数理解析研究所講究録 1439 巻 2005 年 41-65



# Equivariant estimators under asymmetric loss functions

筑波大·数理物質科学　坂入 賢市 (Kenichi Sakairi)
筑波大·数理物質科学　赤平 昌文 (Masafumi Akahira)

## 1　はじめに

統計的推定において, 位置尺度母数分布モデルは基本的であり, 適当な損失関数のもとでリスクを最小にする推定量を求める問題は重要である. 通常は, 損失関数として, 2 乗損失が解析的にも取り扱いやすいこともあって, そのもとでリスクを最小にする位置 (尺度) 共変推定量の形は得られていて, 正規分布, 一様分布等の場合には具体的にその推定量を求めることができる (Lehmann and Casella [LC98], 鍋谷 [N78]). しかし, 2 乗損失とは異なる損失の場合には, 解析的にも取り扱い難い面もあって, 従来, あまり論じられていなかった. 最近, 推定論において, 非対称な損失関数の典型として線形指数 (linear exponential , 略して LINEX) 損失関数が導入され, 推定量のこの損失によるリスクに関して, Rao-Blackwell 型の定理が成り立つことなどが分かっている. また, 正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ において $\sigma^2$ が既知の場合に, Mohammadi [M03] は最良位置共変推定量の導出方法について論じた.

本論では, 一般の位置尺度母数分布モデルにおいて, 2 乗損失および LINEX 損失のもとで位置尺度共変推定について論じる. まず, 第 3 節, 第 4 節において 2 乗損失における最良位置共変推定量, 最良位置尺度共変推定量について紹介し, そして, 非対称で非有界な LINEX 損失関数のもとで最良位置共変推定量, 最良位置尺度共変推定量の導出方法について述べ, その具体例として正規分布, 一様分布を挙げる. また第 5 節においては [M03] に従って, 非対称で有界な LINEX 損失関数のもとで既知の分散を持つ正規分布の場合に, 最良位置尺度共変推定量の導出方法を紹介し, 第 6 節において, 未知の分散を持つ正規分布の場合に最良位置尺度共変推定量の導出を行う.

## 2　設定

本論では, 位置尺度母数推定問題において, Lehmann and Casella([LC98]) の第 3 章, [M03] と同様の方法によって**共変推定量** (equivariant estimator) 全体のクラスの中で最もリスクが小さくなる推定量を考える.

まず, $X_1,\cdots,X_n$ を互いに独立にいずれも確率密度関数 (probability density function, 略して p.d.f.)

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma}g\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\qquad(x\in\boldsymbol{R}^1,\mu\in\boldsymbol{R}^1,\sigma\in\boldsymbol{R}^+:=(0,\infty))\tag{2.1}$$

に従う確率変数とする. このような p.d.f. を持つ分布を**位置尺度母数分布**といい, $\mu$ を**位置母数** (location parameter), $\sigma$ を**尺度母数** (scale parameter) という.

**定義**　推定量 $\tilde{\xi}(X_1,\cdots,X_n)$, $\tilde{\mu}(X_1,\cdots,X_n)$, $\tilde{\sigma}(X_1,\cdots,X_n)$, $\tilde{\psi}(X_1,\cdots,X_n)$ が任意の $\mu\in\boldsymbol{R}$ と任意の $\sigma>0$ に対して，

$$\begin{aligned}
\tilde{\xi}(\sigma x_1+\mu,\cdots,\sigma x_n+\mu)&=\sigma\,\tilde{\xi}(x_1,\cdots,x_n)+\mu,\\
\tilde{\mu}(\sigma x_1+\mu,\cdots,\sigma x_n+\mu)&=\tilde{\mu}(x_1,\cdots,x_n)+\mu,\\
\tilde{\sigma}(\sigma x_1+\mu,\cdots,\sigma x_n+\mu)&=\sigma\,\tilde{\sigma}(x_1,\cdots,x_n),\\
\tilde{\psi}(\sigma x_1+\mu,\cdots,\sigma x_n+\mu)&=\tilde{\psi}(x_1,\cdots,x_n)
\end{aligned}$$

という性質を満たしているとき，$\tilde{\xi}$, $\tilde{\mu}$, $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\psi}$ をそれぞれ**位置尺度共変推定量**, **位置共変推定量**, **尺度共変推定量**, **不変推定量**という．また，統計量 $\tilde{\kappa}(X_1,\cdots,X_n)$ の分布が母数 $(\mu,\sigma)$ に無関係であるとき，$\tilde{\kappa}$ を**補助統計量**という．

**補題 2.1**　$\boldsymbol{Y}:=(Y_1,\cdots,Y_{n-1}):=(X_1-X_n,\cdots,X_{n-1}-X_n)$ の分布は $\mu$ に依存しない．また，$Z_i(\boldsymbol{X}):=(X_i-\bar{X})/S\ (i=1,\cdots,n)$ として

$$\boldsymbol{Z}=\big(Z_1(\boldsymbol{X}),\cdots,Z_n(\boldsymbol{X})\big)\tag{2.2}$$

の分布は $\mu$, $\sigma$ に依存しない．ただし，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{X}&:=(X_1,\cdots,X_n),\\
S&:=\sqrt{S^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}
\end{aligned}\tag{2.3}$$

とする．

**証明**　まず，確率変数 $X_1,\cdots,X_n$ が互いに独立に，いずれも p.d.f. (2.1) を持つ分布に従うから，$\boldsymbol{Y}$ の累積分布関数 (cumulative distribution function, 略して c.d.f.) は

$$\begin{aligned}
F_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y};\mu,\sigma)&=P_{\boldsymbol{X}}^{\mu,\sigma}(\boldsymbol{Y}\le\boldsymbol{y})\\
&=P_{\boldsymbol{X}}^{\mu,\sigma}\big((X_1-X_n,\cdots,X_{n-1}-X_n)\le\boldsymbol{y}\big)\\
&=P_{\boldsymbol{X}}^{\mu,\sigma}\Big\{\Big((X_1-\mu)-(X_n-\mu),\cdots,(X_{n-1}-\mu)-(X_n-\mu)\Big)\le\boldsymbol{y}\Big\}
\end{aligned}\tag{2.4}$$

と表わせる．ただし，$\boldsymbol{Y}:=(Y_1,\cdots,Y_{n-1})$, $\boldsymbol{y}:=(y_1,\cdots,y_{n-1})$ とする．また $W_i:=X_i-\mu\ (i=1,\cdots,n)$, $\boldsymbol{W}:=(W_1,\cdots,W_n)$ とすると，(2.4) より

$$F_{\boldsymbol{Y}}^{\sigma}(\boldsymbol{y})=P_{\boldsymbol{W}}\Big((W_1-W_n,\cdots,W_{n-1}-W_n)\le\boldsymbol{y}\Big)$$

となり，$\boldsymbol{Y}$ の分布は $\mu$ には依存しない．

次に，$\boldsymbol{Z}$ の c.d.f. は

$$\begin{aligned}
F_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z};\mu,\sigma)&=P_{\boldsymbol{Z}}^{\mu,\sigma}\{\boldsymbol{Z}\le\boldsymbol{z}\}\\
&=P_{\boldsymbol{Z}}^{\mu,\sigma}\{Z_1\le z_1,\cdots,Z_n\le z_n\}\\
&=P_{\boldsymbol{X}}^{\mu,\sigma}\left\{\frac{X_1-\bar{X}}{S}\le z_1,\cdots,\frac{X_n-\bar{X}}{S}\le z_n\right\}
\end{aligned}$$

$$= P_{\boldsymbol{X}}^{\mu,\sigma}\left\{\frac{(X_1-\mu)/\sigma-(\bar{X}-\mu)/\sigma}{(1/\sigma)S}\le z_1,\cdots,\frac{(X_n-\mu)/\sigma-(\bar{X}-\mu)/\sigma}{(1/\sigma)S}\le z_n\right\}$$

$$= P_{\boldsymbol{X}}^{\mu,\sigma}\left\{\frac{(X_1-\mu)/\sigma-(\bar{X}-\mu)/\sigma}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2}}\le z_1,\cdots,\frac{(X_n-\mu)/\sigma-(\bar{X}-\mu)/\sigma}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2}}\le z_n\right\}$$

$$= P_{\boldsymbol{X}}^{\mu,\sigma}\left\{\frac{(X_1-\mu)/\sigma-(\bar{X}-\mu)/\sigma}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{X_i-\mu}{\sigma}-(1/n)\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{X_j-\mu}{\sigma}\right)\right\}^2}}\le z_1,\right.$$
$$\left.\cdots,\frac{(X_n-\mu)/\sigma-(\bar{X}-\mu)/\sigma}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{X_i-\mu}{\sigma}-(1/n)\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{X_j-\mu}{\sigma}\right)\right\}^2}}\le z_n\right\} \tag{2.5}$$

となる．ただし, $\boldsymbol{z} := (z_1,\cdots,z_n)$ とする．ここで $W_i' := (X_i-\mu)/\sigma\ (i=1,\cdots,n)$ とし, $\boldsymbol{W}' := (W_1',\cdots,W_n')$ とおくと $\boldsymbol{W}'$ は $\mu$, $\sigma$ に依存しない分布に従う．よって, (2.5) より

$$F_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z}) = P_{\boldsymbol{W}'}^{0,1}\left\{\frac{W_1'-(1/n)\sum_{s=1}^{n}W_s'}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left\{W_i'-(1/n)\sum_{j=1}^{n}(W_j')\right\}^2}}\le z_1,\right.$$
$$\left.\cdots,\frac{W_n'-(1/n)\sum_{s=1}^{n}W_s'}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left\{W_i'-(1/n)\sum_{j=1}^{n}(W_j')\right\}^2}}\le z_n\right\}$$

となり, $\boldsymbol{Z}$ の分布は $\mu$, $\sigma$ に依存せず, 補助統計量になる．□

次に, Lehmann and Casella([LC98]) の第3章, Takeuchi[T03] と同様の方法によって, 次の定理2.1, 定理2.2は得られる ([OA04]).

