

ロビンソン-シェンステッド対応の一般化

沼田 泰英 (NUMATA, YASUhide)  
 北海道大学大学院理学研究科

ABSTRACT. グラフが与えられた時, その頂点を基底とする  $K$ -線形空間を  $KV$  とおく. 頂点  $v$  に対して  $v$  を始点 (終点) とする辺達の終点 (始点) の和を対応させる  $KV$  上の  $K$ -線形写像を上り (下り) 演算子という. 共通の頂点集合を持つ graded なグラフ  $G_1, G_2$  を用意する.  $G_1$  の上り演算子と  $G_2$  の下り演算子をそれぞれ  $U, D$  とおく.  $DU - UD = rI$  (ただし,  $r \in \mathbb{Z}$ ,  $I$  は恒等写像) という交換関係を満たしているときに  $G_1$  と  $G_2$  は  $r$ -dual であるという. この様なグラフの例としては, ヤング束のハッセグラフが挙げられる. ヤング束のハッセグラフにおいて最小限から始まる path は standard tableau と同一視することが出来る. standard tableau には Robinson 対応と呼ばれる対応があるが, これに相当する対応が  $r$ -dual なグラフにおいても構成できることを, Fomin が与えている.

一方で同じ形の standard tableau と semi-standard tableau のペア達とワード達の間には Robinson-Schensted 対応と呼ばれる対応が知られている. 最小元からの paths を semi-standard tableaux と同一視できる様なグラフは semi-graded になるが, その下り演算子を  $D$  とおくと, ヤング束のハッセグラフの上り演算子  $U$  と  $DU - UD = D$  という関係を満たしている. 逆にこの関係を満たしているグラフにおいては Robinson-Schensted 対応に相当する対応が構成できる.

1. NOTATION AND MAIN THEOREM

$(V, E, \text{start}, \text{end})$  ( $V$ ; 頂点集合,  $E$ ; 辺集合,  $\text{start} : E \rightarrow V$ ; 始点,  $\text{end} : E \rightarrow V$ ; 終点) をグラフと呼ぶ.  $\rho : V \rightarrow \mathbb{Z}$  が  $e \in E$  に対して,

- $\rho \circ \text{start}(e) \leq \rho \circ \text{end}(e)$
- $\rho \circ \text{start}(e) = \rho \circ \text{end}(e) \iff \text{start}(e) = \text{end}(e)$

を満たしているときに,  $\rho$  を rank function と呼び  $(V, \rho, E, \text{start}, \text{end})$  を semi-graded graph と呼ぶ. Semi-graded グラフ  $(V, \rho, E, \text{start}, \text{end})$  に対して  $V_i = \rho^{-1}(\{i\})$ ,  $E_i = \{e \in E \mid \rho \circ \text{start}(e) + i = \rho \circ \text{end}(e)\}$  とおく.  $V_i$  及び各辺の重複度は常に有限とし, 更に  $V_0 \neq \emptyset$ ,  $i < 0$  に対し  $V_i = \emptyset$  を仮定する. 特に semi-graded グラフ  $(V, \rho, E, \text{start}, \text{end})$  が  $E_1 = E$  を満たしているときに, graded であるという. 誤解の恐れが無い場合には,  $(V, \rho, E)$  のように  $\text{start}, \text{end}$  を省略する. 我々は共通の

NUMATA, Y.

rank function  $\rho$  と頂点集合  $V$  をもつグラフのペアを考えることが多いが、この場合、 $(V, \rho, E, E')$  のように省略して書く。

$(V, \rho, E)$  を semi-graded グラフとする。  $KV$  を、  $V$  を basis とする  $K$ -線形空間とする。  $KV$  上の  $K$  線形作用  $D_E, U_E$  を  $\lambda \in V$  に対して

$$D_E \lambda = \sum_{e \in E, \text{end}(e)=\lambda} \text{start}(e), \quad U_E \lambda = \sum_{e \in E, \text{start}(e)=\lambda} \text{end}(e)$$

となるように定める。  $D_E$  を *down operator*,  $U_E$  を *up operator* と呼ぶ。我々は共通の rank function と頂点集合  $V$  をもつグラフのペア  $(V, \rho, U, D)$  を考え、  $U$  は up operator  $U_U$  のために、  $D$  は down operator  $D_D$  のためにのみ使う。誤解の恐れが無い場合には up operator  $U_U$  を  $U$  と down operator  $D_D$  を  $D$  と書く。

