

## MHD 乱流のスペクトルとエネルギーカスケード

名古屋工業大学・機能工学専攻 森 啓介 (Keisuke Mori)

後藤俊幸 (Toshiyuki Gotoh)

Department of Engineering Physics

Nagoya Institute of Technology

### 1 はじめに

磁気流体力学 (Magneto-hydrodynamics, 以下 MHD) は電気伝導性流体の巨視的な運動を記述する理論である。MHD 乱流は銀河、太陽風などに見られ、速度場と磁場が相互作用を行うためその運動は複雑である。通常乱流における慣性領域でのエネルギースペクトルは、

$$E(k) = C_K \bar{\epsilon}^{2/3} k^{-5/3} \quad (1)$$

に従うことが知られていて、このスペクトルは、多くの実験計測や数値計算で確認されている。一方、MHD 乱流においても同様の理論が考えられている。MHD 乱流においても NS 乱流と同様に慣性領域が存在し、1964 年の Iroshnikov, 1965 年の Kraichnan (Iroshnikov-Kraichnan: 以下 IK) の理論によると、慣性領域におけるエネルギースペクトルの振る舞いは

$$E(k) = C_{IK} \bar{\epsilon} v_A^{1/2} k^{-3/2} \quad (2)$$

に従うと言われてきた。ここで  $v_A$  は Alfvén 速度である。近年の計算機性能の飛躍的向上から、MHD 乱流についても高解像度の計算が行われるようになり、MHD 乱流のスペクトルについての研究も報告されている。最近議論されているのは、MHD 乱流におけるトータルエネルギースペクトルの振る舞いが、これまで言われてきた、IK スペクトルに従うのではなく、NS 乱流と同様に Kolmogorov スペクトルに従うというものである。

そこで、本研究では MHD 方程式の直接数値計算 (DNS) を行い、MHD 乱流の慣性領域におけるエネルギースペクトルの振る舞いを調べる。エネルギースペクトルから、直接振る舞いを見るときともに、構造関数を調べることによっても議論をおこなう。また、Kolmogorov 理論によると、NS 乱流のエネルギー輸送は、あるスケールの渦から、同程度のスケールの渦へと輸送され、スケール間で局所的である。MHD 乱流においては、エネルギーの輸送が局所的であるか、非局所的であるかを、NS 乱流の DNS による結果と比較し考察する。

## 2 MHD 乱流の基礎理論

### 2.1 MHD の基礎方程式

非圧縮 MHD の方程式は、

$$(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (3)$$

$$\partial_t \mathbf{B} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (4)$$

で与えられる。本研究では速度場と磁場を合わせた、Elsässer 場  $\mathbf{Z}^\pm = \mathbf{v} \pm \mathbf{B}$  を使い、非圧縮 MHD における特徴的な波動 (Alfvén 波) における代表的速度  $v_A = B_0 / \sqrt{4\pi\rho}$  (Alfvén 速度) を用いて、 $B/B_0 \rightarrow B$ ,  $v/v_A \rightarrow v$  ( $B_0 \sim \langle B^2 \rangle^{1/2}$ ) とし、式 (3), (4) を合わせた Elsässer 場における MHD の式、

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{z}^\pm + \mathbf{z}^\mp \cdot \nabla \mathbf{z}^\pm &= -\nabla P + \frac{1}{2} (\nu + \eta) \nabla^2 \mathbf{z}^\pm + \frac{1}{2} (\nu - \eta) \nabla^2 \mathbf{z}^\mp + \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{Z}^\pm &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

を用いる。 $\mathbf{f}$  は外力であり、ここでは速度場に対してのみ低波数領域にランダム力として加え、場の定常状態、等方性、Nonhelical な状態を実現する。

## 2.2 MHD 乱流におけるエネルギースペクトルの特性

### 2.2.1 Kolmogorov scaling と Iroshnikov-Kraichnan scaling

#### Kolmogorov scaling

Kolmogorov の仮説にあるようにエネルギーの輸送は局所的であると仮定する。つまり波数間の相互作用は同程度の波数によるものが支配的であるとすると、乱流のエネルギースペクトルは以下の様にして求めることができる。慣性領域を離散化したスケール  $l_n = k_n^{-1}$

$$l_0 > l_1 > \dots > l_N \quad \text{or} \quad k_0 < k_1 < \dots < k_N \quad (6)$$

に分割する。ここで、 $k_0 = k_L$ (最大スケール)、 $k_N = k_d$ (粘性散逸スケール)とする。通常、乱流において、スケール  $l$  の乱流渦とは、長さ  $l$  だけ離れた 2 点での速度差  $\delta v_l$  の平均値を用いて表現される。2つの隣り合ったスケール  $l_n, l_{n+1}$  の間でエネルギーが輸送される時間は、渦が回転する時間で与えられ、

$$\tau_n \sim l_n / \delta v_n \quad (7)$$

と記述することができる。エネルギーの輸送量は慣性領域で一定であるので、

$$E_n / \tau_n \sim \delta v_n^3 / l_n \sim \epsilon \quad (8)$$

これより、スケーリングの関係、

$$\delta v_n \sim \epsilon^{1/3} l_n^{1/3} \quad (9)$$

を得る。これは Kolmogorov の K41 理論 (Kolmogorov, 1941a) と呼ばれる。エネルギースペクトルを得るために

$$\delta v_n^2 \simeq E_n \simeq \int_{k_n}^{k_{n+1}} E(k) dk \simeq E_{k_n} k_n \quad (10)$$