**定理 2.1**　$\tilde{\mu}_0(\boldsymbol{X})$ を任意の位置共変推定量とすると, $\tilde{\mu}(\boldsymbol{X})$ は,

$$\tilde{\mu}(\boldsymbol{X}) = \tilde{\mu}_0(\boldsymbol{X}) + \tilde{\psi}(\boldsymbol{X})$$

という形に表わされるときのみ位置共変推定量である．ただし, $\tilde{\psi}(\boldsymbol{X})$ は不変推定量とし, $\boldsymbol{X} := (X_1,\cdots,X_n)$ とする．

**定理 2.2**　$\tilde{\mu}_0(\boldsymbol{X})$, $\tilde{\sigma}_0(\boldsymbol{X})$ をそれぞれ任意の位置尺度共変推定量, 尺度共変推定量とすると, $\tilde{\mu}(\boldsymbol{X})$ は,

$$\tilde{\mu}(\boldsymbol{X}) = \tilde{\mu}_0(\boldsymbol{X}) - \tilde{\psi}(\boldsymbol{X})\tilde{\sigma}_0(\boldsymbol{X})$$

という形に表わされるときのみ位置尺度共変推定量である．ただし, $\tilde{\psi}(\boldsymbol{X})$ は不変推定量とする．

# 3　2乗損失およびLINEX損失のもとでの最良位置共変推定量

$X_1,\cdots,X_n$ をたがいに独立にいずれも p.d.f. $f(x-\mu)$ を持つ分布に従う確率変数とする．ただし, 位置母数 $\mu$ は未知とする．このとき, $l(\cdot)$ を非負値関数として, $d$ の損失関数

$L(\mu,d)=l(d-\mu)$ の下で, $\delta_0$ を任意の位置共変推定量とすれば, $\mu$ のすべての位置共変推定量 $\delta$ の族は, 定理 2.1 より

$$\delta(\boldsymbol{X})=\delta_0(\boldsymbol{X})+v(\boldsymbol{Y}) \tag{3.1}$$

の形で与えられる. ただし, $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_n)$ とし, $\delta_0(\boldsymbol{X})$ は任意の位置共変推定量とし, $v(\boldsymbol{Y})$ は不変推定量とする. ここで, $\boldsymbol{Y}:=(Y_1,\cdots,Y_{n-1})$ は, 補題 2.1 より補助統計量である. いま, 位置共変推定量 $\delta$ のリスクを平均損失

$$R(\mu,\delta):=E_\mu\big[l(\delta-\mu)\big]$$

で定義し, 位置共変推定量のクラスの中でリスクを最小にする推定量を最良位置共変推定量という. このとき, $\delta$ のリスクは

$$\begin{aligned}R(\mu,\delta)&=E_\mu\Big[l\big(\delta_0(\boldsymbol{X})+v(\boldsymbol{Y})-\mu\big)\Big]\\&=E_{\mu=0}\Big[l\big(\delta_0(\boldsymbol{X})+v(\boldsymbol{Y})\big)\Big]\\&=E_{\mu=0}\Big[E_{\mu=0}\big[l\big(\delta_0(\boldsymbol{X})+v(\boldsymbol{Y})\big)\big|\boldsymbol{Y}\big]\Big]\end{aligned}$$

となるから,

$$h(v):=E_{\mu=0}\big[l\big(\delta_0(\boldsymbol{X})+v(\boldsymbol{Y})\big)\big|\boldsymbol{Y}\big] \tag{3.2}$$

を最小にする $v$ を求めれば, $\mu$ の最良位置共変推定量を得ることができる.

通常, 母数推定問題においては, 損失関数として 2 乗損失

$$L(\mu,d)=(d-\mu)^2$$

を用いることが多い. 2 乗損失における最良位置共変推定量, すなわち位置共変推定量全体のクラスの中でリスクを最小にする推定量は次のように求められる ([LC98]).

**定理 3.1**　2 乗損失の下で, 最良位置共変推定量 $\tilde{\mu}(\boldsymbol{X})$ は

$$\tilde{\mu}(\boldsymbol{X})=\tilde{\mu_0}(\boldsymbol{X})-E_{\mu=0}[\tilde{\mu_0}(\boldsymbol{X})|\boldsymbol{Y}]$$

である. ただし, $\tilde{\mu_0}(\boldsymbol{X})$ を任意の位置共変推定量とし, $\boldsymbol{Y}=(X_1-X_n,\cdots,X_{n-1}-X_n)$ とする.

**証明**　補題 2.1 の $\boldsymbol{Y}$ の関数として $\tilde{\psi}(\boldsymbol{Y})$ を考えると, これは不変推定量になる. そこで, 定理 2.1 より $\tilde{\mu_0}(\boldsymbol{X})+\tilde{\psi}(\boldsymbol{Y})$ が位置共変推定量になるから, (3.2) より $h(v)$ を最小にする $v$ を求めればよい. よって

$$\begin{aligned}h(v)&=E_{\mu=0}\big[l\big(\tilde{\mu_0}(\boldsymbol{X})+\tilde{\psi}(\boldsymbol{Y})\big)\big|\boldsymbol{Y}\big]\\&=E_{\mu=0}\left[\Big(\tilde{\mu_0}(\boldsymbol{X})+\tilde{\psi}(\boldsymbol{Y})\Big)^2\Big|\boldsymbol{Y}\right]\\&=E_{\mu=0}\big[\tilde{\mu_0}^2|\boldsymbol{Y}\big]+2\tilde{\psi}E_{\mu=0}\big[\tilde{\mu_0}|\boldsymbol{Y}\big]+\tilde{\psi}^2\\&=\Big(\tilde{\psi}+E_{\mu=0}\big[\tilde{\mu_0}|\boldsymbol{Y}\big]\Big)^2+E_{\mu=0}\big[\tilde{\mu_0}^2|\boldsymbol{Y}\big]-\Big(E_{\mu=0}\big[\tilde{\mu_0}|\boldsymbol{Y}\big]\Big)^2\end{aligned}$$

となるから, リスクは

$$\tilde{\psi} = -E_{\mu=0}\left[\tilde{\mu_0}|\boldsymbol{Y}\right]$$

となるとき最小になる. ゆえに, 最良位置共変推定量は

$$\tilde{\mu}(\boldsymbol{X}) = \tilde{\mu_0}(\boldsymbol{X}) - E_{\mu=0}[\tilde{\mu_0}(\boldsymbol{X})|\boldsymbol{Y}]$$

となる. □

次に, 2乗損失でない場合について考える. いま, $X_1, \cdots, X_n$ をたがいに独立に, いずれも正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとし, 位置母数 $\mu$ は未知, 尺度母数 $\sigma$ は既知とする. このとき, 位置共変推定量として $\delta_0(\boldsymbol{X}) = \bar{X} := (1/n)\sum_{i=1}^n X_i$ をとると, $\bar{X}$ は完備十分統計量であるから Basu の定理から, $\bar{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ は独立になる. また, 損失関数として線形指数 (LINEX) 損失関数

$$L(\mu, d) = b\left[\exp\{a(d-\mu)\} - a(d-\mu) - 1\right] \qquad a \neq 0, b > 0 \tag{3.3}$$

を考えると, $\mu$ の位置共変推定量は $\delta(\boldsymbol{X}) = \delta_0(\boldsymbol{X}) - v(\boldsymbol{Y}) = \bar{X} - v(\boldsymbol{Y})$ になる. ここで, $L(0, d)$ は $d$ の非対称関数であることに注意 (図1参照).

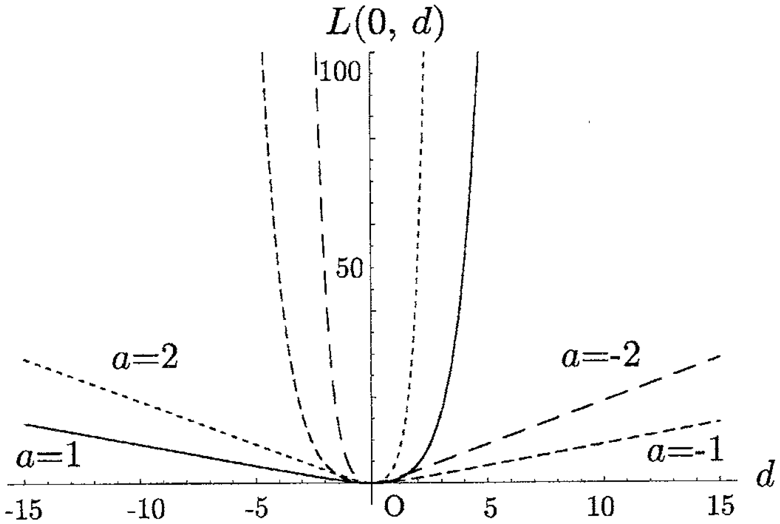


**図 1.** LINEX 損失関数 $L(0, d) = e^{ad} - ad - 1$ のグラフ $(b = 1)$

このとき, (3.2), (3.3) より

$$\begin{aligned}
h(v) &:= E_{\mu=0}\left[L(0,\delta)\middle|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y}\right] \\
&= E_{\mu=0}\left[b\Big\{\exp\{a\,\delta(\boldsymbol{X})\} - a\,\delta(\boldsymbol{X}) - 1\Big\}\middle|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y}\right] \\
&= b\int_{-\infty}^{\infty}\left[\exp\Big\{a\big(\bar{x}+v(\boldsymbol{y})\big)\Big\} - a\big(\bar{x}+v(\boldsymbol{y})\big) - 1\right]\sqrt{\frac{n}{2\pi\sigma^2}}\exp\Big(-\frac{n\bar{x}^2}{2\sigma^2}\Big)d\bar{x} \\
&= b\sqrt{\frac{n}{2\pi\sigma^2}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{av}\exp\Big(a\bar{x} - \frac{n\bar{x}^2}{2\sigma^2}\Big)d\bar{x} - a\int_{-\infty}^{\infty}\bar{x}\exp\Big(-\frac{n\bar{x}^2}{2\sigma^2}\Big)d\bar{x}\right. \\
&\qquad \left. - av\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{n\bar{x}^2}{2\sigma^2}\Big)d\bar{x} - \int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{n\bar{x}^2}{2\sigma^2}\Big)d\bar{x}\right\} \\
&= b\sqrt{\frac{n}{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{av}\exp\Big(a\bar{x} - \frac{n\bar{x}^2}{2\sigma^2}\Big)d\bar{x} - abv - b
\end{aligned}$$

$$= b\exp\left(av + \frac{a^2\sigma^2}{2n}\right)\sqrt{\frac{n}{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}\left(\bar{x} - \frac{a\sigma^2}{n}\right)^2\right\}d\bar{x} - abv - b$$
$$= b\left[\exp\left\{a\left(v + \frac{a\sigma^2}{2n}\right)\right\} - av - 1\right]$$

になる．このとき

$$\frac{\partial}{\partial v}h(v) = ab\ \left[\exp\left\{a\left(v + \frac{a\sigma^2}{2n}\right)\right\} - 1\right],$$
$$\frac{\partial^2}{\partial^2 v}h(v) = a^2 b\ \exp\left\{a\left(v + \frac{a\sigma^2}{2n}\right)\right\} > 0$$

となるから，$(\partial/\partial v)h(v) = 0$ の解 $v = v^*$ はリスク $R(\mu, \delta)$ を最小にし，これは

$$v^* = -\frac{a\sigma^2}{2n}$$

になる．したがって，(3.1) より LINEX 損失関数のもとで，$\mu$ の最良位置共変推定量は

$$\delta^*(\boldsymbol{X}) = \bar{X} - \frac{a\sigma^2}{2n}$$

になる．ここで，$\delta^*$ は $\bar{X}$ を LINEX 損失関数の非対称性の度合を与える $a$ に依る補正推定量と考えられる．なお，Zellner[Z86] は，事後正規分布を用いて，Bayes 的にこの推定量を得ている．

