数理解析研究所講究録 1438 巻 2005 年 198-209

Symmetric coinvariant algebras and local Weyl modules at a double point

京都大学理学研究科数学教室 桑原 敏郎 (Toshiro Kuwabara)
Department of Mathematics,
Kyoto University

1 記号

n 次対称群を S_n とする. triv を自明な表現, sign を指標表現とする.

有限群 G に対してその群環を $\mathbb{C}[G]$ とする. G 加群 L と G の部分群 H に対して L^H を H 不変部分空間とする. また H 加群 L に対して G への誘導表現を $\mathrm{Ind}_H^G L=\mathbb{C}[G]\otimes_{\mathbb{C}[H]} L$ とする.

ベクトル空間 V に対して $V^{\otimes n}$ で n 次テンソル積を表すとし, $S^n(V)$ で n 次対称積を表すとする.

$e_k(x_1,\ldots,x_i)$ を $x_1,\ \ldots,\ x_i$ を変数とする k 次の基本対称式とする. 特に変数を省略したときには, $e_1,\ \ldots,\ e_n$ で $x_1,\ \ldots,\ x_n$ を変数とする基本対称式 $e_i=e_i(x_1,\ldots,x_n)$ を表すとし, また $f_1,\ \ldots,\ f_n$ で $y_1,\ \ldots,\ y_n$ を変数とする基本対称式 $f_i=e_i(y_1,\ldots,y_n)$ を表すものとする.

環 R とその部分集合 S に対して, $\langle S\rangle_R$ を S で R のイデアルとする.

2 Symmetric coinvariant algebra

まず主要な対象である symmetric coinvariant algebra (対称余不変代数) について解説する. 定義を与える前によく知られた例を見る事にしよう.

よく知られた例

n 変数の多項式環上の対称群 S_n の表現を考える.

$$\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]\curvearrowleft S_n$$

ここで S_n の作用で対称な多項式で原点で 0 となるもの全体を

$$\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]_+^{S_n} = \{P \in \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^{S_n} \mid P(0,\ldots,0) = 0\}$$

とし, symmetric coinvariant algebra はそれらで生成されるイデアルによる商代数

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]_{S_n} &= \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]/\langle \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]_+^{S_n}\rangle_{\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]} \\ &= \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]/\langle e_1,\ldots,e_n\rangle_{\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]}\end{aligned}$$

と定義する. この代数は自然に S_n 加群の構造を持つ. この構造は比較的よく知られていて, 次のような事実がある.

Proposition 1 (Chevalley). S_n 加群として $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]_{S_n}$ は正則表現 $\mathbb{C}[S_n]$ に同型である.

Proof. [1] などを参照すること. □

ここで我々が考えたいのは上の S_n 加群の次のような一般化である. つまり上の定義で $\mathbb{C}[x]$ をアフィン多様体 M の座標環 A でおきかえる.

一般化

M を (必ずしも既約, 被約ではない)$\mathbb{C}$ 上のアフィン多様体とし, A をその座標環とする. A の添加写像 $\varepsilon : A \to \mathbb{C}$ を一つ固定すると, ε は A の n 次テンソル積 $A^{\otimes n}$ の添加写像を誘導する. この添加写像も同様に $\varepsilon : A^{\otimes n} \to \mathbb{C}$ と書くことにしよう.

A の n 次テンソル積 $A^{\otimes n}$ には n 次対称群 S_n が因子のいれかえで作用する:

$$A^{\otimes n} \curvearrowleft S_n.$$

この時, S_n の作用で対称な $A^{\otimes n}$ の元で ε で 0 となるもの全体を

$$(A^{\otimes n})_+^{S_n} = \{P \in (A^{\otimes n})^{S_n} \mid \varepsilon(P) = 0\}$$

とし, A に対する **symmetric coinvariant algebra** はそれらで生成されるイデアルによる商代数

$$A_{S_n}^{\otimes n} = A^{\otimes n}/\langle (A^{\otimes n})_+^{S_n}\rangle_{A^{\otimes n}}$$

と定義する．

このとき, $A=\mathbb{C}[x]$ とし, $\varepsilon : A \to \mathbb{C}$ を $\varepsilon(P)=P(0)$ $(P \in A)$ とすると, 最初に挙げた例と一致する．

このような一般化は Feigin, Loktev らによって導入された．([6])