の関係を用いると

$$E(k) = C_K \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (11)$$

を得る。これは NS 乱流でよく知られている Kolmogorov スペクトル (Kolmogorov, 1941a) である。 $C_K$  は Kolmogorov 定数である。

#### Iroshnikov-Kraichnan (IK) scaling

MHD におけるエネルギー輸送は Alfvén 波の影響を受ける。Alfvén 波による相互作用時間は、あるスケール  $l$  において Alfvén 速度を用いて、 $\tau_A \sim l/v_A$  となり、これは磁場の影響がないと仮定したときの、スケール  $l$  における渦の回転時間  $\tau_l \sim l/\delta z_l$  よりもかなり短い。これからわかるように、MHD におけるエネルギー輸送は Alfvén 波によるものが支配的である。これを考慮すると、NS 乱流において  $\tau_l$  であったエネルギー輸送時間は、より長い時間で置き換えられて、

$$T_l \sim (\tau_l)^2 / \tau_A \quad (12)$$

となる。式 (8) で  $\tau_l \rightarrow T_l$  とすると、

$$\delta z_l^4 \tau_A / l^2 \sim \epsilon \quad (13)$$

よって、IK スケーリングを得る。

$$\delta z_l \sim (\epsilon v_A)^{1/4} l^{1/4}. \quad (14)$$

これに対するエネルギースペクトルは

$$E_k = C_{IK} (\epsilon v_A)^{1/2} k^{-3/2} \quad (15)$$

となる。これが、MHD 乱流における Iroshnikov-Kraichnan (IK) スペクトルである。慣性領域における物理量  $\epsilon$  のみに依存する Kolmogorov スペクトルに対して、IK スペクトルは、代表的な磁場  $B_0 = \langle B^2 \rangle^{1/2}$  で決まるマクロスケールの量  $v_A$  によることがわかる。

### 2.2.2 Dissipation scales

粘性散逸スケールはエネルギー散逸率と非線形項によるエネルギー輸送率が等しくなるという条件で決定される。NS 乱流においてこの条件は、

$$\tau_l^{-1} \sim \nu/l^2, \quad \tau_l = l/\delta v_l \quad (16)$$

で与えられる。式(9)のKolmogorov スケーリングより、

$$l_d = (\nu^3/\epsilon)^{1/4} := l_K \quad (17)$$

となり、これはKolmogorov スケール (Kolmogorov, 1941) と呼ばれる。(通常  $\eta$  と記述されるが、磁場の拡散係数  $\eta$  との混同を避けるため、本論文では  $l_K$  と記述する。)

MHD 乱流においては、前節で述べたように Alfvén 効果により非線形項によるエネルギー輸送は弱くなる ( $\tau_l \rightarrow T_l = (\tau_l)^2/\tau_A$ ) ので、式(16)は

$$T_l^{-1} \sim \nu/l^2 \quad (18)$$

となる。式(14)のIK スケーリングを代入することでMHDにおける粘性散逸スケールが得られ、

$$l_d = (\nu^2 v_A/\epsilon)^{1/3} = l_{IK}. \quad (19)$$

ここで、 $\nu \sim \eta$ ,  $\epsilon_\nu \sim \epsilon_\eta$ ,  $\epsilon = \epsilon_\nu + \epsilon_\eta$  とおいた。

もし、減衰乱流のようにマクロな物理量である  $\epsilon$  や  $v_A$  が時間とともに変化するならば、エネルギースペクトルも時間とともに変化する。しかし、 $k \gg k_L$  の慣性領域におけるエネルギースペクトルは、Kolmogorov スケールでは  $\nu$  と  $\epsilon$  で、IK スケールでは  $\nu$ ,  $\epsilon$  そして  $v_A$  によって決まる。NS 乱流におけるエネルギースペクトルは

$$E(k, t) = \nu^{5/4} \epsilon^{1/4}(t) \hat{E}(\hat{k}) \quad (20)$$

と表せる。ここで  $\hat{k} = kl_K$  である。慣性領域で、これが  $\nu$  によらないことを要求すると、

$$\hat{E}(\hat{k}) = C_K \hat{k}^{-5/3} \quad (21)$$

である。同様に、 $\nu$ ,  $v_A$  そして  $l_{IK}$  を用いてMHD乱流のスペクトルを規格化すると

$$E(k, t) = \nu v_A(t) \hat{E}(\hat{k}) \quad (22)$$

で、これが慣性領域で  $\nu$  によらないとすると、規格化したIKスペクトル  $\hat{E}(\hat{k})$ ,

$$\hat{E}(\hat{k}) = C_{IK} \hat{k}^{-3/2} \quad (23)$$

を得る。

本研究ではMHDにおいてどちらのスケールに従うかの議論を行うが、Kolmogorov スケールの導出ではMHDの特性を考慮しておらず、一方、IKスケールの導出には  $\nu \sim \eta$  と  $\epsilon_\nu \sim \epsilon_\eta$  という仮定をしいていることを考慮しておく必要がある。