## 4　2乗損失および LINEX 損失のもとでの最良位置尺度共変推定量

本節において，位置母数 $\mu$，尺度母数 $\sigma$ がともに未知のときに，位置尺度共変推定量全体のクラスの中で，リスクを最小にする位置母数 $\mu$ の推定量，すなわち最良位置尺度共変推定量を求める．いま，損失関数を

$$L(\mu, d) = l\left(\frac{d - \mu}{\sigma}\right)$$

の形とする．ここで，それぞれ (2.2), (2.3) の $\boldsymbol{Z}$, $S = S(\boldsymbol{X})$ を用いて考える．ただし，$\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ とする．このとき，$\boldsymbol{Z}$ は不変推定量になり，また，補題 2.1 より補助統計量にもなる．そして $S = S(\boldsymbol{X})$ は尺度共変推定量になる．ここで，$\delta_0(\boldsymbol{X})$ を任意の位置尺度共変推定量とすると，定理 2.2 より $\delta(\boldsymbol{X})$ は

$$\delta(\boldsymbol{X}) = \delta_0(\boldsymbol{X}) - v(\boldsymbol{Z})S(\boldsymbol{X}) \tag{4.1}$$

の形で表されるときのみ位置尺度共変推定量になる．ただし，$v(\boldsymbol{Z})$ は不変推定量とする．いま，$\delta$ のリスクを

$$R(\mu, \delta) := E_{\mu,\sigma}\left[l\left(\frac{\delta(\boldsymbol{X}) - \mu}{\sigma}\right)\right]$$

によって定義すれば

$$
\begin{aligned}
R(\mu,\delta) &= E_{\mu,\sigma}\left[l\left(\frac{\delta(\boldsymbol{X})-\mu}{\sigma}\right)\right] \\
&= E_{\mu,\sigma}\left[l\left(\frac{\delta_0(\boldsymbol{X})-\mu}{\sigma}-\frac{S(\boldsymbol{X})\,v(\boldsymbol{Z})}{\sigma}\right)\right] \\
&= E_{\mu,\sigma}\Bigg[l\Bigg(\delta_0\Big(\frac{X_1-\mu}{\sigma},\cdots,\frac{X_n-\mu}{\sigma}\Big)-S\Big(\frac{X_1-\mu}{\sigma},\cdots,\frac{X_n-\mu}{\sigma}\Big) \\
&\qquad \cdot v\Bigg(\Big(Z_1\Big(\frac{X_1-\mu}{\sigma},\cdots,\frac{X_n-\mu}{\sigma}\Big),\cdots,Z_n\Big(\frac{X_n-\mu}{\sigma},\cdots,\frac{X_n-\mu}{\sigma}\Big)\Big)\Bigg)\Bigg)\Bigg] \\
&= E_{\mu=0,\sigma=1}\Big[l\Big(\delta_0(\boldsymbol{X})-v(\boldsymbol{Z})S(\boldsymbol{X})\Big)\Big] \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

になる. いま, 損失関数として 2 乗損失

$$
L(\mu,d)=\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right)^2
$$

を考える. このとき, 最良位置尺度共変推定量, すなわち位置尺度共変推定量全体のクラスの中でリスクを最小にする推定量は次のように求められる ([OA04]).

**定理 4.1**　2 乗損失の下で, 最良位置尺度共変推定量 $\tilde{\mu}(\boldsymbol{X})$ は

$$
\tilde{\mu}(\boldsymbol{X})=\tilde{\mu_0}(\boldsymbol{X})-\frac{E_{\mu=0,\sigma=1}\left[\tilde{\mu_0}(\boldsymbol{X})\tilde{\sigma_0}(\boldsymbol{X})|\boldsymbol{Z}\right]}{E_{\mu=0,\sigma=1}\left[\left(\tilde{\sigma_0}(\boldsymbol{X})\right)^2|\boldsymbol{Z}\right]}\tilde{\sigma_0}(\boldsymbol{X})
$$

である. ただし, $\tilde{\mu_0}(\boldsymbol{X})$, $\tilde{\sigma_0}(\boldsymbol{X})$ をそれぞれ任意の位置尺度共変推定量, 尺度共変推定量とし, $\boldsymbol{Z}$ は (2.2) で与えられたものとする.

**証明**　まず, 定理 2.2 より, 位置尺度共変推定量 $\tilde{\mu}(\boldsymbol{X})$ は $\tilde{\mu_0}(\boldsymbol{X})-\tilde{\psi}(\boldsymbol{X})\tilde{\sigma_0}(\boldsymbol{X})$ の形で表わされる. ただし, $\tilde{\psi}(\boldsymbol{X})$ は不変推定量とする. このとき, (2.2) の $\boldsymbol{Z}$ の関数として $\tilde{\psi}(\boldsymbol{Z})$ を考えると, これは不変推定量になる. また,

$$
\begin{aligned}
R(\mu,\tilde{\mu}) &= E_{\mu,\sigma}[L(\mu,\tilde{\mu})] \\
&= E_{\mu,\sigma}\left[\left(\frac{\tilde{\mu}(\boldsymbol{X})-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \\
&= E_{\mu,\sigma}\left[\left(\frac{\tilde{\mu_0}(\boldsymbol{X})-\mu}{\sigma}-\frac{\tilde{\psi}(\boldsymbol{Z})\tilde{\sigma_0}(\boldsymbol{X})}{\sigma}\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= E_{\mu,\sigma}\Bigg[\Bigg\{\tilde{\mu_0}\Big(\frac{X_1-\mu}{\sigma},\cdots,\frac{X_n-\mu}{\sigma}\Big) \\
&\quad -\tilde{\psi}\bigg(\Big(Z_1\Big(\frac{X_1-\mu}{\sigma},\cdots,\frac{X_n-\mu}{\sigma}\Big),\cdots,Z_n\Big(\frac{X_n-\mu}{\sigma},\cdots,\frac{X_n-\mu}{\sigma}\Big)\Big)\bigg) \\
&\quad \cdot\tilde{\sigma_0}\Big(\frac{X_1-\mu}{\sigma},\cdots,\frac{X_n-\mu}{\sigma}\Big)\Bigg\}^2\Bigg] \\
&= E_{\mu=0,\sigma=1}\Big[\Big\{\tilde{\mu_0}(\boldsymbol{X})-\tilde{\psi}(\boldsymbol{Z})\tilde{\sigma_0}(\boldsymbol{X})\Big\}^2\Big] \\
&= E_{\mu=0,\sigma=1}\Big[E_{\mu=0,\sigma=1}\Big[\Big\{\tilde{\mu_0}(\boldsymbol{X})-\tilde{\psi}(\boldsymbol{Z})\tilde{\sigma_0}(\boldsymbol{X})\Big\}^2\Big|\boldsymbol{Z}\Big]\Big]
\end{aligned}
$$

となる. このリスクの被積分関数について, $\tilde{\psi}$ の関数としてみれば,

$$
\begin{aligned}
&E_{\mu=0,\sigma=1}\Big[\Big\{\tilde{\mu_0}(\boldsymbol{X})-\tilde{\psi}(\boldsymbol{Z})\tilde{\sigma_0}(\boldsymbol{X})\Big\}^2\Big|\boldsymbol{Z}\Big] \\
&= E_{\mu=0,\sigma=1}[\tilde{\mu_0}^2|\boldsymbol{Z}]-2\tilde{\psi}E_{\mu=0,\sigma=1}[\tilde{\mu_0}\tilde{\sigma_0}|\boldsymbol{Z}]+\tilde{\psi}^2E_{\mu=0,\sigma=1}[\tilde{\sigma_0}^2|\boldsymbol{Z}] \\
&= E_{\mu=0,\sigma=1}[\tilde{\sigma_0}^2|\boldsymbol{Z}]\left\{\tilde{\psi}-\frac{E_{\mu=0,\sigma=1}[\tilde{\mu_0}\tilde{\sigma_0}|\boldsymbol{Z}]}{E_{\mu=0,\sigma=1}[\tilde{\sigma_0}^2|\boldsymbol{Z}]}\right\}^2 \\
&\quad -\frac{(E_{\mu=0,\sigma=1}[\tilde{\mu_0}\tilde{\sigma_0}|\boldsymbol{Z}])^2}{E_{\mu=0,\sigma=1}[\tilde{\sigma_0}^2|\boldsymbol{Z}]}+E_{\mu=0,\sigma=1}[\tilde{\mu_0}^2|\boldsymbol{Z}]
\end{aligned}
$$

となるので, リスクは

$$
\tilde{\psi}=\frac{E_{\mu=0,\sigma=1}[\tilde{\mu_0}\tilde{\sigma_0}|\boldsymbol{Z}]}{E_{\mu=0,\sigma=1}[\tilde{\sigma_0}^2|\boldsymbol{Z}]}
$$

となるとき最小になる. よって, 最良位置尺度共変推定量は

$$
\tilde{\mu}(\boldsymbol{X})=\tilde{\mu_0}(\boldsymbol{X})-\frac{E_{\mu=0,\sigma=1}\big[\tilde{\mu_0}(\boldsymbol{X})\tilde{\sigma_0}(\boldsymbol{X})|\boldsymbol{Z}\big]}{E_{\mu=0,\sigma=1}\big[\big(\tilde{\sigma_0}(\boldsymbol{X})\big)^2|\boldsymbol{Z}\big]}\tilde{\sigma_0}(\boldsymbol{X})
$$

となる. □

例えば, $X_1,\cdots,X_n$ を互いに独立にいずれも正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従う確率変数とすれば, 2 乗損失のもとでは $\bar{X}:=(1/n)\sum_{i=1}^n X_i$ が最良位置尺度共変推定量になることは知られている.

次に, LINEX 損失が

$$
L(\mu,d)=b\left[\exp\left\{a\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right)\right\}-a\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right)-1\right] \qquad (a\neq 0\ ,b>0) \tag{4.3}
$$

の場合を考える. まず, 不変推定量, 尺度共変推定量をそれぞれ (2.2), (2.3) で与えられた $\boldsymbol{Z}$, $S$ とする. このとき, (3.2), (3.3) より $\delta$ のリスクは

$$
R(\mu,\delta)=E_{\mu=0,\sigma=1}\Big[l\Big(\delta_0(\boldsymbol{X})-v(\boldsymbol{Z})\Big)S(\boldsymbol{X})\Big)\Big]
$$

$$
\begin{aligned}
&= bE_{\mu=0,\sigma=1}\Big[\exp\Big\{a\Big(\delta_0 - v(\boldsymbol{Z})S\Big)\Big\} - a\Big\{\delta_0 - v(\boldsymbol{Z})S\Big\} - 1\Big] \\
&= bE_{\mu=0,\sigma=1}\Big[E_{\mu=0,\sigma=1}\Big[\exp\Big\{a\Big(\delta_0 - v(\boldsymbol{Z})S\Big)\Big\} - a\Big\{\delta_0 - v(\boldsymbol{Z})S\Big\} - 1\ \Big|\boldsymbol{Z}\Big]\Big] \\
&= bE_{\mu=0,\sigma=1}\Big[E_{\mu=0,\sigma=1}\Big[\exp\Big\{a\Big(\delta_0 - v(\boldsymbol{Z})S\Big)\Big\}\Big|\boldsymbol{Z}\Big] - aE_{\mu=0,\sigma=1}\Big[\delta_0\Big|\boldsymbol{Z}\Big] \\
&\quad + av(\boldsymbol{Z})E_{\mu=0,\sigma=1}\big[S|\boldsymbol{Z}\big]\Big] - b
\end{aligned}
$$

になるから, これを最小にする $v$ を求めるためには, 各 $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{z}$ について

$$
g(v) := E_{\mu=0,\sigma=1}\Big[\exp\Big\{a\Big(\delta_0 - v(\boldsymbol{z})S\Big)\Big\}\Big|\boldsymbol{z}\Big] + avE_{\mu=0,\sigma=1}\big[S|\boldsymbol{z}\big] \tag{4.4}
$$

を最小にする $v$ を求めればよい.