$(V, \rho, I)$  というグラフを  $I = V, \text{start} = \text{end} = \text{id}$  (恒等写像) と定義する。すると、  $D_I = U_I = I$  (恒等写像) となっている。

Semi-graded グラフ  $(V, \rho, E), (V, \rho, E')$  に対して、  $E + E' := E \amalg E'$  と定義する。  $(V, \rho, E + E')$  は semi-graded グラフで  $U_{E+E'} = U_E + U_{E'}$ ,  $D_{E+E'} = D_E + D_{E'}$  となっている。

以降  $r \in \mathbb{N}$  を固定する。

Up operator  $U$  と down operator  $D$  が  $DU - UD = rI$  満たしており、  $(V, \rho, U)$  も  $(V, \rho, D)$  も共に graded であるときに  $(V, \rho, U, D)$  は *r-dual* であるといい、Robinson 対応に相当する数え上げが行えることが示されている。 ([3])

$(V, \rho, U)$  も  $(V, \rho, D)$  も共に semi-graded であるとする。 Up operator  $U$  と down operator  $D$  は  $D(t)U(t') = r(tt')U(t')D(t)$  (ただし、  $U(s), D(s), r(s)$  は母関数  $\sum_i U_i s^i, \sum_i D_i s^i, \sum_i r_i s^i$  とし、  $r_i \in \mathbb{N}$  とする) を満たしているときに、 *generalized Schur operators* であると言われ、  $(V, \rho, U, D)$  に対して Robinson-Schensted-Knuth 対応に相当する数え上げが行えることが示されている。 ([4])

Up operator  $U$  と down operator  $D$  が  $UD - DU = rD$  という交換関係を満たしているときには、同様の手法を用いて、Robinson-Schensted 対応に相当する数え上げが行えるというのが主結果である。

**Theorem 1.1** (主結果).  $(V, \rho, U, D)$  を共通の頂点集合をもつ semi-graded なグラフの組とし、特に  $(V, \rho, U)$  は graded であるとする。ある  $r \in \mathbb{N}$  があって、上り演算子と下り演算子が、交換関係

$$(1) \quad DU - UD = rD$$

## A GENERALIZATION OF THE ROBINSON-SCHENSTED CORRESPONDENCE

を満たしているとする. このとき,  $(V, \rho, U, D)$  の RS-対応  $\Phi$  と skew shape  $S$  に対して,

$$\{g' : \partial^+ S \rightarrow G \mid \text{growth}\}$$

と

$$\left\{ (\alpha, g'') \mid \begin{array}{l} \alpha: r\text{-colored generalized word on } C(S), \\ g'' : \partial^- S \rightarrow G, \alpha\text{-compatible growth} \end{array} \right\}$$

の間の一対一対応を  $\Phi$ -compatible 2-growth  $g : S \rightarrow G$  を通して構成することができる.

*Example 1.2.* Young 図形全体のなす集合  $\mathbb{Y}$  を頂点とするグラフについて考える.  $\lambda \vdash n$  に対して,

$$\begin{aligned} \rho(\lambda) &= n \\ U &= \left\{ (\lambda, \mu) \mid \begin{array}{l} \mu \text{ は } \lambda \text{ に 1 箱} \\ \text{加えて得られるヤング図形} \end{array} \right\} \\ D &= \left\{ (\lambda, \mu) \mid \begin{array}{l} \mu \text{ は } \lambda \text{ に 各列高々 1 箱} \\ \text{加えて得られるヤング図形} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

と定める. このとき,  $(\mathbb{Y}, \rho, U, D)$  は graded グラフと semi-graded グラフのペアであり.  $DU - UD = D$  が成立している. 例えば,  $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$  に対して実際に計算をしてみると,

$$\begin{aligned} DU \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} &= D \left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) \\ &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \square + \emptyset + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + \square, \\ UD \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} &= U \left( \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \square + \emptyset \right) \\ &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + \square \end{aligned}$$

となりその差はきちんと  $D \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \square + \emptyset$  になっている. また,  $U^n$ -path は skew standard tableau に,  $D^n$ -path は skew semi-standard tableau (column-strict tableau) に対応している.

交換関係 (1) は

$$D_i U = U D_i + r D_{i-1} \quad (\text{for all } i)$$

のように変形できる. このことから次のことは直接計算によりすぐわかる.