例

いくつかの例を挙げてみよう．

(1)

$$
\begin{gathered}
A=\mathbb{C}[x]/\langle x^d\rangle_{\mathbb{C}[x]} \quad (d \geq 1) \\
\varepsilon : A \to \mathbb{C} \\
\varepsilon(P)=P(0) \quad (P \in A)
\end{gathered}
$$

とする．このとき A を座標環とするアフィン多様体 M は閉点が一点 0 である 0 次元多様体である．また $d \geq 2$ のとき, A は被約でない．

このとき, A に対する symmmetric coinvariant algebra $A_{S_n}^{\otimes n}$ は,

$$A_{S_n}^{\otimes n}=\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]/\langle e_1,\ldots,e_{d-1},x_1^d,\ldots,x_n^d\rangle_{A\otimes n}$$

であるが, これは Deconcini-Procesi-Tanisaki 代数と呼ばれる次の S_n 加群の特別な場合に一致することが示される．

Definition 2. 分割 $\mu \in P_n$ に対して,

$$I_\mu=\left\langle e_m(x_{i_1},\ldots,x_{i_{n-k+1}}) \;\middle|\; \begin{array}{c} k=1,\ldots,\mu_1, \\ n-k+1-(\mu'_k+\mu'_{k+1}+\cdots+\mu'_{\mu_1}) \\ <m \leq n-k+1 \end{array} \right\rangle_{\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]}$$

とし, I_μ による商代数

$$R_\mu=\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]/I_\mu$$

を DeConcini-Procesi-Tanisaki 代数と呼ぶ．

Proposition 3. 分割 $\mu=(d^q,r)$ (ここで, $n=qd+r$, $0 \leq r < d$ とする) とし, μ' を μ の共役とすると

$$\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]/\langle e_1,\ldots,e_{d-1},x_1^d,\ldots,x_n^d\rangle_{\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]}=R_{\mu'}$$

である．

Proof. 証明は後ろの Section A を参照せよ. □

DeConcini-Procesi-Tanisaki 代数の S_n 加群としての構造については, 以下の事実が知られており, 上の命題と合わせて, symmetric coinvariant algebra の S_n 加群としての構造がえられる.

Proposition 4. $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_l)$ に対して, S_n 加群として以下の同型が存在する:

$$R_\mu \simeq \mathrm{Ind}_{S_{\mu_1}\times\cdots\times S_{\mu_l}}^{S_n} \mathrm{triv}.$$

Proof. [7] などを参照せよ. □

(2)

$$A = \mathbb{C}[x, y]$$
$$\varepsilon : A \to \mathbb{C}$$
$$\varepsilon(P) = P(0,0) \quad (P \in A)$$

このとき, A を座標環とするアフィン多様体 M は 2 次元平面 $\mathbb{C}^2$ であり, ε は原点 $(0,0)$ での evaluation である. この A に対する symmetric coinvariant algebra $A_{S_n}^{\otimes n}$ は diagonal coinvariant algebra と呼ばれ, その S_n 加群としての構造は Haiman によって示された. ([8]) Haiman による証明は $\mathbb{C}^2$ 上の n 点の Hilbert スキームの上の連接層を用いた実現によるものであるが, 一方で rational Cherednik 代数の表現の退化を用いた実現も知られている. ([3], [4], [5])

主題

これまでに合わせて 3 つの例を挙げたが, この例がこれまでに知られていた symmetric coinvariant algebra の例の全てであった. 我々の symmtric coinvariant algebra $A_{S_n}^{\otimes n}$ は非常に広いクラスの代数 A について定義可能であるので, 上に挙げた例のような比較的簡単な代数に対してだけでなく, 例えば特異性を持ったものについてもその symmetric coinvariant algebra の構造を調べるのはおもしろい問題となりうるだろう.

ただし, 上で挙げた例の場合もそれぞれの symmetric coinvariant algebra の構造は全く自明ではない. そこで一般の特異点の場合で考えるので

はなく, A が二重点を持つ代数曲線の場合を考えることにする. つまり,

$$A = \mathbb{C}[x,y]/\langle xy\rangle_{\mathbb{C}[x,y]}$$
$$\varepsilon : A \to \mathbb{C}$$
$$\varepsilon(P) = P(0) \quad (P \in A)$$

として, symmtric coinvariant algebra $A_{S_n}^{\otimes n}$ を考える. この時 A を座標環とするアフィン多様体 M は二重点 0 を持ち, ε はその二重点での evaluation である.

主定理として次の結果を得た.