**例 4.1(正規分布)** $X_1, \cdots, X_n$ をたがいに独立に, いずれも正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとする. ただし, 位置母数 $\mu$, 尺度母数 $\sigma$ は未知とする. いま, 位置尺度共変推定量として

$$
\delta_0(\boldsymbol{X}) = \bar{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i
$$

を考える. このとき, $(\bar{X}, S)$ は完備十分統計量であるから, Basu の定理より, $(\bar{X}, S)$ は $\boldsymbol{Z}$ と独立である. また, $\bar{X}$ と $S$ は独立であるから, (4.4) より

$$
g(v) = E_{\mu=0,\sigma=1}\big(e^{a\bar{X}}\big)E_{\mu=0,\sigma=1}\big(e^{-avS}\big) + avE_{\mu=0,\sigma=1}\big(S\big) \tag{4.5}
$$

になる. ここで

$$
E_{\mu=0,\sigma=1}\big(e^{a\bar{X}}\big) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{a\bar{x}}\sqrt{\frac{n}{2\pi}}e^{-n\bar{x}^2/2}d\bar{x} = e^{a^2/(2n)}
$$

になる. また, $Y := S^2/\sigma^2$ は自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布 ($\chi^2_{n-1}$ 分布) に従うから $S$ の p.d.f. は

$$
f_S(s) = K_n\sigma^{1-n}s^{n-2}e^{-s^2/2\sigma^2} \qquad (s > 0) \tag{4.6}
$$

となる. ただし,

$$
K_n := \frac{1}{2^{(n-3)/2}\Gamma\big((n-1)/2\big)}
$$

とする. このとき, $m := E_{\mu=0,\sigma=1}(S)$ とおくと (4.5) より

$$
g(v) = e^{a^2/(2n)}\int_0^{\infty} e^{-avs}K_n s^{n-2}e^{-s^2/2}ds + amv
$$

となる. 次に, $g(v)$ が $s$ に関する積分記号下で $v$ について微分可能であることを示す. まず, $v_0 \in (\alpha, \beta) \subset \boldsymbol{R}$ とし, $g(v_0)$ が $v_0$ での近傍で微分可能であることを示す. このとき,

$$
g(v_0) = e^{a^2/(2n)}\int_0^{\infty} e^{-av_0 s}K_n s^{n-2}e^{-s^2/2}ds + amv_0 \tag{4.7}
$$

であり，いま，$\alpha < v_0 < \beta$ であるから，$s > 0$ について

$$-av_0 s < s \max\{-a\alpha, -a\beta\} \tag{4.8}$$

となる．ここで，$l := \max\{-a\alpha, -a\beta\}$ とおく．このとき，

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial v_0}\left(e^{-av_0 s}s^{n-2}e^{-s^2/2}\right)\right| &= |a|\ s^{n-1}\exp\left(-\frac{s^2}{2} - av_0 s\right)\\ &< |a|\ s^{n-1}\exp\left(-\frac{s^2}{2} + sl\right)\\ &= |a|\ e^{l^2/2}s^{n-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}(s-l)^2\right\}\end{aligned}$$

となる．また，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty s^{n-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}(s-l)^2\right\}ds &= \int_{-l}^\infty (t+l)^{n-1}e^{-t^2/2}dt\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}l^{n-1-k}\int_{-l}^\infty t^k e^{-t^2/2}dt \qquad (4.9)\end{aligned}$$

となる．さらに，$l > 0$ のとき，

$$\begin{aligned}\int_{-l}^\infty t^k e^{-t^2/2}dt &= \int_{-l}^0 t^k e^{-t^2/2}dt + \int_0^\infty t^k e^{-t^2/2}dt\\ &= (-1)^k 2^{(k-1)/2}\int_0^{l^2/2} u^{(k-1)/2}e^{-u}du + 2^{(k-1)/2}\int_0^\infty u^{(k-1)/2}e^{-u}du\\ &= (-1)^k 2^{(k-1)/2}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) + 2^{(k-1)/2}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) < \infty \qquad (4.10)\end{aligned}$$

となり，$l \leq 0$ のとき，

$$\begin{aligned}\int_{-l}^\infty t^k e^{-t^2/2}dt &\leq \int_0^\infty t^k e^{-t^2/2}dt\\ &= 2^{(k-1)/2}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) < \infty \qquad (4.11)\end{aligned}$$

となるので，(4.9), (4.10), (4.11) より (4.7) は $v_0 \in (\alpha, \beta)$ において $s$ に関する積分記号下で $v_0$ について微分可能である．したがって，すべての $v \in \boldsymbol{R}$ について $g(v)$ は $s$ に関する積分記号下で $v$ について微分可能であることがわかる．よって，

$$g'(v) = -ae^{a^2/(2n)}\int_0^\infty e^{-avs}K_n s^{n-2}e^{-s^2/2}ds + am$$

となる．また，同様にして $g'(v)$ が $s$ に関する積分記号下で $v$ について微分可能であることが示せて，任意の $v$ について

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2}g(v) = a^2 e^{a^2/(2n)}\int_0^\infty e^{-avs}K_n s^{n-2}e^{-s^2/2}ds > 0$$

となるので, $g'(v)=0$ となる $v=v^*$ で $g(v)$ は最小値をとる. よって, (4.1) より

$$\delta^*(\boldsymbol{X}) = \bar{X} - v^*(\boldsymbol{Z})S(\boldsymbol{X})$$

が最良位置尺度共変推定量となる. ここで, $v^*$ を解析的に解くことは難しいので, 数値計算を行うとその値は表1のようになる.

| $n \diagdown a$ | 0.05 | 0.25 | 0.5 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.0099 | 0.0450 | 0.1008 | 0.2065 | 0.4636 |
| 3 | 0.0053 | 0.0261 | 0.0524 | 0.1050 | 0.2210 |
| 4 | 0.0034 | 0.0165 | 0.0332 | 0.0671 | 0.1375 |
| 5 | 0.0021 | 0.0118 | 0.0235 | 0.0472 | 0.0960 |
| 10 | 0.0008 | 0.0041 | 0.0082 | 0.0155 | 0.0325 |
| 20 | 0.0002 | 0.0014 | 0.0028 | 0.0057 | 0.0118 |
| 30 | 0.0002 | 0.0007 | 0.0015 | 0.0031 | 0.0061 |

**表 1**. 正規分布 $N(0,1)$ の場合の $v^*$ の値

また, このときの $\delta^*$ のリスクと $\bar{X}$ のリスクを数値計算によって求めると次の表2, 表3のようになる. この表2, 表3から, $\delta^*$ は $\bar{X}$ を LINEX 損失関数の非対称性の度合を与える $a$ による補正推定量と考えられる.

| $n \diagdown a$ | 0.05 | 0.25 | 0.5 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.0625071 | 1.56702 | 6.32175 | 26.18659 | 121.81001 |
| 3 | 0.0416685 | 1.04283 | 4.18539 | 16.97070 | 71.82993 |
| 4 | 0.0312507 | 0.78171 | 3.13240 | 12.61941 | 51.97472 |
| 5 | 0.0250004 | 0.62523 | 2.50364 | 10.05861 | 40.95783 |
| 10 | 0.0125000 | 0.31253 | 1.25042 | 5.00699 | 20.10861 |
| 20 | 0.0062500 | 0.15625 | 0.62505 | 2.50081 | 10.01381 |
| 30 | 0.0041667 | 0.10417 | 0.41668 | 1.66692 | 6.67047 |

**表 2**. 正規分布 $N(0,1)$ の場合の $\delta^*$ のリスク ($\times 10^{-2}$, $b=1$)

| $n \diagdown a$ | 0.05 | 0.25 | 0.5 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.0625195 | 1.57477 | 6.44945 | 28.40250 | 171.82802 |
| 3 | 0.0416753 | 1.04711 | 4.25469 | 18.13600 | 94.77340 |
| 4 | 0.0312549 | 0.78431 | 3.17434 | 13.31481 | 64.87210 |
| 5 | 0.0250031 | 0.62696 | 2.53151 | 10.51712 | 49.18252 |
| 10 | 0.0125008 | 0.31299 | 1.25785 | 5.12711 | 22.14034 |
| 20 | 0.0062502 | 0.15637 | 0.62696 | 2.53151 | 10.51710 |
| 30 | 0.0041668 | 0.10422 | 0.41754 | 1.68063 | 6.89391 |

**表 3**. 正規分布 $N(0,1)$ の場合の $\bar{X}$ のリスク ($\times 10^{-2}$, $b=1$)

**例 4.2(一様分布)**　$X_1, \cdots, X_n$ をたがいに独立に, いずれも一様分布 $U(\mu-\sigma, \mu+\sigma)$ に従うとする. ただし, $n \geq 2$ とし, 位置母数 $\mu$, 尺度母数 $\sigma$ は未知とする. このとき, $X_i\ (i=1,\cdots,n)$ の p.d.f. は

$$
\begin{aligned}
f(x_i;\mu,\sigma) &= \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2\sigma} & (\frac{|x_i-\mu|}{\sigma} < 1), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

である. ここで

$$Z_{(i)} := \frac{X_{(i)} - X_{(1)}}{X_{(n)} - X_{(1)}} \qquad (i = 2, \cdots, n-1)$$

とすると,

$$\boldsymbol{Z} := (Z_{(2)}, \cdots, Z_{(n-1)})$$

は不変性を満たす. ただし, $X_{(1)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ は $\boldsymbol{X} := (X_1, \cdots, X_n)$ の順序統計量とする. また, 尺度共変推定量として範囲 $R := X_{(n)} - X_{(1)}$, 位置尺度共変推定量として $\delta_0(\boldsymbol{X}) = M := (X_{(1)} + X_{(n)})/2$ をとる. すると, (4.1) より位置尺度共変推定量は

$$\delta(\boldsymbol{X}) = M - v(\boldsymbol{Z})R \tag{4.12}$$

の形で表わされる. このとき, $(M,R)$ は完備十分統計量であるから, Basu の定理より $(M,R)$ は $\boldsymbol{Z}$ と独立である. したがって, (4.4) より

$$g(v) = E_{\mu=0,\sigma=1}\left[e^{a(M-vR)}\right] + avE_{\mu=0,\sigma=1}[R]$$

になる. ここで, $\mu=0, \sigma=1$ のもとで, $(M,R)$ の j.p.d.f. は

$$f_{M,R}(m,r) = \begin{cases} \frac{n(n-1)}{2^n} r^{n-2} & (-1+\frac{r}{2} \leq m \leq 1-\frac{r}{2},\ 0<r<2), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