*Remark 1.3.*  $DU_1 = rU_1D + D$  を満たしていて  $D_0 = I$  であれば,  $D_1U_1 = U_1D_1 + rI$  が成立する. 即ち,  $D_0 = I$  を満たす我々のグラフ  $(V, \rho, U_1, D)$  に対して,  $(V, \rho, U_1, D_1)$  は  $r$ -dual.

この事実は, Robinson-Schensted 対応を standard tableaux のペアに制限することで, Robinson 対応になるという事に相当している.

*Remark 1.4.*  $(V, \rho, U, D)$  に対して,  $U_0 = I$  かつ,  $U(t)$  と  $D(t)$  が generalized Schur operators であれば,  $DU_1 = U_1D + rD$  が成立する. 即ち,  $(V, \rho, U_1, D)$  は我々のグラフである.

この事実は, Robinson-Schensted-Knuth 対応を Q-tableau が semi-standard tableau であるものに制限することで, Robinson-Schensted 対応になるという事に相当している.

*Remark 1.5.* Theorem 1.1 は次の意味で, Robinson-Schensted 対応の一般化になっている.

- 頂点  $V$  を変える. (ヤング図形以外への Robinson-Schensted 対応)
- 辺  $U, D$  を変える. (column strictly tableaux 以外への Robinson-Schensted 対応)
- RS 対応  $\Phi$  を変える. (bumping algorithm 以外のアルゴリズムによる Robinson-Schensted 対応)
- Skew shape  $S$  を変える. (up down sequence などへの Robinson-Schensted 対応)
- Skew young tableaux への Robinson-Schensted 対応を与えている.

## 2. PROOF OF MAIN THEOREM

ここで, 主結果の対応の構成方法の概略を与える. そのために, まず, 次の記号を用意する.

**Definition 2.1.** グラフのペア  $(V, \rho, E, E')$  が与えられたとき,  $\lambda, \mu \in V$  に対して,

$$C_{E'E}^+(\mu, \lambda) = \left\{ (e', e) \in E' \times E \mid \begin{array}{l} \text{end}(e) = \text{end}(e') \\ \text{start}(e') = \mu, \text{start}(e) = \lambda \end{array} \right\}$$

$$C_{EE'}^-(\mu, \lambda) = \left\{ (e, e') \in E \times E' \mid \begin{array}{l} \text{end}(e) = \mu, \text{end}(e') = \lambda, \\ \text{start}(e) = \text{start}(e') \end{array} \right\}$$

と定義する.

## A GENERALIZATION OF THE ROBINSON-SCHENSTED CORRESPONDENCE

Example 2.2. ヤング図形を頂点とするグラフを Example 1.2 の様に定める. このとき,

$$\begin{aligned} C_{DU}^+(\square, \square\square) &= \left\{ \left( \square, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \square\square \right), \left( \square, \square\square\square, \square\square \right) \right\} \\ C_{UD}^-(\square, \square\square) &= \{ (\square, \emptyset, \square\square) \} \\ C_{DU}^+(\emptyset, \square) &= \{ (\emptyset, \square\square, \square) \} \\ C_{UD}^-(\emptyset, \square) &= \emptyset \end{aligned}$$

である. ただし,  $(\mu, \nu, \lambda) := ((\mu, \nu), (\lambda, \nu))$  の様に書いた.

交換関係 (1) から得られる等式  $DU\lambda = (U + rI)D\lambda$  は次の一対一対応の存在を示唆している.

$$\begin{aligned} \Phi_{\mu, \lambda} : C_{DU}^+(\mu, \lambda) \longrightarrow \\ (C_{UD}^-(\mu, \lambda) \times \{0\}) \cup (C_{ID}^-(\mu, \lambda) \times \{1, \dots, r\}). \end{aligned}$$

この一対一対応を各  $(\mu, \lambda) \in V^2$  に対してひとつずつ集めた物  $\Phi = \{\Phi_{\mu, \lambda} \mid (\mu, \lambda) \in V^2\}$  を RS-対応と呼ぶ. これは

$$\begin{aligned} \Phi : \bigcup_{\lambda, \mu \in V} C_{DU}^+(\mu, \lambda) \longrightarrow \\ \bigcup_{\lambda, \mu \in V} ((C_{UD}^-(\mu, \lambda) \times \{0\}) \cup (C_{ID}^-(\mu, \lambda) \times \{1, \dots, r\})) \end{aligned}$$

という全単射だと思えることができる.