Theorem 5. S_n 加群として次の同型がある:

$$A_{S_n}^{\otimes n} \simeq \mathbb{C}[S_n] \oplus (n-1)\operatorname{Ind}_{S_2}^{S_n} \operatorname{sign}.$$

3 Local Weyl module

Feigin, Loktev らが前項で定義した一般化された symmetric coinvariant algebra を導入したのは local Weyl module (局所 Weyl 加群) というある無限次元 Lie 代数の表現を考察するためであった. この項では, local Weyl module について解説を行う.

定義

Section 2 で symmetric coinvariant algebra を定義したのと同様に M を (必ずしも既約, 被約ではない)$\mathbb{C}$ 上のアフィン多様体とし, A をその座標環とする. A の添加写像 $\varepsilon : A \to \mathbb{C}$ を一つ固定する.

この時, $\mathfrak{sl}_{r+1} \otimes A$ は無限次元 Lie 代数となる. $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対し, **local Weyl module** $W_M(\varepsilon, \lambda)$ は $\mathfrak{sl}_{r+1}$ 可積分な $\mathfrak{sl}_{r+1} \otimes A$ 加群で次の条件を満たす cyclic vector v_0 を持つもののうち極大のものである:

$$(\mathfrak{n}_+ \otimes P)v_0 = 0, \quad (h \otimes P)v_0 = \lambda(h)\varepsilon(P)v_0.$$

ただし上で $P \in A$, $h \in \mathfrak{h}$ は任意とする.

local Weyl module は $M = \mathbb{C}$ の場合に Chari, Pressley によって, 続いて一般の M の場合に Feigin, Loktev によって導入された. ([2], [6])

Local Weyl module と symmetric coinvariant algebra の関係

V_{r+1} は $\mathfrak{sl}_{r+1}$ のベクトル表現, ω_1 はその最高ウェイトとする. $\lambda = n\omega_1$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ のとき, symmetric coinvariant algebra $A_{S_n}^{\otimes n}$ と local Weyl module $W_M(\varepsilon, n\omega_1)$ とは次のように互いに Schure-Weyl 双対になっている.

Theorem 6 ([6]). 次の $\mathfrak{sl}_{r+1}$ の表現としての同型が存在する:

$$W_M(\varepsilon, n\omega_1) \simeq (V_{r+1}^{\otimes n} \otimes A_{S_n}^{\otimes n})^{S_n}.$$

上の定理と我々の主定理 Theorem 5 より $A = \mathbb{C}[x, y]/\langle xy \rangle$ の場合に local Weyl module の $\mathfrak{sl}_{r+1}$ の表現としての構造が次の様に定まる.

Corollary 7. $\mathfrak{sl}_{r+1}$ の表現として

$$W_M(\varepsilon, n\omega_1) \simeq V_{r+1}^{\otimes n} \oplus (n-1)\left(V_{r+1}^{\otimes n-2} \otimes \wedge^2 V_{r+1}\right)$$

は同型である.

4 証明の概略

主定理 Theorem 5 の証明についてその概略を解説しよう. 完全な証明は原論文 [10] を参照していただきたい. 基本となるアイディアは3つある. まず, $A_{S_n}^{\otimes n}$ にフィルターを導入し, $A_{S_n}^{\otimes n}$ 自体の代わりにこのフィルターに関する次数付加群を考える. 第2に, $A_{S_n}^{\otimes n}$ を少し一般化した S_n 加群の構造を持つ $A^{\otimes n}$ の商代数 $R_{i,j}^n$ を構成する. [7] で DeConcini-Procesi-Tanisaki 代数の構造を調べるのに用いたのと同様の方法が $R_{i,j}^n$ の一部の場合を調べるのに適用できる. 第3に, $R_{i,j}^n$ の間の完全列を用いて, 第2のステップで調べた $R_{i,j}^n$ の構造から $A_{S_n}^n$ の構造がわかる.

フィルター

次の $A^{\otimes n}$ のフィルター $\{F_i A^{\otimes n}\}_{1 \leq i \leq n}$ を考える:

$$F_i A^{\otimes n} = \sum_{|J|=i} y_J A^{\otimes n}$$

ここで, $J=\{j_1,\ldots,j_i\}$ に対して $y_J=y_{j_1}\ldots y_{j_i}$ とする. このフィルターから $A_{S_n}^{\otimes n}$ のフィルター $\{F_iA_{S_n}^{\otimes n}\}_{1\le i\le n}$ が自然に誘導される.