になり, $R$ の周辺 (marginal(m.))p.d.f. は

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{n(n-1)}{2^n} r^{n-2}(2-r) & (0<r<2), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となり, $E_{\mu=0,\sigma=1}[R] = 2(n-1)/(n+1)$ になる ([A03] の例 A.5.6.2 参照). よって

$$g(v) = \frac{n(n-1)}{2^n} \int_0^2 r^{n-2} e^{-avr} \left\{ \int_{-1+(r/2)}^{1-(r/2)} e^{am} dm \right\} dr + \frac{2(n-1)av}{n+1} \tag{4.13}$$

となる. ここで, 例 1 と同様に, $g(v)$ が $r$ に関する積分記号下で $v$ について微分可能であることを示す. まず, $v_0 \in (\alpha, \beta) \subset \boldsymbol{R}$ とし, $g(v_0)$ が $v_0$ での近傍で微分可能であることを示す. いま,

$$g(v_0) = \frac{n(n-1)}{2^n} \int_0^2 r^{n-2} e^{-av_0 r} \left\{ \int_{-1+(r/2)}^{1-(r/2)} e^{am} dr \right\} dr + \frac{2(n-1)av_0}{n+1} \tag{4.14}$$

であり, (4.8) より,

$$\left|\frac{\partial}{\partial v_0}\left(r^{n-2}e^{-av_0r}\left\{e^{a\left(1-(r/2)\right)}-e^{a\left(-1+(r/2)\right)}\right\}\right)\right| = |a|\ r^{n-1}e^{-av_0r}\left\{e^{a\left(1-(r/2)\right)}-e^{a\left(-1+(r/2)\right)}\right\}$$

$$< |a|\ r^{n-1}e^{rl}\left\{e^{a\left(1-(r/2)\right)}-e^{a\left(-1+(r/2)\right)}\right\}$$

となる. また,

$$\int_0^2 r^{n-1}e^{rl}\left\{e^{a\left(1-(r/2)\right)}-e^{a\left(-1+(r/2)\right)}\right\}dr < \infty$$

となるので, (4.14) は $v_0 \in (\alpha, \beta)$ において $s$ に関する積分記号下で $v_0$ について微分可能である. したがって, すべての $v \in \boldsymbol{R}$ について $g(v)$ は $s$ に関する積分記号下で $v$ について微分可能であることがわかる. よって,

$$g'(v) = \frac{-n(n-1)}{2^n}\int_0^2 r^{n-1}e^{-avr}\left\{e^{a\left(1-(r/2)\right)}-e^{a\left(-1+(r/2)\right)}\right\}dr + \frac{2(n-1)a}{n+1} \tag{4.15}$$

となる. また, 同様にして $g'(v)$ が $s$ に関する積分記号下で $v$ について微分可能であることが示せて, 任意の $v$ について

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2}g(v) = \frac{an(n-1)}{2^n}\int_0^2 r^{n}e^{-avr}\left\{e^{a\left(1-(r/2)\right)}-e^{a\left(-1+(r/2)\right)}\right\}dr > 0$$

となるので, $g'(v) = 0$ となる $v$ で $g(v)$ は最小値をとる. このとき, (4.15) を満たす $v$ を $v^*$ とすれば, (4.12) より

$$\delta^*(\boldsymbol{X}) = M - v^*(\boldsymbol{Z})R$$

が最良位置尺度共変推定量となる. ここで, $v^*$ を解析的に解くことは難しいので, 数値計算を行うとその値は表 4 のようになる.

| $n \diagdown a$ | 0.05 | 0.25 | 0.5 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.00250 | 0.01252 | 0.02513 | 0.05104 | 0.10874 |
| 3 | 0.00139 | 0.00695 | 0.01393 | 0.02813 | 0.05846 |
| 4 | 0.00089 | 0.00447 | 0.00895 | 0.01802 | 0.03700 |
| 5 | 0.00063 | 0.00313 | 0.00626 | 0.01258 | 0.02567 |
| 10 | 0.00019 | 0.00096 | 0.00192 | 0.00386 | 0.00777 |
| 20 | 0.00005 | 0.00027 | 0.00054 | 0.00109 | 0.00218 |
| 30 | 0.00003 | 0.00013 | 0.00025 | 0.00051 | 0.00101 |

**表 4.** 一様分布 $U(-1,1)$ の場合の $v^*$ の値

また, このときの $\delta^*$ のリスクと $M$ のリスクを数値計算によって求めると次の表 5, 表 6 のようになる. この表 5, 表 6 から, $\delta^*$ は $M$ を LINEX 損失関数の非対称性の度合を与える $a$ による補正推定量と考えられる.

| $n \diagdown a$ | 0.05 | 0.25 | 0.5 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.208345 | 5.2159 | 20.9552 | 85.2988 | 365.7960 |
| 3 | 0.012501 | 3.1278 | 12.5456 | 50.7328 | 211.9800 |
| 4 | 0.083336 | 2.0847 | 8.3546 | 33.6754 | 138.8980 |
| 5 | 0.059322 | 1.4888 | 5.9638 | 23.9922 | 98.2018 |
| 10 | 0.018940 | 0.5416 | 1.8952 | 7.5973 | 30.6494 |
| 20 | 0.005411 | 0.1353 | 0.5412 | 2.1665 | 8.6898 |
| 30 | 0.002520 | 0.0630 | 0.2520 | 1.0085 | 4.0395 |

**表 5**. 一様分布 $N(0,1)$ の場合の $\delta^*$ のリスク ($\times 10^{-3}$, $b=1$)

| $n \diagdown a$ | 0.05 | 0.25 | 0.5 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.208351 | 5.2192 | 21.0077 | 86.1613 | 381.0980 |
| 3 | 0.012501 | 3.1297 | 12.5747 | 51.2072 | 220.0145 |
| 4 | 0.083336 | 2.0857 | 8.3706 | 33.9352 | 143.2940 |
| 5 | 0.059567 | 1.4894 | 5.9731 | 24.1432 | 100.7270 |
| 10 | 0.018940 | 0.5416 | 1.8983 | 7.6718 | 30.9803 |
| 20 | 0.005411 | 0.1353 | 0.5414 | 2.1684 | 8.7211 |
| 30 | 0.002520 | 0.0630 | 0.2521 | 1.0090 | 4.0467 |

**表 6**. 一様分布 $N(0,1)$ の場合の $M$ のリスク ($\times 10^{-3}$, $b=1$)

# 5 有界なLINEX損失のもとでの最良位置共変推定量

本節では, Mohammadi[M03] に従って, 損失関数が非対称で, 有界である場合として (4.3) の LINEX 損失関数とは異なる LINEX 損失関数として

$$L(\mu, d) = 1 - \exp\Big\{-\exp\big\{a\big(d-\mu\big)\big\} + a\big(d-\mu\big) + 1\Big\}, \quad a \neq 0 \tag{5.1}$$

をとり, 尺度母数 $\sigma$ を既知として位置母数 $\mu$ を推定する.

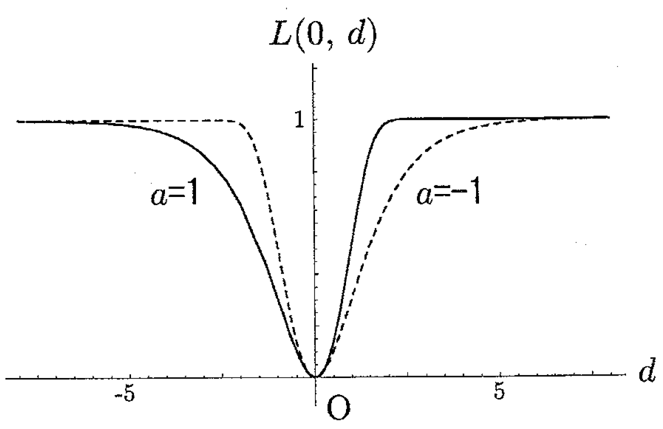


**図 2**. 非対称で有界な損失関数 (4.1) の $L(0,d)$ のグラフ

いま, $X_1, \cdots, X_n$ をたがいに独立に, いずれも正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとし, 位置共変推定量を $\delta_0(\mathbf{X}) := \bar{X}$ とする. このとき, (3.1), (3.2), (5.1) より

$$\begin{aligned} h(v) &:= E_{\mu=0}\big[L(0,\delta)\big|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y}\big] \\ &= E_{\mu=0}\Big[1-\exp\Big\{-\exp\big\{a\big(\bar{X}+v(\boldsymbol{y})\big)\big\}+a\big(\bar{X}+v(\boldsymbol{y})\big)+1\Big\}\Big|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y}\Big] \end{aligned} \tag{5.2}$$

となる. ここで, $\boldsymbol{Y} = (X_1 - X_n, \cdots, X_{n-1} - X_n)$ とすると, 尺度母数 $\sigma$ を既知としているので, 補題2.1 より $\boldsymbol{Y}$ は補助統計量である. このとき, 第1節より $h(v)$ を最小にする $v$ を求めればよい. $\bar{X}$ は完備十分統計量であるから, Basu の定理より $\bar{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ は互いに独立である. したがって, (5.2) は

$$h(v) = 1 - \sqrt{\frac{n}{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big\{-\exp\big\{a\big(\bar{x}+v\big)\big\}+a\big(\bar{x}+v\big)+1-\frac{n\bar{x}^2}{2\sigma^2}\Big\}d\bar{x} \tag{5.3}$$

となる. また,

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\partial}{\partial v}\Big(\exp\Big\{-\exp\big\{a\big(\bar{x}+v\big)\big\}+a\big(\bar{x}+v\big)+1-\frac{n\bar{x}^2}{2\sigma^2}\Big\}\Big)\right| \\ &\le |a|\ \exp\Big\{(2\log 2-1)-\frac{n\bar{x}^2}{2\sigma^2}\Big\}+|a|\exp\Big(-\frac{n\bar{x}^2}{2\sigma^2}\Big) \end{aligned}$$

となり,

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\exp\Big\{(2\log 2-1)-\frac{n\bar{x}^2}{2\sigma^2}\Big\}+\exp\Big(-\frac{n\bar{x}^2}{2\sigma^2}\Big)\Big]d\bar{x} \\ &= \sqrt{\frac{2\pi\sigma^2}{n}}\big(e^{2\log 2-1}+1\big) \end{aligned}$$