Example 2.3. ヤング図形を頂点とするグラフを Example 1.2 の様に定めると,  $C_{DU}^+(\square, \square\square)$ ,  $C_{UD}^-(\square, \square\square)$  は Example 1.2 の様になっているので例えば,

$$\begin{aligned} \Phi_{\square, \square\square} \left( \square, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \square\square \right) &= ((\square, \emptyset, \square\square), 0) \\ \Phi_{\square, \square\square} (\square, \square\square\square, \square\square) &= ((\square, \square, \square\square), 1) \end{aligned}$$

の様に与えることができる. 一方,  $C_{DU}^+(\emptyset, \square)$ ,  $C_{UD}^-(\emptyset, \square)$  は Example 1.2 の様になっているので

$$\Phi_{\emptyset, \square} (\emptyset, \square\square, \square) = ((\emptyset, \emptyset, \square), 1)$$

の様に与えることができる.

NUMATA, Y.

また, 同様に自明な交換関係  $ID = DI$  からは次の一対一対応を得る.

$$\Phi'_{\mu, \lambda} : C_{DI}^+(\mu, \lambda) \ni (e, e') \mapsto ((e', e), 0) \in C_{ID}^-(\mu, \lambda) \times \{0\}.$$

この自明な一対一対応を RS-対応  $\Phi$  に加え  $\tilde{\Phi} := \Phi \cup \{ \Phi'_{\mu, \lambda} \mid (\mu, \lambda) \in V^2 \}$  とおき *extended RS-対応* とよぶ. Extended RS-対応  $\tilde{\Phi}$  は

$$\tilde{\Phi} : \bigcup_{\lambda, \mu \in V} C_{D(I+U)}^+(\mu, \lambda) \longrightarrow \bigcup_{\lambda, \mu \in V} (C_{UD}^-(\mu, \lambda) \times \{0\} \cup C_{ID}^-(\mu, \lambda) \times \{0, \dots, r\})$$

という全単射だと思える.  $\tilde{\Phi}_1$  を第 1 成分への,  $\tilde{\Phi}_2$  を第 2 成分への射影とする (即ち,  $\tilde{\Phi}(x, x') = ((e', e), n)$  の時に,  $\tilde{\Phi}_1 = (e', e)$ ,  $\tilde{\Phi}_2 = n$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1 : \bigcup_{\lambda, \mu \in V} C_{D(I+U)}^+(\mu, \lambda) &\longrightarrow \bigcup_{\lambda, \mu \in V} C_{(I+U)D}^-(\mu, \lambda) \\ \tilde{\Phi}_2 : \bigcup_{\lambda, \mu \in V} C_{D(I+U)}^+(\mu, \lambda) &\longrightarrow \{0, \dots, r\} \end{aligned}$$

である).

以下, extended RS-対応  $\tilde{\Phi}$  をひとつ固定する. 我々は, 交換関係の示唆する local な paths の対応である extended RS-対応  $\tilde{\Phi}$  を, 貼り合わせることで, global な paths の対応を構成する. さらに, rank を観察することでこの対応が Robinson-Schensted 対応の一般化になっている, 即ち, ワード (を一般化したもの) と対応していることがいえる.

まず, extended RS-対応  $\tilde{\Phi}$  を貼り合わせるための台となるものを用意する.

**Definition 2.4.**  $\mathbb{N}^2$  の finite convex subposet  $S$  を *skew shape* と呼ぶ.

$$\begin{aligned} \rho(i, j) &:= i + j, \\ V_S &:= \{ ((i, j), (i+1, j)) \in S \times S \}, \\ H_S &:= \{ ((i, j), (i, j+1)) \in S \times S \} \end{aligned}$$

とし,  $(S, \rho, V_S, H_S)$  という graded グラフのペアだと思う.  $S$  の部分集合

$$\square_{i,j} := \{ (i, j), (i-1, j), (i, j-1), (i-1, j-1) \} \subset S$$

を  $S$  の cell と呼ぶ. 座標の表示が重要ではない場合には, 省略して  $\square$  の様を書く.  $C(S) := \{ S \text{ の cell } \}$  とおく.

$$\begin{aligned} \partial^+ S &:= \{ (i, j) \in S \mid (i+1, j+1) \notin S \}, \\ \partial^- S &:= \{ (i, j) \in S \mid (i-1, j-1) \notin S \} \end{aligned}$$

A GENERALIZATION OF THE ROBINSON-SCHENSTED CORRESPONDENCE

をそれぞれ *upper boundary*, *lower boundary* とよぶ.