### 2.3 構造関数

NS 乱流において、 $r$  離れた2点での速度差についての  $n$  次の構造関数を用いることにより、間欠性の強さを定量化することができる。本研究では、MHDがKolmogorovスケール、IKスケールのどちらに従うかを考察する指標として、構造関数を用いる。Elsässer 場において  $r$  だけ離れた2点での増分は、

$$\delta z^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \mathbf{z}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{z}(\mathbf{x}) \quad (24)$$

である。この増分の  $r$  方向への射影成分を  $\delta z_\parallel^\pm$  とすると、

$$\delta z_\parallel^\pm = \delta \mathbf{z} \cdot \mathbf{r}/r \quad (25)$$

とあらわすことができる。ここで、 $\delta z_{\parallel}^{\pm}$  の  $p$  次モーメント、 $p$  次構造関数を以下のように定義する。

$$S_p(r) = \langle |\delta z_{\parallel}^{\pm}|^p \rangle. \quad (26)$$

慣性領域において、構造関数は  $r$  について等方的で、べき法則に従うとすると

$$S_p(r) \propto r^{\zeta_p} \quad (27)$$

と書ける。 $\zeta_p$  は、構造関数を局所的に微分することにより求められる局所的スケーリング指数で、以下のようになる。

$$\zeta_p = \frac{d \log S_p(r)}{d \log r}. \quad (28)$$

前節で述べたように、慣性領域において Kolmogorov スケーリングでは  $\delta z \sim r^{1/3}$ 、IK スケーリングでは  $\delta z \sim r^{1/4}$  に従うので、

$$\zeta_p \sim p/3 \quad (\text{Kolmogorov}) \quad (29)$$

$$\zeta_p \sim p/4 \quad (\text{Iroshnikov-Kraichnan}) \quad (30)$$

と考えられ、構造関数の指数を知ることで、どちらの現象に近いかを推測することができると考えられる。

### MHD における 4/3 法則

一様等方性の NS 乱流において、3 次の縦速度構造関数は慣性領域で

$$S_3(r) = \langle (\delta v_{\parallel})^3 \rangle = -\frac{4}{5} \bar{\epsilon} r \quad (31)$$

となる。これは Kolmogorov の 4/5 法則とよばれ、厳密解としてあたえられている。

MHD においても同様に厳密解として以下の式が考案されている。

$$\langle \delta z_{\parallel}^+ \delta z_i^{\pm} \delta z_i^{\pm} \rangle = -\frac{4}{3} \epsilon^{\pm} r. \quad (32)$$

この式は  $\delta z^+ \sim \delta z^-$  とし、 $\nu = \eta$  とし導出された式である。(Politano and Pouquet, 1998b) 式 (32) からわかるように、Kolmogorov スケーリング ( $\delta z \sim r^{1/3}$ ) に従って導出されたものであり、局所的な Alfvén 波の作用に基づいた IK スケーリング ( $\delta z \sim r^{1/4}$ ) とは異なる。

## 2.4 フーリエ空間におけるエネルギー輸送

MHD におけるエネルギー方程式は

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + (\nu + \eta)k^2 \right) E^T(k, t) + (\nu - \eta)k^2 E^R(k, t) \\ & = \left( \frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2 \right) E^K(k, t) + \left( \frac{\partial}{\partial t} + 2\eta k^2 \right) E^M(k, t) = T^T(k, t) \end{aligned} \quad (33)$$

$$E^R(k, t) = E^K(k, t) - E^M(k, t) \quad (34)$$

と記述できる。 $T^T(k)$  は

$$\begin{aligned} T^T(k) &= \iint_{\Delta_k} S(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) d\mathbf{p} d\mathbf{q} \\ &= 2\pi k^2 \text{Real} \left[ M_{ilm}(\mathbf{k}) \iint_{\Delta_k} \left\{ \langle z_i^+(-\mathbf{k}) z_i^-(\mathbf{p}) z_m^+(\mathbf{q}) \rangle + \langle z_i^-(-\mathbf{k}) z_i^+(\mathbf{p}) z_m^-(\mathbf{q}) \rangle \right\} d\mathbf{p} d\mathbf{q} \right] \end{aligned} \quad (35)$$

で表される (トータル) エネルギー輸送関数で、非線形項によるエネルギー輸送を表す。ここで  $\iint_{\Delta_k}$  は  $\mathbf{k} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$  を満たす全ての  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  について足し合わせることを意味する。

## エネルギー流束関数

(トータル) エネルギー流束関数  $\Pi^T(k, t)$  は,  $T^T(k, t)$  を  $k$  について積分して

$$\Pi^T(k, t) = \int_k^\infty T(k', t) dk' = - \int_0^k T(k', t) dk' \quad (36)$$

で与えられる.  $\Pi^T(k, t)$  は波数  $k$  を通る低波数から高波数へのエネルギーの単位時間あたりの総量を表している.

## 局所的エネルギー流束関数

Komogorov の K41 理論では NS 乱流のエネルギーは, あるスケールの渦から, 同程度のスケールの渦へと輸送され局所的であると言われていた. MHD 乱流においては, このスケール間でのエネルギー輸送がどうなるかを調べるため, トータルエネルギー輸送の局所性, 非局所性を確認する指標となる量を定義する.