このフィルターは S_n 不変であるので, このフィルターに関する次数付き加群 $\mathrm{gr}\,A_{S_n}^{\otimes n}$ は $A_{S_n}^{\otimes n}$ と同型となる. また, 次の事は容易にわかる:

$$\begin{aligned}\mathrm{gr}_0\,A_{S_n}^{\otimes n}&=\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]_{S_n}\simeq\mathbb{C}[S_n],\\ \mathrm{gr}_n\,A_{S_n}^{\otimes n}&=0.\end{aligned}$$

従って $1\le i\le n-1$ に対して $\mathrm{gr}_i\,A_{S_n}^{\otimes n}$ の構造を調べればよい. 実際には次の事を示す:

Proposition 8. 各 $1\le i\le n-1$ に対して,

$$\mathrm{gr}_i\,A_{S_n}^{\otimes n}\simeq\mathrm{Ind}_{S_2}^{S_n}\,\mathrm{sign}$$

という S_n 加群の同型が存在する.

次節およびその次の節で, $A_{S_n}^{\otimes n}$ の一般化とその間の完全列を用いて, この命題を証明する.

$A_{S_n}^{\otimes n}$ の一般化 $R_{i,j}^n$

$1\le i,\,j\le n$ に対して $A_{S_n}^{\otimes n}$ の一般化 $R_{i,j}^n$ を次で定義する:

$$\begin{aligned}R_{i,j}^n&=A^{\otimes n}/J_{i,j}^n,\\ J_{i,j}^n&=\left\langle\begin{array}{l}e_1,\ldots,e_{i-1},x_I\ (|I|=i)\\ f_1,\ldots,f_{j-1},y_J\ (|J|=j)\end{array}\right\rangle_{A^{\otimes n}}.\end{aligned}$$

$i=j=n$ のとき $R_{n,n}^n$ は $A_{S_n}^{\otimes n}$ に一致する.

もちろん一般の $i,\,j$ について $R_{i,j}^n$ の構造を調べるのは $A_{S_n}^{\otimes n}$ の構造を調べるのと同じくらい難しい. しかし, $i+j\le n+1$ の場合には DeConcini-Procesi-Tanisaki 代数に対して [7] で用いられている方法と同様の方法によって $R_{i,j}^n$ の構造を調べる事ができる.

$i,\,j\ge 1,\,i+j\le n+1$ に対して $a_1,\,\ldots,\,a_{i-1}\in\mathbb{C}^\times$ を相異なる数とし, $b_1,\,\ldots,\,b_{j-1}\in\mathbb{C}^\times$ も相異なる数とする. このとき, M^n の点 z_0 を

$$z_0=\left(\begin{pmatrix}a_1\\0\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}a_{i-1}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\b_1\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}0\\b_{j-1}\end{pmatrix},\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}_{n-i-j+2}\right)\in M^n$$

とする. 対称群 S_n は M^n に座標の置換によって作用する. W を z_0 を含む S_n の作用による軌道とすると, $\#W = \#(S_n/S_{n-i-j+2}) = n!/(n-i-j+2)!$ である.

R_W を W の座標環とする, つまり:

$$\begin{aligned} I_W &= \left\{P \in A^{\otimes n} \mid P(z)=0 \quad (z \in W)\right\}, \\ R_W &= A^{\otimes n}/I_W. \end{aligned}$$

とする. このとき, R_W は自然に S_n 加群となるが, S_n 加群として同型 $R_W \simeq \mathrm{Ind}_{S_{n-i-j+2}}^{S_n} \mathrm{triv}$ が存在する.

$A^{\otimes n}$ には全次数 (total degree) によるフィルターが定義できる. このフィルターから誘導される R_W のフィルターを考え, それに関する次数付き加群を $\mathrm{gr}\, R_W (= A^{\otimes n}/\,\mathrm{gr}\, I_W)$ とする.

$e_k,\ f_k \in \mathrm{gr}\, I_W$ $(1 \le k \le n)$ および $x_I \in \mathrm{gr}\, I_W$ $(\#I = i)$, $y_J \in \mathrm{gr}\, I_W$ $(\#J = j)$ は容易にわかるので, $R_{i,j}^n$ と $\mathrm{gr}\, R_W$ の間に S_n 加群の全射

$$R_{i,j}^n \longrightarrow \mathrm{gr}\, R_W$$

が存在する. 一方, n についての帰納法によって $R_{i,j}^n$ の次元が $n!/(n-i-j+2)!$ 以下であると示すことができる. この事実から上の全射が S_n 加群の同型であることが示される.