この skew shape の頂点にグラフの元を置いていき, extended RS-対応を貼り合わせていく.

**Definition 2.5.**  $S$  を skew shape とし,  $(V, \rho, E, E')$  を semi-graded グラフのペアとする.

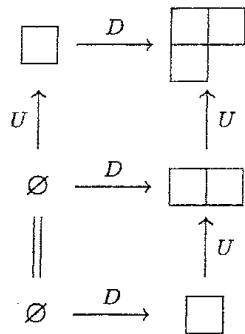
$$g = (g_S : S \rightarrow V, \\ g_V : V_S \rightarrow E, \\ g_H : H_S \rightarrow E')$$

が,  $e \in V_S \cup H_S$  に対して常に  $\text{start}(g(e)) = g(\text{start}(e))$ ,  $\text{end}(g(e)) = g(\text{end}(e))$  となっているときに,  $g$  を  $S$  から  $(V, \rho, E, E')$  への 2-growth と呼ぶ.

**Definition 2.6.** RS 対応  $\Phi$  が与えられた時に, 任意の  $S$  の cell  $\square \in C(S)$  に対して,  $\tilde{\Phi}_1(g(\partial^+\square)) = g(\partial^-\square)$  となっている時に, 2-growth  $g : S \rightarrow (V, \rho, U + I, D)$  は  $\Phi$ -compatible であるという.

**Definition 2.7.**  $\Phi$ -compatible 2-growth  $g : S \rightarrow (V, \rho, U + I, D)$  に対して,  $\alpha_g : C(S) \rightarrow \{0, \dots, r\}$  を,  $\alpha_g(\square) = \tilde{\Phi}_2 \circ g(\partial^+(\square))$  で定義する.

*Example 2.8.* Example 1.2 のグラフに Example 2.3 のように RS 対応を決める. 例えば



は  $S = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i \leq 2, j \leq 1\}$  上の  $\Phi$ -compatible growth を与えている. このとき,  $\alpha_g(\square_{1,1}) = 1$ ,  $\alpha_g(\square_{2,1}) = 0$ . である.

$\Phi$ -compatible growth は各 cell  $\square$  において,  $\tilde{\Phi}_1(g(\partial^+\square)) = g(\partial^-\square)$  となっているので,  $g|_{\partial^+\square}$  で一意に決まってしまう. また,  $\tilde{\Phi}$  の全単射性から, 各 cell  $\square$  において,  $\tilde{\Phi}(g(\partial^+\square)) = (g(\partial^-\square), \tilde{\Phi}_2(\partial^-\square))$  であり,  $g(\partial^+\square) = \tilde{\Phi}^{-1}(g(\partial^-\square), \alpha_g(\square))$  となっているので,  $g|_{\partial^-\square}$  と  $\alpha_g$  から一意に決まってしまう. これを整理すると次の lemma になる.

**Lemma 2.9.**  $RS$ 対応  $\Phi$  が与えられたとき,

$$(2) \quad \{ g|_{\partial^+ S} \mid g \text{ は } S \text{ 上の } \Phi\text{-compatible 2-growth} \}$$

と

$$(3) \quad \{ (g|_{\partial^- S}, \alpha_g) \mid g \text{ は } S \text{ 上の } \Phi\text{-compatible 2-growth} \}$$

の間には  $g$  を通して一対一対応を構成できる.

さて, (2) と (3) は何かということに注目する. (2) については,

$$\begin{aligned} & \{ g|_{\partial^+ S} \mid g \text{ は } S \text{ 上の } \Phi\text{-compatible 2-growth} \} \\ &= \{ g \mid \partial^+ S \text{ 上の growth} \} \end{aligned}$$

が成立していることはすぐ分かる. 次に, (3) を記述する為次言葉を用意する.

**Definition 2.10.**  $S$  を skew shape とする.  $\alpha : C(S) \rightarrow \{1, \dots, r\}$  が各行高々1つしか non-zero な cell を持たない時, すなわち,  $\alpha(\square_{i,j}) \neq 0, \alpha(\square_{i,k}) \neq 0$  ならば  $j = k$  が成立している時,  $\alpha$  は  $r$ -colored generalized word であるという. さらに,  $\partial^- S$  上の 2-growth  $g$  に対して,  $(i-1, j), (i, j) \in \partial^- S$  で  $\rho \circ g(i-1, j) < \rho \circ g(i, j)$  ならば任意の  $\square_{i,k} \in C(S)$  に対して  $\alpha(\square_{i,k}) = 0$  となっているときに,  $g$  は  $\alpha$ -compatible であるという.