まず, どのような波数の組み合わせがどの程度  $\Pi^T(k)$  に寄与しているのかを見るために, 波数  $(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$  のうち最も小さい波数に対する最も大きい波数の比  $\alpha$  を定義する.

$$\alpha \equiv \frac{\max(k, p, q)}{\min(k, p, q)} \quad (37)$$

式 (35) における  $S(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$  を  $\alpha$  について分類した関数  $\hat{S}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \alpha)$  を用い,  $\alpha$  と  $\alpha + d\alpha$  の間に入る波数の組から  $\Pi(k)$  への寄与を  $W(\alpha)d\alpha/\alpha$  とすると

$$\begin{aligned} \Pi^T(k) &= \int_k^\infty dk' \iint_{\Delta_{k'}} S(k', \mathbf{p}, \mathbf{q}) dpdq \\ &= \int_1^\infty \frac{d\alpha}{\alpha} \int_k^\infty dk' \iint_{\Delta_{k'}} \hat{S}(k', \mathbf{p}, \mathbf{q}, \alpha) dpdq \\ &= \int_1^\infty W(\alpha) \frac{d\alpha}{\alpha} \end{aligned} \quad (38)$$

$$W(\alpha) = \int_k^\infty dk' \iint_{\Delta_{k'}} \hat{S}(k', \mathbf{p}, \mathbf{q}, \alpha) dpdq \quad (39)$$

と表せる. 局所的エネルギー流束関数の具体的計算法は以下の通りである. はじめに, ある波数バンド  $\hat{p}$  ( $p$  のまわりで  $\Delta p$  の幅をもつ) でのみ値を持つ Elsässer 変数  $\hat{z}^\pm(\mathbf{p})$  を定義する.

$$\hat{z}^\pm(\hat{p}_n) = \int \phi(\hat{p}_n - k) z^\pm(\mathbf{k}) dk \quad (40)$$

$$\phi(\hat{p}_n - k) = \begin{cases} 1 & (k \subseteq \hat{p}) \\ 0 & (k \not\subseteq \hat{p}) \end{cases} \quad (41)$$

ここで  $\phi(\hat{p}_n - k)$  は Filter 関数である. この  $\hat{p}_n$  は細かくとるほうが誤差の少ない計算ができるが, 計算量が非常に大きくなってしまふ. そこで本研究では  $p$  を

$$\begin{cases} p_n = n \cdot \{1 - g(n - 12)\} + 2^{n/4} \cdot g(n - 12) \\ g(n) = \frac{1}{2} \left\{ \tanh\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \right\} \end{cases} \quad (42)$$

のようにとり,  $\hat{p}_n$  は  $[\sqrt{p_{n-1}p_n}] + 0.5 \leq p < [\sqrt{p_n p_{n+1}}] + 0.5$  ( $[x]$  はガウス関数で,  $x$  の小数点以下切り捨て) で値を持つとする.  $g(n)$  は補正関数で, これを用いることにより, 低波数で  $\Delta p = 1$  と線形的に, 高波数では  $\Delta p$  を指数的に広げるように与えた.

まず, 区切られた 2 つの波数バンド  $\hat{p}, \hat{q}$  からどのようにエネルギーが輸送されるかを計算する.

$$T^T(\hat{k}|\hat{p}, \hat{q}) = 2\pi k^2 \text{Real} \left[ M_{ilm}(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{p}+\mathbf{q}} \left\{ \langle \hat{z}_i^+(-\mathbf{k}) \hat{z}_i^-(\mathbf{p}) \hat{z}_m^+(\mathbf{q}) \rangle + \langle \hat{z}_i^-(\mathbf{k}) \hat{z}_i^+(\mathbf{p}) \hat{z}_m^-(\mathbf{q}) \rangle \right\} \right] \quad (43)$$

この  $T^T(\hat{k}|\hat{p}, \hat{q})$  を  $\alpha$  について分類したものを  $\hat{T}^T(\hat{k}|\hat{p}, \hat{q}, \alpha)$  とする。これを用いて

$$\sum_{\hat{k}'=\hat{k}}^{\infty} \sum_{\hat{p}, \hat{q}} \hat{T}^T(\hat{k}'|\hat{p}, \hat{q}, \alpha) = \frac{W(\hat{k}, \alpha)}{\alpha} \quad (44)$$

とし、 $W(\hat{k}, \alpha)$  を計算する。

### 3 計算結果

計算に使用したパラメータおよび、得られた MHD 乱流場の代表的な統計量を Table I に示す。近似的に  $p \sim \rho v^2/2$  とみなすと、 $\beta$  値 ( $\beta = 8\pi p/B^2$ ) は runA においては  $\beta \sim 6$ 、runB においては  $\beta \sim 5$  である。この  $\beta$  値は扱っている流体に対する、磁場の影響を表す指標として用いられ、 $\beta \gg 1$  のとき、物質は極めて NS 流体的に振舞うと言われている。つまり、本研究で得られた結果は、runA、runB のどちらにおいても、磁場の影響が小さいと考えられる。