となるから, Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v}h(v) &= -\sqrt{\frac{n}{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}a\Big(1-e^{a(\bar{x}+v)}\Big)\exp\Big\{-\exp\big\{a\big(\bar{x}+v\big)\big\}+a\big(\bar{x}+v\big)+1-\frac{n\bar{x}^2}{2\sigma^2}\Big\}d\bar{x} \\ &= \sqrt{\frac{n}{2\pi\sigma^2}}\exp\Big\{1-\frac{nv^2}{2\sigma^2}\Big\}\mathrm{sgn}(a)\int_{-\infty}^{\infty}(e^u-1)\exp\Big\{-e^u+u\Big(1+\frac{nv}{a\sigma^2}\Big)-\frac{nu^2}{2a^2\sigma^2}\Big\}du \end{aligned}$$

となる. ただし, $\mathrm{sgn}(a) = 1(a > 0); = -1(a < 0)$ とする. ここで,

$$g_1(v) := \mathrm{sgn}(a)\int_{-\infty}^{\infty}(e^u-1)\exp\Big\{-e^u+u\Big(1+\frac{nv}{a\sigma^2}\Big)-\frac{nu^2}{2a^2\sigma^2}\Big\}du \tag{5.4}$$

とし, (5.4) の右辺の被積分関数を

$$f_1(v) := (e^u-1)\exp\Big\{-e^u+u\Big(1+\frac{nv}{a\sigma^2}\Big)-\frac{nu^2}{2a^2\sigma^2}\Big\} \tag{5.5}$$

とおく. すると

$$\frac{\partial}{\partial v}f_1(v) = (e^u-1)\Big(\frac{un}{a\sigma^2}\Big)\exp\Big\{-e^u+u\Big(1+\frac{nv}{a\sigma^2}\Big)-\frac{nu^2}{2a^2\sigma^2}\Big\}$$

となり, $a > 0$ のとき $(\partial/\partial v)f_1(v) > 0$ となり $f_1(v)$ は単調増加関数, $a < 0$ のとき $(\partial/\partial v)f_1(v) > 0$ となり $f_1(v)$ は単調増加関数となるから, $g_1(v)$ は単調増加関数になる. さらに,

$$\lim_{v\to\infty} g_1(v) = \infty, \lim_{v\to-\infty} g_1(v) = -\infty$$

となるから, $g_1(v) = 0$ となる点 $v$ が唯一つ存在する. この点を $v^*$ とすると, $v^* > v$ なる $v$ においては $(\partial/\partial v)h(v) < 0$, $v^* < v$ なる $v$ においては $(\partial/\partial v)h(v) > 0$ となるので $v = v^*$ のとき $h(v)$ は最小値をとる. よって $v = v^*$ のときリスクは最小になるから, (3.1) より $\delta^*(\boldsymbol{X}) = \bar{X} + v^*(\boldsymbol{Y})$ が最良位置共変推定量になる ([M03]). しかし, 解析的に $v^*$ を得ることは難しいので数値的にその値を表 7 で示す. また, このときの $\delta^*$ のリスクと $\bar{X}$ のリスクを数値計算によって求めると次の表 8, 表 9 のようになる. この表 8, 表 9 から, $\delta^*$ は $\bar{X}$ を LINEX 損失関数の非対称性の度合を与える $a$ による補正推定量と考えられる.

| $\sigma \diagdown a$ | 0.25 | 0.5 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| 0.25 | -0.0007 | -0.0031 | -0.0124 | -0.0488 |
| 0.5 | -0.0016 | -0.0062 | -0.0244 | -0.0907 |
| 1 | -0.0031 | -0.0122 | -0.0453 | -0.1408 |
| 2 | -0.0061 | -0.0227 | -0.0704 | -0.1519 |

**表 7.** $n = 10$ としたときの $v^*$ の値

| $\sigma \diagdown a$ | 0.25 | 0.5 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| 0.25 | 0.19526 | 0.78063 | 3.1152 | 12.3411 |
| 0.5 | 0.78041 | 3.11041 | 12.3407 | 47.3756 |
| 1 | 3.11310 | 12.28710 | 46.4771 | 158.9170 |
| 2 | 12.32420 | 46.98060 | 154.7090 | 368.9400 |

**表 8.** $n = 10$ としたときの $\delta^*$ のリスク $(\times 10^{-3})$

| $\sigma \diagdown a$ | 0.25 | 0.5 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| 0.25 | 0.19527 | 0.78064 | 3.1533 | 15.6835 |
| 0.5 | 0.78064 | 3.11519 | 12.3411 | 54.1475 |
| 1 | 3.11519 | 12.34110 | 47.3756 | 159.1770 |
| 2 | 12.34110 | 47.37560 | 159.1770 | 379.5180 |

**表 9.** $n = 10$ としたときの $\bar{X}$ のリスク $(\times 10^{-3})$

また,

$$\begin{aligned} & g_1(v) = 0 \\ \Leftrightarrow & \int_0^\infty \frac{1}{x}\exp\Big\{-x + \Big(2 + \frac{nv}{a\sigma^2}\Big)\log x - \frac{n(\log x)^2}{2a^2\sigma^2}\Big\}dx \\ & \quad - \int_0^\infty \frac{1}{x}\exp\Big\{-x + \Big(1 + \frac{nv}{a\sigma^2}\Big)\log x - \frac{n(\log x)^2}{2a^2\sigma^2}\Big\}dx = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \exp\Big\{av+\frac{3a^2\sigma^2}{2n}\Big\}\int_0^\infty \frac{1}{z}\exp\Big\{-\frac{n}{2a^2\sigma^2}\Big(\log z-\frac{2a^2\sigma^2}{n}\Big)^2-e^{av}z\Big\}dz$$
$$-\int_0^\infty \frac{1}{z}\exp\Big\{-\frac{n}{2a^2\sigma^2}\Big(\log z-\frac{a^2\sigma^2}{n}\Big)^2-e^{av}z\Big\}dz$$
$$=0 \tag{5.6}$$

となるから, (5.6) において

$$\frac{1}{z}\exp\Big\{-\frac{n}{2a^2\sigma^2}\Big(\log z-\frac{2a^2\sigma^2}{n}\Big)^2\Big\}\quad (z>0),$$
$$\frac{1}{z}\exp\Big\{-\frac{n}{2a^2\sigma^2}\Big(\log z-\frac{a^2\sigma^2}{n}\Big)^2\Big\}\quad (z>0)$$

がそれぞれ対数正規分布 (lognormal distribution) $LN(2a^2\sigma^2/n, a\sigma/\sqrt{n})$, $LN(a^2\sigma^2/n, a\sigma/\sqrt{n})$ の p.d.f. になっているので, $W_1 \sim LN(2a^2\sigma^2/n, a\sigma/\sqrt{n})$, $W_2 \sim LN(a^2\sigma^2/n, a\sigma/\sqrt{n})$ とおくと, (5.6) は

$$\exp\Big\{av+\frac{3a^2\sigma^2}{2n}\Big\}E[\exp\{-e^{av}W_1\}]-E[\exp\{-e^{av}W_2\}]=0 \tag{5.7}$$

と表わせる ([M03]).

# 6 有界な LINEX 損失のもとでの最良位置尺度共変推定量

本節では, 位置母数 $\mu$, 尺度母数 $\sigma$ はともに未知の場合について考える. 例 4.1 と同様に $X_1,\cdots,X_n$ をたがいに独立に, いずれも正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従う確率変数とし, 位置尺度共変推定量を $\delta_0(\mathbf{X}) := \bar{X}$ とする. 損失関数は,

$$L(\mu,d)=1-\exp\Big\{-\exp\Big\{a\Big(\frac{d-\mu}{\sigma}\Big)\Big\}+a\Big(\frac{d-\mu}{\sigma}\Big)+1\Big\},\quad a\neq 0 \tag{6.1}$$

とする. このとき, (4.1), (4.2) より

$$\begin{aligned}
R(\mu,\delta) &= E_{\mu,\sigma}\left[l\left(\frac{\delta(\boldsymbol{X})-\mu}{\sigma}\right)\right]\\
&= E_{\mu,\sigma}\left[l\left(\frac{\delta_0(\boldsymbol{X})-v(\boldsymbol{Z})S(\boldsymbol{X})-\mu}{\sigma}\right)\right]\\
&= E_{\mu=0,\sigma=1}\Big[l\Big(\delta_0(\boldsymbol{X})-v(\boldsymbol{Z})S(\boldsymbol{X})\Big)\Big]\\
&= E_{\mu=0,\sigma=1}\Big[1-\exp\Big\{-\exp\{a(\delta_0-vS)\}+a(\delta_0-vS)+1\Big\}\Big]\\
&= 1-E_{\mu=0,\sigma=1}\Big[\exp\Big\{-\exp\{a(\bar{X}-vS)\}+a(\bar{X}-vS)+1\Big\}\Big]\\
&= 1-E_{\mu=0,\sigma=1}[h_1(v)]
\end{aligned}$$

になる．ただし，

$$h_1(v) := E_{\mu=0,\sigma=1}\Big[\exp\Big\{-\exp\big\{a\big(\bar{X}-v(\boldsymbol{Z})S\big)\big\}+a(\bar{X}-v(\boldsymbol{Z})S)+1\Big\}\Big|\boldsymbol{Z}\Big] \tag{6.2}$$

とし，$\boldsymbol{Z}, S$ はそれぞれ (2.2), (2.3) で定義したものとする．また，例 4.1 より，$(\bar{X}, S)$ は $\boldsymbol{Z}$ と独立であるから，

$$h_1(v) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_0^\infty\left\{\int_{-\infty}^\infty \exp\Big[-\exp\big\{a(\bar{x}-vs)\big\}+a(\bar{x}-vs)+1\Big]\exp\Big(-\frac{n\bar{x}^2}{2}\Big)d\bar{x}\right\}f_S(s)ds$$

となる．ただし，$f_S$ は (4.6) で与えられたものとする．このとき，次のことが成り立つ．

**定理 6.1**　関数 $h_1(v)$ について，$(\partial/\partial v)h_1(v) = 0$ の解は一意的に存在し，それを $v^*$ とすると，$\delta^*(\boldsymbol{X}) = \bar{X} - v^*(\boldsymbol{Z})S(\boldsymbol{X})$ が最良位置尺度共変推定量である．