$\rho \circ g$  に注目する.  $\alpha_g(\square_{i,j}) = 0$  であることと,  $\rho \circ g(i, j) - \rho \circ g(i-1, j) = \rho \circ g(i, j-1) - \rho \circ g(i-1, j-1)$  が成立していることは同値であることが  $RS$  対応  $\Phi$  の定義からわかる. 今  $U$  が graded であるので,  $\rho \circ g(i, j) - \rho \circ g(i-1, j)$  は 0 か 1 しか取れない. また  $\rho \circ g(i, j) - \rho \circ g(i-1, j) \geq \rho \circ g(i, j-1) - \rho \circ g(i-1, j-1)$  が常に成立しているので,  $\alpha_g$  は  $r$ -colored generalized word で  $g|_{\partial^- S}$  は  $\alpha_g$ -compatible であることがわかる. また,  $\Phi$  の全単射性から,

$$\begin{aligned} & \{ (g|_{\partial^- S}, \alpha_g) \mid g \text{ は } S \text{ 上の growth} \} \\ &= \left\{ (g, \alpha) \mid \begin{array}{l} g; \alpha\text{-compatible growth on } \partial^- S \\ \alpha; r\text{-colored generalized word} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

がわかる. これらを整理することで Theorem 1.1 を得る.

### 3. EXAMPLES

ここでは, ヤング図形を頂点とするグラフについて見る.



A GENERALIZATION OF THE ROBINSON-SCHENSTED CORRESPONDENCE

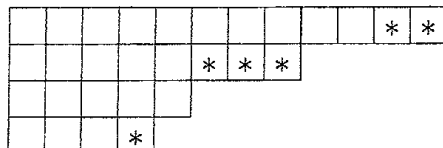
3.1. **Variation of Edges.** Young 図形全体のなす集合  $\mathbb{Y}$  を頂点とするグラフについて考える.  $\lambda \vdash n$  に対して,

$$\begin{aligned}
 U\lambda &= \sum_{\substack{\mu; \lambda \text{ に } 1 \text{ 箱} \\ \text{加えて得られるヤング図形}}} \mu \\
 D\lambda &= \sum_{\substack{\mu; \mu \text{ に各列高々 } 1 \text{ 箱} \\ \text{加えて } \lambda \text{ が得られるヤング図形}}} \mu \\
 D'\lambda &= \sum_{\substack{\mu; \mu \text{ に各行高々 } 1 \text{ 箱} \\ \text{加えて } \lambda \text{ が得られるヤング図形}}} \mu
 \end{aligned}$$

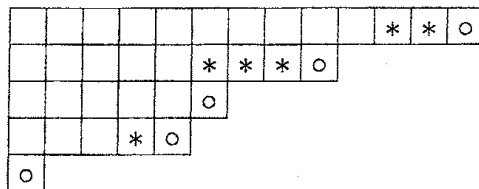
で定める. このとき, Example 1.2 で見たように,  $DU - UD = D$  が成立している. さらに,  $D'U - UD' = D'$  が成立しており,  $D^n$ -path は (skew) row-strict tableau に対応している. さらに,  $(DD')U - U(DD') = 2(DD')$  が成立しており,  $(DD')^n$ -path は ([7] の意味での) (skew) marked tableau に対応している.

3.2. **Variation of RS-correspondences.**  $(\mathbb{Y}, \rho, U, D)$  について観察する. RS-対応を定めたい. 実は,  $(\mu, \lambda) \notin D$  の時には自明な対応しかなく,  $(\mu, \lambda) \in D$  の時を定めるだけで, RS-対応は決まる.