#### 3.1 エネルギースペクトル

Fig.1 は runA において、無次元時間  $18.6 \leq T_{av} \leq 22.3$  で時間平均をとった運動エネルギースペクトル  $E^K(k)$ 、磁場エネルギースペクトル  $E^M(k)$ 、トータルエネルギースペクトル  $E^T(k)$  を、また、Fig.2 は runB において、無次元時間  $3.3 \leq T_{av} \leq 8.0$  で時間平均をとった、各エネルギースペクトルである。

runA、runB どちらも低波数側で運動エネルギーが支配的であり、高波数側では磁場エネルギーが支配的であることがわかる。速度場のみ外力を入れていることから、低波数側で運動エネルギーが支配的であるのは自然である。一方、高波数側では非線形項によるエネルギー輸送によって運動エネルギーから輸送される結果、磁場エネルギーが支配的となる。

Fig.3 は runA、runB で得られたトータルエネルギースペクトルを時間平均し、Kolmogorov スケールで規格化したグラフであり、Fig.4 は Iroshnikov-Kraichnan (IK) スケールで規格化したグラフである。

どちらも、 $R_\lambda \sim 92$  ではレイノルズ数が低いため、水平になる領域は確認できない。 $R_\lambda \sim 162$  に注目すると、Fig.4 の  $0.07 \leq kl_{IK} \leq 0.2$  の領域で水平と見られる領域が存在する。また、Fig.4 から、IK スケーリングでは、高波数側の dissipation range でのスペクトルの一致が良いことがわかる。しかし、NS 乱流において、規格化したエネルギースペクトルのグラフでは、水平になる領域のすぐ高波数側で値が下がるのではなく、ハンプと呼ばれるコブ状の領域が現れる。この特性を考えると、Fig.3 において、 $0.08 \leq k\eta \leq 0.2$  あたりの領域はハンプであって、それより低波数のところで、水平な領域が現れる可能性も十分にあり得る。 $0.08 \leq k\eta \leq 0.2$  の領域がハンプであるとすると、MHD 乱流では NS 乱流よりもハンプが小さいことがわかる。そのため、この二つのグラフからは、慣性領域でのトータルエネルギースペクトルの、べきの振る舞いがどうなるかと断定することはできなかった。

#### 3.2 構造関数

本来ならば慣性領域が確認できるところで構造関数の計算を行うと必要があるが、今回はトータルエネルギースペクトルのべき法則を知る手段として、何らかのデータが得られることを期待し、runB のデータを用いて 2 次、3 次および 4 次の構造関数の計算を行った。

2 次、3 次、および 4 次の構造関数のスケーリング指数  $\zeta_p$  を  $20 \leq r/r_k \leq 70$  の範囲で最小二乗法を用いて、求めた結果を Table II に示す。また、Table II を図示したものが Fig.5 である。Fig.5 中の  $\zeta_p$  の範囲は  $20 \leq r/r_k \leq 70$  における、スロープの値がこの範囲にあることを示す。間欠性の影響を無視すると、runB の結果が Kolmogorov スケールに従うならば、構造関数のスケーリング指数は  $\zeta_p \sim p/3$  に、Iroshnikov-Kraichnan スケールに従うならば、スケーリング指数は  $\zeta_p \sim p/4$  に従う。

Fig.5 からわかるように、スケーリング指数の計算結果からは、Iroshnikov-Kraichnan スケールよりも、Kolmogorov スケールに近いことがわかる。よって、構造関数の計算結果から、MHD 乱流におけるトータルエネルギースペクトルは、慣性領域において  $E^T(k) \sim k^{-5/3}$  に従うのではないかと考えられる。しかし、先ほども述べたが、 $\beta$  値が 1 よりも大きく、運動エネルギーが支配的であるため、磁場の影響が小さく、NS 乱流的な振る舞いをして、Kolmogorov スケールに近い値を示したとも考えられるので、ここでも、慣性領域でのエネルギースペクトルのべきについて断言することはできない。

## MHD における 4/3 法則

Fig.6 は MHD の厳密解として与えられている 3 次構造関数を, runA および runB のデータを用いて計算した結果を示したものである. グラフの横軸は  $\langle \delta z_{\parallel}^{-} \delta z_{\parallel}^{+} \delta z_{\parallel}^{+} \rangle$  を  $-er$  で割ったもので, 式 (32) の関係を満たすとき, 値が 4/3 になるようにとってある.

図からわかるように,  $r$  が小さいところでは  $r^2$  の立ち上がりを示し,  $R_{\lambda}$  が 107 から 179 へとあがるにつれて, 値が 4/3 へと近づいていく様子がわかる. このことから,  $R_{\lambda} = 179$  における計算結果は式 (32) に合っていると見える. つまり, 式 (32) が厳密解として存在し, Kolmogorov スケーリングに従うと考えられる. ただし, 今回の計算結果は  $\beta > 1$  であるため, Kolmogorov スケーリングを支持する結果が得られた可能性がある. そのため, MHD がどちらのスケーリングに従うか, 式 (32) が厳密解として正しいかどうかの結論を出すことはできない.

## 3.3 局所的エネルギー輸送関数

### エネルギー輸送関数

RunB のデータを用いたエネルギー輸送関数を Fig.7 に, 対応するトータルエネルギースペクトルのグラフを Fig.8 に示す. Fig.7 の縦軸は,  $\Pi(k)$  を  $\bar{\epsilon}$  で割ったものを用いている. つまり, 慣性領域における  $\Pi(k) \approx \bar{\epsilon}$  の関係から, 慣性領域では Fig.7 の値が 1 となるようにとってある. また, Fig.8 の縦軸はトータルエネルギースペクトルに  $k^{-5/3}$  を掛けたものを用いた.

