を定式化することが理解のひとつの助けになるかもしれない。

多自由度の力学系の動的な振舞いを如何に記述するかというのは現在の力学系研究の大きな課題である。少数自由度系を元に作られて来た記述用語だけでは多自由度系の振舞いは理解しきれないのかも知れない。今回我々が提示した現象が新しい概念を生み出す端緒となれば極めて意義深い。





## 参考文献

- [1] H.Koyama and T.Konishi: Phys. Lett. A.279 (2001) 226-230, Europhys.Lett. 58 (2002) 356-361, Phys.Lett. A295 (2002) 109-114
- [2] P.H.Chavanis: "Dynamics and Thermodynamics of Systems with Long-Range Interactions" T. Dauxois, S. Ruffo, E. Arimondo, M. Wilkens Eds., Lecture Notes in Physics Vol. 602, Springer (2002)
- [3] T.Tsuchiya, T.Konishi and N.Gouda: Phys. Rev. E **50**(1994) 2607