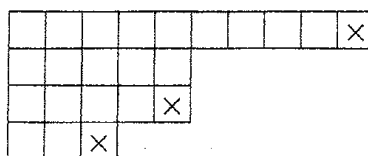
$(\mu, \lambda) \in D$  とする.  $\lambda$  と  $\mu$  を重ねて  $\lambda/\mu$  を  $\boxed{*}$  で表すと, 例えば,  $\lambda = (12, 8, 5, 4), \mu = (10, 5, 5, 3)$  の場合には,



のようになっている.  $D$  の定義より,  $\boxed{*}$  は各列高々1つある. この図に  $\lambda$  の coconer 即ち



の  $\boxed{o}$  のうち, その直上に  $\boxed{*}$  のない箱を加え, 上から 1, 2, ... と名づけ, 一方,  $\mu$  の coner 即ち





になるようにするには

$$\mu = \begin{array}{cccccccc} & & & & & & & a \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & b & \\ & & c & & & & & \\ & & & & & & & \end{array}$$

から  $\boxed{a}, \boxed{b}, \dots$  のいずれか 1 箱を取り除いたものを通過するしかないことがわかる. また,  $\lambda$  で始めて  $\mu$  で終わる  $ID$ -path は  $\mu$  を通過するものしかない, つまり,  $\mu$  から 1 箱も取り除かないものである. すなわち,  $C_{(U+I)D}^-(\mu, \lambda) = \{(\mu, \lambda \cup x, \lambda) \mid x = \emptyset, \boxed{a}, \boxed{b}, \dots\}$  となっている.

よって,  $\{\boxed{1}, \boxed{2}, \dots\}$  と  $\{\emptyset, \boxed{a}, \boxed{b}, \dots\}$  の間の対応を定めることで RS 対応を決めることができることがわかる.

例えば,  $\boxed{1} \Leftrightarrow \emptyset, \boxed{2} \Leftrightarrow \boxed{a}, \boxed{3} \Leftrightarrow \boxed{b}, \dots$  のように定めると, Theorem 1.1 の対応は通常 Robinson-Schensted 対応になる.

また  $\boxed{1} \Leftrightarrow \boxed{a}, \boxed{2} \Leftrightarrow \boxed{b}, \dots, \boxed{n} \Leftrightarrow \emptyset$ , のように定めると, Theorem 1.1 の対応は column insertion による Robinson-Schensted 対応になる.

**3.3. Variation of Skew Shapes.** RS 対応を  $\boxed{1} \Leftrightarrow \emptyset, \boxed{2} \Leftrightarrow \boxed{a}, \boxed{3} \Leftrightarrow \boxed{b}, \dots$  のように定める.

$S = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i + j \leq n\}$  とすると, Theorem 1.1 の対応は  $(U+I)D(U+I)D \cdots (U+I)D$ -path の数え上げになっている. 特に  $g(n, 0) = g(0, n) = \emptyset$  となっているようなものに注目すると,  $\emptyset$  から  $\emptyset$  への  $(U+I)D(U+I)D \cdots (U+I)D$ -path は  $n!$  個あることがわかる.

$S = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i \leq n, j \leq m\}$  とする. とくに  $g(n, 0) = g(0, n) = \emptyset$  となっているようなものに注目すると, 通常 Robinson-Schensted 対応になる. また  $g(n, 0) = g(0, n) = \emptyset$  とは限らない場合には skew tableau に関する Robinson-Schensted 対応を提供している.

#### REFERENCES

- [1] Fomin, S., Generalized Robinson-Schensted-Knuth correspondence, Zar. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 155(1986), 156–175, 195 (Russian); English transl., J. Soviet Math. 41(1988), 979–991.
- [2] Fomin, S., Duality of graded graphs, J. Algebraic Combin.
- [3] Fomin, S., Schensted algorithms for dual graded graphs, J. Algebraic Combin.
- [4] Fomin, S., Schur Operators and Knuth Correspondences, J. of Combinatoric theory, Series A. 72(1995), 277–292.
- [5] Fulton, W., Young Tableaux; with applications to representation theory and geometry, volume 35 of London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, New York, 1997.
- [6] Gessel, Ira M., Counting paths in Young's lattice, J. Statistical planning and inference. 34(1993), 125–134.

NUMATA, Y.

- [7] Matsumoto, S., A scaling limit for  $t$ -Schur measures, preprint math.PR/0309037.
- [8] Roby, T., Applications and extensions of Fomin's generalization of the Robinson-Schensted correspondence to differential posets, Ph.D.thesis, M.I.T., 1991.
- [9] Stanley, R., Differential posets, J.American Math. Soc, 1(1988), 919–961.
- [10] Stanley, R., Variations on differential posets, Invariant theory and tableaux (Stanton, D., ed.), IMA volumes in mathematics and its applications, Springer-Verlag, New York, pp.145–165.

*E-mail address:* nu@math.sci.hokudai.ac.jp