Fig.7 から, 慣性領域がとても狭いことがわかる. Fig.7 の値から  $4 \leq k \leq 7$  を慣性領域とみなすと, トータルエネルギースペクトルに  $k^{-5/3}$  を掛けた, Fig.8 の  $4 \leq k \leq 7$  の範囲で, 水平になる領域が現れることが期待できる. つまり,  $\Pi(k)$  の計算結果からは Kolmogorov スケーリングに従うと考えられる.

### 局所的エネルギー輸送関数

Fig.7 で示した  $\Pi(k)$  のうち,  $8.5 \leq k < 9.5$ ,  $11.5 \leq k < 13.5$ ,  $18.5 \leq k < 22.5$  の 3 つの範囲で, 局所的エネルギー輸送関数  $W(\alpha)$  の計算を行った. 計算結果を semi-log プロットしたものを Fig.9 に, log-log プロットしたものを Fig.10 に示す. 用いた計算手法のため, 値に振動があるものの, 全体的なグラフの特徴はどの波数においても変わらないことがわかる. またグラフからは, エネルギー輸送に最も寄与するのは,  $\alpha = 2$  の近くでの波数間の相互作用であることがわかり, MHD 乱流におけるエネルギー輸送は, NS 乱流における Kolmogorov の K41 理論と同様に, 長さ比が 2 の大きさの渦の相互作用によってエネルギー輸送が最も効果的になされる, つまり局所的であると言える.

また, Fig.9, Fig.10 のうち慣性領域に近い  $8.5 \leq k < 9.5$  と, NS 乱流の DNS から得られた結果を重ねたグラフを Fig.11 (semi-log プロット), Fig.12 (log-log プロット) に示す. Fig.11, Fig.12 からわかるように, MHD 乱流と NS 乱流では  $\alpha$  全域において, 同様のグラフを示すことがわかる. つまり, MHD 乱流におけるトータルエネルギー輸送は, NS 乱流におけるエネルギー輸送と同様であることがわかった. ただし, エネルギー輸送についても  $\beta \gg 1$  であることが影響し, MHD においても NS 流体的な振る舞いをしていることが十分考えられる. ただし, MHD では  $R_{\lambda} \approx 180$  であり, NS 乱流では  $R_{\lambda} \approx 400$  であることから, 今回の MHD 乱流が十分 NS 流体とみなせると仮定すると,  $W(\alpha)$  すなわち, エネルギー輸送の局所性については,  $R_{\lambda}$  依存性が小さいことになる. MHD としての特徴を知るためには  $R_{\lambda}$  だけでなく,  $\beta$  依存性についても考える必要がある.

## 4 まとめ

本研究で行った計算では  $R_{\lambda}$  が小さく, はっきりとした慣性領域を確認できなかった. そのため, トータルエネルギースペクトル  $E^T(k)$  が, Kolmogorov スケール, Iroshnikov-Kraichnan スケールのどちらに従うかをスペクトルのグラフから判断することはできなかった. 構造関数の計算結果からは, Kolmogorov スケールに従うのではないかと判断できる. しかし, 本研究の計算結果は  $\beta \gg 1$  であり, 磁場の影響が小さいため, きわめて NS 流体的な振る舞いをし, Kolmogorov スケールに近い値が得られた可能性がある. そのため, 今回の研究では, トータルエネルギースペクトルのべき法則について断定することはできなかった.

エネルギー輸送の局所性, 非局所性については,  $W(\alpha)$  の計算結果から, MHD 乱流のトータルエネルギー輸送

は局所的であり、NS 乱流における  $W(\alpha)$  のエネルギー輸送の局所性と、MHD 乱流のトータルエネルギー輸送の局所性は同様の振る舞いをする。ただし、今回の計算結果は NS 乱流的な振る舞いをしている可能性があるため、MHD 乱流の特性と断言することはできない。エネルギー輸送の局所性について  $\beta$  依存性を確認することはできなかったが、 $R_\lambda$  依存性は小さそうである。

慣性領域におけるエネルギースペクトルの振る舞いを確認するために、今後さらに高解像度の計算を行う必要がある。

## 参考文献

- [1] Dieter Biskamp : “*Magnetohydrodynamic turbulence*”, Cambridge University Press, 2003.
- [2] Nils Erland L. Hugen, Axel Brandenburg, and Wolfgang Dobler : “*Simulation of nonhelical hydromagnetic turbulence*”, Phys. Rev. E70, 016308, 2004.
- [3] Dieter Biskamp and Wolf-Christian Müller : “*Scaling properties of three-dimensional isotropic magnetohydrodynamic turbulence*”, Phys. Plasmas, 7, 4889, 2000.
- [4] Dieter Biskamp and Wolf-Christian Müller : “*Decay Laws for Three-Dimensional Magnetohydrodynamic Turbulence*”, Phys. Rev. Lett. 83, 2195, 1999.