Lemma 9. $i,\ j \ge 1,\ i+j \le n+1$ に対して以下の S_n 加群の同型が存在する:

$$R_{i,j}^n \simeq \mathrm{Ind}_{S_{n-i-j+2}}^{S_n} \mathrm{triv}.$$

完全列

$1 \le i \le n-1$ に対して, 次の S_n 加群の完全列が存在する:

$$0 \to \mathrm{gr}_i\, A_{S_n}^{\otimes n} \to R_{n-i,i+1}^n \to R_{n-i,i}^n \to 0.$$

ここで, $R_{n-i,i+1}^n$, $R_{n-i,i}^n$ に対しては Lemma 9 よりその構造がわかっているので, 上の完全列は

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{gr}_i\, A_{S_n}^{\otimes n} & \longrightarrow & R_{n-i,i+1}^n & \longrightarrow & R_{n-i,i}^n & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \wr\!\mid & & \wr\!\mid & & \\ & & & & \mathbb{C}[S_n] & & \mathrm{Ind}_{S_2}^{S_n} \mathrm{triv} & & \end{array}$$

となる. 従って $\mathrm{gr}_i\, A_{S_n}^{\otimes n} \simeq \mathrm{Ind}_{S_2}^{S_n} \mathrm{sign}$ となり, Proposition 8 を得る.
これまでの結果をまとめると,

$$\begin{aligned} \mathrm{gr}_0\, A_{S_n}^{\otimes n} &\simeq \mathbb{C}[S_n], \\ \mathrm{gr}_i\, A_{S_n}^{\otimes n} &\simeq \mathrm{Ind}_{S_2}^{S_n} \mathrm{sign} \qquad (1 \leq i \leq n-1), \\ \mathrm{gr}_n\, A_{S_n}^{\otimes n} &= 0. \end{aligned}$$

であり, 従って

$$A_{S_n}^{\otimes n} \simeq \mathrm{gr}\, A_{S_n}^{\otimes n} \simeq \mathbb{C}[S_n] \oplus (n-1)\, \mathrm{Ind}_{S_2}^{S_n} \mathrm{sign}$$

と Theorem 5 を得る.

A　Proposition 3 の証明

この節では Proposition 3 の証明を与える. 命題を改めてのせよう.

Definition 10. 分割 $\mu \in P_n$ に対して,

$$I_\mu = \left\langle e_m(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k+1}}) \;\middle|\; \begin{array}{c} k = 1, \ldots, \mu_1, \\ n-k+1-(\mu'_k + \mu'_{k+1} + \cdots + \mu'_{\mu_1}) \\ < m \leq n-k+1 \end{array} \right\rangle_{\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]}$$

とし, I_μ による商代数

$$R_\mu = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I_\mu$$

を DeConcini-Procesi-Tanisaki 代数と呼ぶ.

Proposition 11.

$$\begin{aligned} A = \mathbb{C}[x]/\langle x^d \rangle_{\mathbb{C}[x]} \quad (d \geq 1) \\ \varepsilon : A \to \mathbb{C} \\ \varepsilon(P) = P(0) \quad (P \in A) \end{aligned}$$

とする. 分割 $\mu = (d^q, r)$ (ここで $n = qd + r$, $0 \leq r < d$ とする) とし, μ' を μ の共役とすると, A に対する symmetric coinvariant algebra

$$A_{S_n}^{\otimes n} = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/\langle e_1, \ldots, e_{d-1}, x_1^d, \ldots, x_n^d \rangle_{\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]}$$

は DeConcini-Procesi-Tanisaki 代数 $R_{\mu'}$ に一致する.

示すべき事は

$$\left\langle \begin{array}{c} e_1, \ldots, e_n \\ x_1^d, \ldots, x_n^d \end{array} \right\rangle_{\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]} =$$

$$\left\langle e_l(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k+1}}) \;\middle|\; \begin{array}{l} k = 1, \ldots, q+1 \\ (k-1)(d-1) < l \leq n-k+1 \end{array} \right\rangle_{\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]} = I_{\mu'}$$

である.