**証明**　まず，

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial}{\partial v}\Big(\exp\Big[-\exp\big\{a(\bar{x}-vs)\big\}+a(\bar{x}-vs)+1-\frac{n\bar{x}^2}{2}\Big]\Big)\right| \qquad (6.3)\\
&=\left|as\Big(\exp\big\{a(\bar{x}-vs)\big\}-1\Big)\exp\Big[-\exp\big\{a(\bar{x}-vs)\big\}+a(\bar{x}-vs)+1-\frac{n\bar{x}^2}{2}\Big]\right|\\
&=|a|\ s\ \bigg|\exp\Big[-\exp\big\{a(\bar{x}-vs)\big\}+2a(\bar{x}-vs)+1-\frac{n\bar{x}^2}{2}\Big]\\
&\quad-\exp\Big[-\exp\big\{a(\bar{x}-vs)\big\}+a(\bar{x}-vs)+1-\frac{n\bar{x}^2}{2}\Big]\bigg|\\
&\le|a|\ s\ \bigg\{\exp\Big[-\exp\big\{a(\bar{x}-vs)\big\}+2a(\bar{x}-vs)+1-\frac{n\bar{x}^2}{2}\Big]\\
&\quad+\exp\Big[-\exp\big\{a(\bar{x}-vs)\big\}+a(\bar{x}-vs)+1-\frac{n\bar{x}^2}{2}\Big]\bigg\}\\
&\le|a|\ s\ \bigg\{\exp\Big[-\exp\big\{a(\bar{x}-vs)\big\}+2a(\bar{x}-vs)+1-\frac{n\bar{x}^2}{2}\Big]\\
&\quad+\exp\Big(-\frac{n\bar{x}^2}{2}\Big)\bigg\}\\
&\le|a|\ s\ \bigg\{\exp\Big[(2\log 2-1)-\frac{n\bar{x}^2}{2}\Big]+\exp\Big(-\frac{n\bar{x}^2}{2}\Big)\bigg\}
\end{aligned}$$

となり，

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty s\left\{\int_{-\infty}^\infty\Big[\exp\Big(2\log 2-1-\frac{n\bar{x}^2}{2}\Big)+\exp\Big(-\frac{n\bar{x}^2}{2}\Big)\Big]d\bar{x}\right\}f_S(s)ds\\
&=\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\Big\{e^{2\log 2-1}+1\Big\}\int_0^\infty sf_S(s)ds
\end{aligned}$$

になる．また，(4.6) より $t := s^2/2$ とおくと $ds = (1/\sqrt{2t})dt$ より

$$\begin{aligned}\int_0^\infty sf_S(s)ds &= K_n \int_0^\infty s^{n-1}e^{-s^2/2}ds \\ &= K_n \int_0^\infty (2t)^{\frac{n}{2}-1}e^{-t}dt \\ &= K_n 2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big) \quad < \infty\end{aligned}$$

となるので有界である．よって，(6.3) は $v$ に無関係な可積分関数で抑えられ，Lebesgue の収束定理より，$h_1(v)$ は $(\bar{x}, s)$ に関する積分記号下での $v$ に関する微分が可能である．よって

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial v}h_1(v) \\ &= \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\, a\int_0^\infty s\int_{-\infty}^\infty \Big\{\exp\big(a(\bar{x}-vs)\big)-1\Big\}\exp\Big[-\exp\Big\{a(\bar{x}-vs)\Big\}+a(\bar{x}-vs)+1-\frac{n\bar{x}^2}{2}\Big]d\bar{x}f_S(s)ds \\ &= \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_0^\infty s\ \mathrm{sgn}(a)\int_{-\infty}^\infty (e^u-1)\exp\Big\{-e^u+u+1-\frac{n}{2}\Big(\frac{u}{a}+vs\Big)^2\Big\}duf_S(s)ds \\ &= \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\Big\{\exp\Big(1-\frac{nv^2s^2}{2}\Big)\Big\}\int_0^\infty s\ \mathrm{sgn}(a)\int_{-\infty}^\infty (e^u-1)\exp\Big\{-e^u+u\Big(1-\frac{nsv}{a}\Big)-\frac{nu^2}{2a^2}\Big\}duf_S(s)ds\end{aligned}$$

になる．ここで，

$$h_2(v) := \int_0^\infty s\ \mathrm{sgn}(a)\int_{-\infty}^\infty (e^u-1)\exp\Big\{-e^u+u\Big(1-\frac{nsv}{a}\Big)-\frac{nu^2}{2a^2}\Big\}duf_S(s)ds \tag{6.4}$$

とし，(6.4) の右辺の $u$ に関する被積分関数を $h_3(v)$ とおく，すなわち

$$h_3(v) := (e^u-1)\exp\Big\{-e^u+u\Big(1-\frac{nsv}{a}\Big)-\frac{nu^2}{2a^2}\Big\}$$

とおく．すると

$$\frac{\partial}{\partial v}h_3(v) = (e^u-1)\Big(-\frac{uns}{a}\Big)\exp\Big\{-e^u+u\Big(1-\frac{nsv}{a}\Big)-\frac{nu^2}{2a^2}\Big\}$$

より，$a > 0$ のとき $(\partial/\partial v)h_3(v) < 0$ となり $h_3(v)$ は単調減少関数，$a < 0$ のとき $(\partial/\partial v)h_3(v) > 0$ となり $h_3(v)$ は単調増加関数となるから，$h_2(v)$ は単調減少関数になる．さらに，

$$\lim_{v\to\infty} h_2(v) = -\infty,\ \lim_{v\to-\infty} h_2(v) = \infty$$

となることを以下のように示す．まず，

$$\begin{aligned}\lim_{v\to\infty} h_2(v) &= \lim_{v\to\infty}\int_0^\infty s\ \mathrm{sgn}(a)\int_{-\infty}^\infty (e^u-1)\exp\Big\{-e^u+u\Big(1-\frac{nsv}{a}\Big)-\frac{nu^2}{2a^2}\Big\}duf_S(s)ds \\ &= \lim_{v\to\infty}\int_0^\infty s\ \mathrm{sgn}(a)\Big(\int_{-\infty}^0 (e^u-1)\exp\Big\{-e^u+u\Big(1-\frac{nsv}{a}\Big)-\frac{nu^2}{2a^2}\Big\}du \\ &\quad + \int_0^\infty (e^u-1)\exp\Big\{-e^u+u\Big(1-\frac{nsv}{a}\Big)-\frac{nu^2}{2a^2}\Big\}du\Big)f_S(s)ds \end{aligned} \tag{6.5}$$

より, まず $a>0$ の場合を考え, (6.5) の最右辺の第1項について

$$\begin{aligned}
&\lim_{v\to\infty}\int_0^\infty s\int_{-\infty}^0 (e^u-1)\exp\Big\{-e^u+u\Big(1-\frac{nsv}{a}\Big)-\frac{nu^2}{2a^2}\Big\}du f_S(s)ds \\
&\le \lim_{v\to\infty}\int_0^\infty s\int_{-\infty}^{-1} (e^u-1)\exp\Big\{-e^u+u\Big(1-\frac{nsv}{a}\Big)-\frac{nu^2}{2a^2}\Big\}du f_S(s)ds. \qquad (6.6)
\end{aligned}$$

となる. いま, $v\to\infty$ を考えているので, $v$ を十分大きいとすると, $a>0$ より $1-(nsv/a)\le 0$ である. また, $u\le -1$ であるので,

$$u\Big(1-\frac{nsv}{a}\Big)\ge -\Big(1-\frac{nsv}{a}\Big)$$

となり, $e^u-1<0$ より

$$(e^u-1)\exp\left\{u\left(1-\frac{nsv}{a}\right)\right\}\le (e^u-1)\exp\left\{-\left(1-\frac{nsv}{a}\right)\right\} \qquad (6.7)$$

となる. よって, (6.6), (6.7) より

$$\begin{aligned}
&\lim_{v\to\infty}\int_0^\infty s\int_{-\infty}^{-1} (e^u-1)\exp\Big\{-e^u+u\Big(1-\frac{nsv}{a}\Big)-\frac{nu^2}{2a^2}\Big\}du f_S(s)ds \\
&\le \lim_{v\to\infty}\int_0^\infty s\int_{-\infty}^{-1} (e^u-1)\exp\Big\{-e^u-\Big(1-\frac{nsv}{a}\Big)-\frac{nu^2}{2a^2}\Big\}du f_S(s)ds \\
&= \lim_{v\to\infty}\int_0^\infty s\exp\left\{-\left(1-\frac{nsv}{a}\right)\right\}\int_{-\infty}^{-1} (e^u-1)\exp\Big\{-e^u-\frac{nu^2}{2a^2}\Big\}du f_S(s)ds \\
&= -\lim_{v\to\infty}\int_0^\infty s\exp\left\{-\left(1-\frac{nsv}{a}\right)\right\}\int_{-\infty}^{-1} (1-e^u)\exp\Big\{-e^u-\frac{nu^2}{2a^2}\Big\}du f_S(s)ds \\
&= -\lim_{v\to\infty}\int_0^\infty s\exp\left\{-\left(1-\frac{nsv}{a}\right)\right\}f_S(s)ds\int_{-\infty}^{-1} (1-e^u)\exp\Big\{-e^u-\frac{nu^2}{2a^2}\Big\}du \qquad (6.8)
\end{aligned}$$

となる. ここで, (4.6) より

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty s\exp\left\{-\left(1-\frac{nsv}{a}\right)\right\}f_S(s)ds \\
&= e^{-1}K_n\int_0^\infty s^{n-1}\exp\Big(\frac{nsv}{a}-\frac{s^2}{2}\Big)ds \\
&= e^{-1}K_n\int_0^\infty e^{n^2v^2/(2a^2)}s^{n-1}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\Big(s-\frac{nv}{a}\Big)^2\Big\}ds \\
&= \exp\Big(-1+\frac{n^2v^2}{2a^2}\Big)K_n\int_0^\infty s^{n-1}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\Big(s-\frac{nv}{a}\Big)^2\Big\}ds \qquad (6.9)
\end{aligned}$$

となり, (6.9) において, $s$ に関する積分について変数変換すると,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty s^{n-1}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\Big(s-\frac{nv}{a}\Big)^2\Big\}ds \\
&= \int_{-nv/a}^\infty \Big(t+\frac{nv}{a}\Big)^{n-1}e^{-t^2/2}dt
\end{aligned}$$

$$= \int_{-nv/a}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} t^k \left(\frac{nv}{a}\right)^{n-1-k} e^{-t^2/2} dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \left(\frac{nv}{a}\right)^{n-1-k} \int_{-nv/a}^{\infty} t^k e^{-t^2/2} dt \tag{6.10}$$

となる．また，

$$\begin{aligned}
\lim_{v\to\infty} \int_{-nv/a}^{\infty} t^k e^{-t^2/2} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} t^k e^{-t^2/2} dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} t^k e^{-t^2/2} dt + \int_{0}^{\infty} t^k e^{-t^2/2} dt \\
&= \int_{0}^{\infty} (-\sqrt{2m})^k e^{-m} \frac{1}{\sqrt{2m}} dm + \int_{0}^{\infty} (\sqrt{2m})^k e^{-m} \frac{1}{\sqrt{2m}} dm \\
&= (-1)^k 2^{\frac{k-1}{2}} \int_0^{\infty} m^{(k-1)/2} e^{-m} dm + 2^{\frac{k-1}{2}} \int_0^{\infty} m^{(k-1)/2} e^{-m} dm \\
&= (-1)^k 2^{\frac{k+1}{2}}\, \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) + 2^{\frac{k+1}{2}}\, \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \\
&< \infty
\end{aligned} \tag{6.11}$$