Table I: Summary of runs with  $Pr_M = \nu/\eta = 1$  and forcing at  $\sqrt{3} \leq k \leq 2\sqrt{3}$ .  $\nu$  : kinematic viscosity,  $k_{max}$  : maximum wave number,  $R_\lambda$  : The Taylor microscale Reynolds number.

run	Resolution	$k_{max}$	$\nu$	$\Delta t$	$R_\lambda$	$E^K$	$E^M$	$\epsilon_\nu$	$\epsilon_\eta$
A	$128^3$	60	$7.00 \times 10^{-3}$	$5.0 \times 10^{-3}$	92	5.18	0.84	1.48	1.99
B	$256^3$	121	$4.00 \times 10^{-3}$	$2.0 \times 10^{-3}$	162	8.43	1.84	2.26	4.77

Table II: Scaling exponents of the structure functions. :  $\zeta_p$

p	$\zeta_p^+$	$\zeta_p^-$
2	$0.729 \pm 0.007$	$0.738 \pm 0.007$
3	$0.997 \pm 0.008$	$1.011 \pm 0.008$
4	$1.205 \pm 0.009$	$1.239 \pm 0.006$



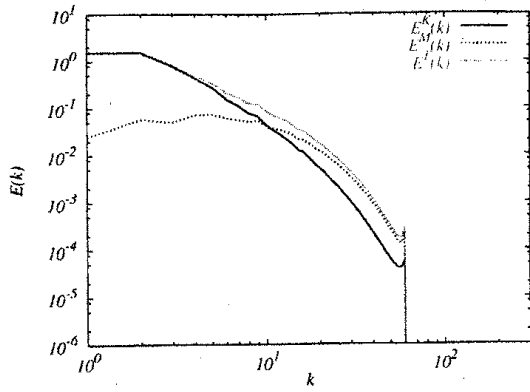


Fig. 1: Kinetic, magnetic, and total energy spectra for  $R_\lambda = 92$  ( $128^3$ )

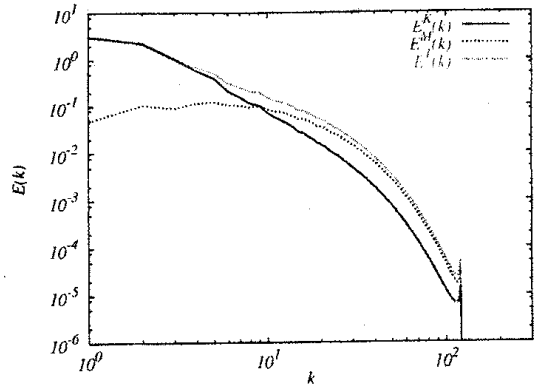


Fig. 2: Kinetic, magnetic, and total energy spectra for  $R_\lambda = 162$  ( $256^3$ )

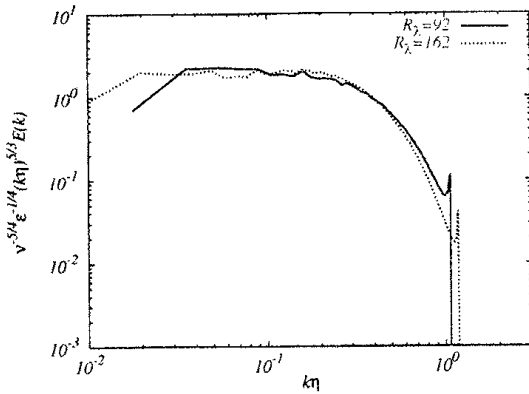


Fig. 3: Compensated total energy spectrum  $\hat{k}^{5/3} \hat{E}(\hat{k})$  in Kolmogorov scale.

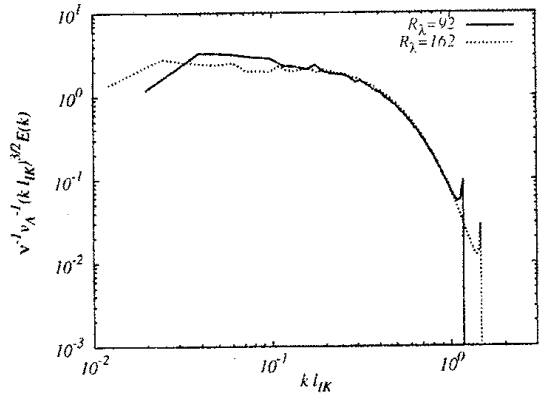


Fig. 4: Compensated total energy spectrum  $\hat{k}^{3/2} \hat{E}(\hat{k})$  in Iroshnikov-Kraichnan scale.