Lemma 12. $(k-1)(d-1) < l \leq n-k+1$ に対して次が成立する:

$$e_l(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k+1}}) \in \left\langle \begin{array}{c} e_1, \ldots, e_n \\ x_1^d, \ldots, x_n^d \end{array} \right\rangle_{\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]}.$$

Proof. $h_l(x_1, \ldots, x_i)$ で x_1, …, x_i を変数とする l 次の完全対称式とする. $e_l(x_1, \ldots, x_i)$ の母関数は

$$\prod_{j=i}^{i}(1 - x_j t) = \sum_l (-1)^l e_l(x_1, \ldots, x_i) t^l$$

であり, $h_l(x_1, \ldots, x_i)$ の母関数は

$$\prod_{j=1}^{i}(1 - x_j t)^{-1} = \sum_l h_l(x_1, \ldots, x_i) t^l \tag{1}$$

であるので, 変数の部分集合 $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k+1}}\}$ と, その補集合 $\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_{k-1}}\}$ に対して

$$\prod_{p=1}^{n}(1 - x_p t) \prod_{p=1}^{k-1}(1 - x_{j_p} t)^{-1} = \prod_{p=1}^{n-k+1}(1 - x_{i_p} t)$$

の t についての l 次の項を見ると

$$\begin{aligned} h_l(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{k-1}}) - h_{l-1}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{k-1}}) e_1 + \ldots \\ + (-1)^{l-1} h_1(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{k-1}}) e_{l-1} + (-1)^l e_l = \\ (-1)^j e_l(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k+1}}) \end{aligned} \tag{2}$$

が成り立つ. よって $\langle e_1, \ldots, e_n \rangle_{\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]}$ を法として

$$e_l(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k+1}}) \equiv (-1)^l h_l(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{k-1}}) \tag{3}$$

である. $l > (k-1)(d-1)$ のとき,

$$h_l(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{k-1}}) \in \langle x_1^d, \ldots, x_n^d \rangle_{\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]} \tag{4}$$

である事を示そう. 実際, (1) より $h_l(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{k-1}})$ が $\langle x_1^d, \ldots, x_n^d \rangle_{\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]}$ に含まれないとすると $h_l(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{k-1}})$ の次数は $(k-1)(d-1)$ 以下でなければならず, $l > (k-1)(d-1)$ に反する.

(3), (4) により命題が示された. □

逆に, (2) と同様に $1 \leq j \leq n$ に対して

$$x_j^d - x_j^{d-1}e_1 + \cdots + (-1)^{d-1}x_j e_{d-1} + (-1)^d e_d = (-1)^d e_d(x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_n)$$

であり, e_1, ..., e_n および $e_d(x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_n)$ は $I_{\mu'}$ に含まれるので, $x_j^d \in I_{\mu'}$ である.

これによって示すべき命題が証明できた.

参考文献

[1] C. Chevalley, Invariants of finite groups generated by reflections, Amer. J. Math. 78 (1955), 778-782.

[2] V. Chari, A. Pressley, Weyl modules for Classical and Quantum Affine Algebras, Represent. Theory 5 (2001), 191-223, math.QA/0004174.

[3] I. Gordon, On the quotient by diagonal invariants, Invent. Math., 153 (2003), 503-518.

[4] I. Gordon, J. T. Stafford, Rational Cherednik algebras and Hilbert schemes, math.RA/0407516.

[5] I. Gordon, J. T. Stafford, Rational Cherednik algebras and Hilbert schemes II: representations and sheaves, math.RT/0410293.

[6] B. Feigin, S. Loktev, Multi-dimensional Weyl modules and symmetric functions, to appear in Comm. Math. Phys., math.QA/0212001.

[7] A.M. Garsia, C. Procesi, On Certain Graded S_n-Modules and the q-Kostka Polynomials, Advances In Math. 94 (1992), 82-138.

[8] M. Haiman, Hilbert schemes, polygraphs and the Macdonald positivity conjecture, J. Amer. Math. Soc. 14 (2001), no. 4, 941-1006, math.AG/0001246.

[9] H.L. Hiller, Geometry of Coxeter Groups, Research Notes in Mathematics, No. 54, Pitman, Boston, 1982.

[10] T. Kuwabarfa, Symmetric coinvariant algebras and local Weyl modules at a double point, math.RT/0407429.

[11] T. Tanisaki, Defining ideals of the closures of the conjugacy classes and representations of the Weyl groups, Tôhoku Math. J. 34 (1982), 575-585.

[12] H. Weyl, The Classical Groups. Their Invariants and Representations, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1939.