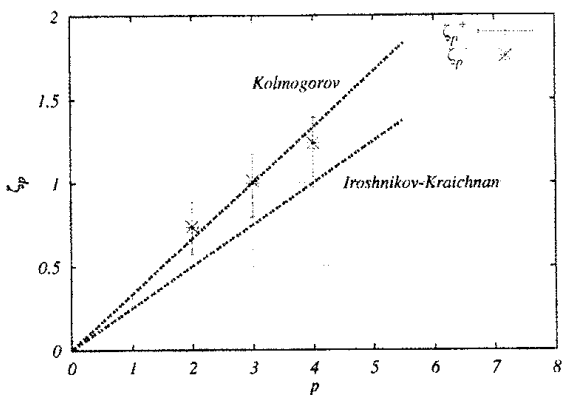


Fig. 5: Scaling exponents of the structure functions.  $\zeta_p$

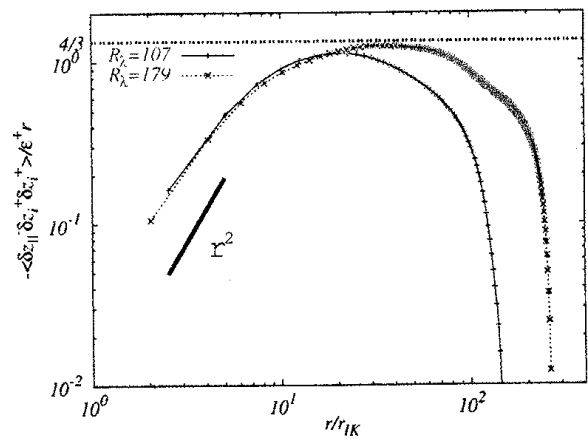


Fig. 6: Verification of four-thirds law obtained from runA and runB.

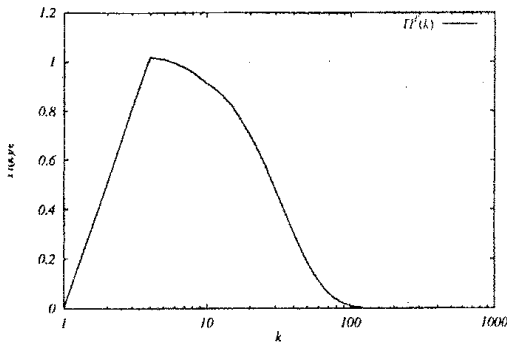


Fig. 7: Total energy flux function :  $\pi^T(k)$

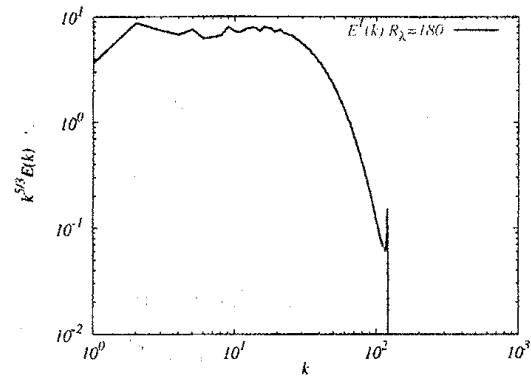


Fig. 8: Total energy spectra  $E^T(k)$  multiplied by  $k^{5/3}$

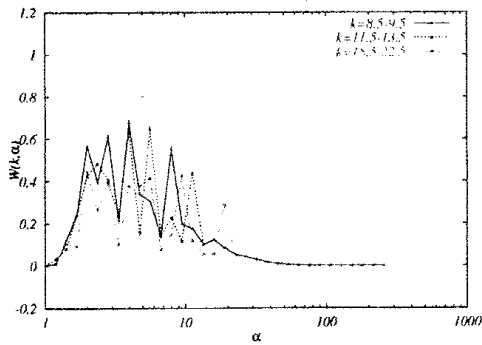


Fig. 9: Local total energy flux functions obtained from MHD turbulence  $W^T(\alpha)$ ,  $R_\lambda \approx 180$ (semi-log plot)

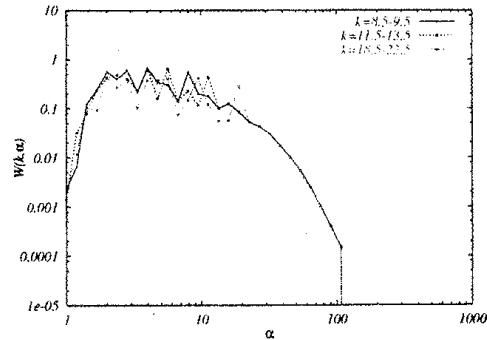


Fig. 10: Local total energy flux functions obtained from MHD turbulence  $W^T(\alpha)$ ,  $R_\lambda \approx 180$ (log-log plot)

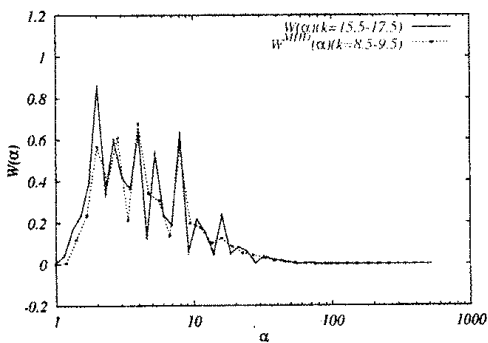


Fig. 11: Comparison of energy flux functions obtained from MHD turbulence and hydrodynamic turbulence.(semi-log plot)

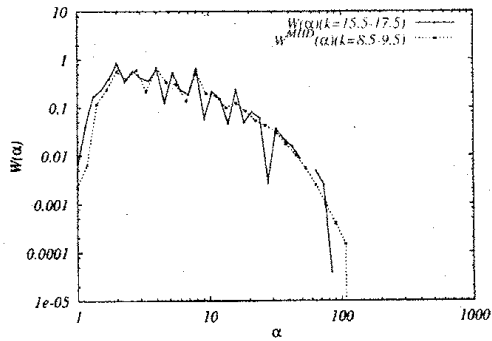


Fig. 12: Comparison of energy flux functions obtained from MHD turbulence and hydrodynamic turbulence.(log-log plot)