となるから，(6.8) は (6.9), (6.10), (6.11) より

$$\begin{aligned}
&- \lim_{v\to\infty} \int_0^{\infty} s \exp\left\{-\left(1 - \frac{nsv}{a}\right)\right\} f_S(s) ds \int_{-\infty}^{-1} (1 - e^u) \exp\left\{-e^u - \frac{nu^2}{2a^2}\right\} du \\
&\leq - \lim_{v\to\infty} \left[\exp\left(-1 + \frac{n^2v^2}{2a^2}\right) K_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \left(\frac{nv}{a}\right)^{n-1-k} \int_{-nv/a}^{\infty} t^k e^{-t^2/2} dt \right. \\
&\quad \left. \int_{-\infty}^{-1} (1 - e^u) \exp\left\{-e^u - \frac{nu^2}{2a^2}\right\} du \right] \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

となる．したがって，(6.5) の最右辺の第 1 項は

$$\lim_{v\to\infty} \int_0^{\infty} s \int_{-\infty}^{0} (e^u - 1) \exp\left\{-e^u + u\left(1 - \frac{nsv}{a}\right) - \frac{nu^2}{2a^2}\right\} du f_S(s) ds = -\infty \tag{6.12}$$

となる．次に，(6.5) の最右辺の第 2 項については，

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} s \int_0^{\infty} (e^u - 1) \exp\left\{-e^u + u\left(1 - \frac{nsv}{a}\right) - \frac{nu^2}{2a^2}\right\} du f_S(s) ds \\
&= \sqrt{\frac{2\pi a^2}{n}} \int_0^{\infty} s \int_0^{\infty} (e^u - 1) \exp\left\{-e^u + u\left(1 - \frac{nsv}{a}\right)\right\} \sqrt{\frac{n}{2\pi a^2}} \exp\left(-\frac{nu^2}{2a^2}\right) du f_S(s) ds
\end{aligned} \tag{6.13}$$

とし，ここで，

$$dQ(u) := \sqrt{\frac{n}{2\pi a^2}} \exp\left(-\frac{nu^2}{2a^2}\right) du$$

となる有限測度 $Q$ を考えると, (6.13) は

$$\sqrt{\frac{2\pi a^2}{n}}\int_0^\infty s\int_0^\infty (e^u-1)\exp\Big\{-e^u+u\Big(1-\frac{nsv}{a}\Big)\Big\}dQ(u)f_S(s)ds \tag{6.14}$$

と表わせる. ここで, (6.14) について Lebesgue の収束定理を適用することを考える. 先程と同様に, $v\to\infty$ を考えているので, $v$ を十分大きいとすると, $a>0$ より $1-(nsv/a)\leq 0$ である. よって, $u\geq 0$ より

$$-e^u+u\Big(1-\frac{nsv}{a}\Big)<0$$

となるので, $u\geq 0$ について

$$\Big|(e^u-1)\exp\Big\{-e^u+u\Big(1-\frac{nsv}{a}\Big)\Big\}\Big|\leq e^u-1$$

となる. また,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty s\int_0^\infty (e^u-1)dQ(u)f_S(s)ds\\
&=\int_0^\infty (e^u-1)\sqrt{\frac{n}{2\pi a^2}}\exp\left(-\frac{nu^2}{2a^2}\right)du\int_0^\infty sf_S(s)ds\\
&=\left\{\sqrt{\frac{n}{2\pi a^2}}\int_0^\infty \exp\left(u-\frac{nu^2}{2a^2}\right)du\right.\\
&\qquad\left.-\sqrt{\frac{n}{2\pi a^2}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{nu^2}{2a^2}\right)du\right\}\int_0^\infty sf_S(s)ds\\
&=\left\{\sqrt{\frac{n}{2\pi a^2}}\int_0^\infty \exp\left(\frac{a^2}{2n}\right)\exp\left\{-\frac{n}{2a^2}\left(u-\frac{a^2}{n}\right)^2\right\}du-\frac{1}{2}\right\}\int_0^\infty sf_S(s)ds\\
&<\left\{\sqrt{\frac{n}{2\pi a^2}}\int_{-\infty}^\infty \exp\left(\frac{a^2}{2n}\right)\exp\left\{-\frac{n}{2a^2}\left(u-\frac{a^2}{n}\right)^2\right\}du-\frac{1}{2}\right\}\int_0^\infty sf_S(s)ds\\
&=\left\{\exp\left(\frac{a^2}{2n}\right)-\frac{1}{2}\right\}\int_0^\infty sf_S(s)ds\\
&<\infty
\end{aligned}$$

となるので, $e^u-1$ は $v$ に無関係な可積分関数である. ゆえに, (6.14) に Lebesgue の収束定理を適用すると

$$\begin{aligned}
&\lim_{v\to\infty}\sqrt{\frac{2\pi a^2}{n}}\int_0^\infty s\int_0^\infty (e^u-1)\exp\Big\{-e^u+u\Big(1-\frac{nsv}{a}\Big)\Big\}dQ(u)f_S(s)ds\\
&=\sqrt{\frac{2\pi a^2}{n}}\int_0^\infty s\int_0^\infty \lim_{v\to\infty}(e^u-1)\exp\Big\{-e^u+u\Big(1-\frac{nsv}{a}\Big)\Big\}dQ(u)f_S(s)ds\\
&=0
\end{aligned} \tag{6.15}$$

となる．したがって, (6.12), (6.15) より $a>0$ のとき

$$
\begin{aligned}
\lim_{v\to\infty} h_2(v) = \lim_{v\to\infty} \int_0^\infty & s \operatorname{sgn}(a)\Bigl(\int_{-\infty}^0 (e^u-1)\exp\Bigl\{-e^u+u\Bigl(1-\frac{nsv}{a}\Bigr)-\frac{nu^2}{2a^2}\Bigr\}du \\
&+\int_0^\infty (e^u-1)\exp\Bigl\{-e^u+u\Bigl(1-\frac{nsv}{a}\Bigr)-\frac{nu^2}{2a^2}\Bigr\}du\Bigr)f_S(s)ds \\
=-\infty &
\end{aligned}
$$

となる． $a<0$ のときと $\lim_{v\to-\infty} h_2(v)=\infty$ についても同様に示せる． したがって, $h_2(v)=0$ となる点 $v$ が唯一つ存在する．この点を $v^*$ とすると, $v^*>v$ なる $v$ においては $(\partial/\partial v)h_1(v)>0$, $v^*<v$ なる $v$ においては $(\partial/\partial v)h_1(v)<0$ となるので $v^*$ は $(\partial/\partial v)h_1(v)=0$ の唯一の解になり, $h_1(v)$ は $v=v^*$ のとき最大値をとる．よって $v=v^*$ のときリスクは最小になるから, (4.1) より $\delta^*(\boldsymbol{X})=\bar{X}-v^*(\boldsymbol{Z})S(\boldsymbol{X})$ が最良位置尺度共変推定量になる．
□

いま, (6.4) より変数変換を用いると

$$
\begin{aligned}
& h_2(v)=0 \\
\Leftrightarrow & \int_0^\infty s\int_{-\infty}^\infty (e^u-1)\exp\Bigl\{-e^u+u\Bigl(1-\frac{nsv}{a}\Bigr)-\frac{nu^2}{2a^2}\Bigr\}du f_S(s)ds=0 \\
\Leftrightarrow & \int_0^\infty s\int_0^\infty \Bigl(\frac{y-1}{y}\Bigr)\exp\Bigl\{-y+\Bigl(1-\frac{nsv}{a}\Bigr)\log y-\frac{n(\log y)^2}{2a^2}\Bigr\}dy f_S(s)ds=0 \\
\Leftrightarrow & \int_0^\infty s\Bigl[\int_0^\infty \frac{1}{y}\exp\Bigl\{-y+\Bigl(2-\frac{nsv}{a}\Bigr)\log y-\frac{n(\log y)^2}{2a^2}\Bigr\}dy \\
& -\int_0^\infty \frac{1}{y}\exp\Bigl\{-y+\Bigl(1-\frac{nsv}{a}\Bigr)\log y-\frac{n(\log y)^2}{2a^2}\Bigr\}dy\Bigr]f_S(s)ds=0 \qquad (6.16)
\end{aligned}
$$

となる．まず, (6.16) の $y$ に関する被積分関数の第 1 項を計算すると,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{1}{y}\exp\Bigl\{-y+\Bigl(2-\frac{nsv}{a}\Bigr)\log y-\frac{n(\log y)^2}{2a^2}\Bigr\}dy \\
=&\int_0^\infty \frac{1}{y}\exp\Bigl\{-\frac{n}{2a^2}\Bigl(\log y-\frac{2a^2}{n}\Bigr)^2-y+\frac{2a^2}{n}-\frac{nsv}{a}\log y\Bigr\}dy \\
=&e^{2a^2/n}\int_0^\infty \frac{1}{y}\Bigl(e^{-y}y^{-nsv/a}\Bigr)\exp\Bigl\{-\frac{n}{2a^2}\Bigl(\log y-\frac{2a^2}{n}\Bigr)^2\Bigr\}dy \qquad (6.17)
\end{aligned}
$$

となる．次に, (6.16) の $y$ に関する被積分関数の第 2 項を計算すると,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{1}{y}\exp\Bigl\{-y+\Bigl(1-\frac{nsv}{a}\Bigr)\log y-\frac{n(\log y)^2}{2a^2}\Bigr\}dy \\
=&\int_0^\infty \frac{1}{y}\exp\Bigl\{-\frac{n}{2a^2}\Bigl(\log y-\frac{a^2}{n}\Bigr)^2-y+\frac{a^2}{2n}-\frac{nsv}{a}\log y\Bigr\}dy \\
=&e^{a^2/(2n)}\int_0^\infty \frac{1}{y}\Bigl(e^{-y}y^{-nsv/a}\Bigr)\exp\Bigl\{-\frac{n}{2a^2}\Bigl(\log y-\frac{a^2}{n}\Bigr)^2\Bigr\}dy \qquad (6.18)
\end{aligned}
$$

となる. したがって, (6.17), (6.18) より

$$
\begin{aligned}
& h_2(v) = 0 \\
\Leftrightarrow & \int_0^\infty s\Bigl[e^{2a^2/n}\int_0^\infty \frac{1}{y}\Bigl(e^{-y}y^{-nsv/a}\Bigr)\exp\Bigl\{-\frac{n}{2a^2}\Bigl(\log y-\frac{2a^2}{n}\Bigr)^2\Bigr\}dy \\
& \quad - e^{a^2/(2n)}\int_0^\infty \frac{1}{y}\Bigl(e^{-y}y^{-nsv/a}\Bigr)\exp\Bigl\{-\frac{n}{2a^2}\Bigl(\log y-\frac{a^2}{n}\Bigr)^2\Bigr\}dy\Bigr]f_S(s)ds \\
& \quad = 0 \\
\Leftrightarrow & \int_0^\infty s\Bigl[\exp\Bigl(\frac{3a^2}{2n}\Bigr)\int_0^\infty \frac{1}{y}\Bigl(e^{-y}y^{-nsv/a}\Bigr)\exp\Bigl\{-\frac{n}{2a^2}\Bigl(\log y-\frac{2a^2}{n}\Bigr)^2\Bigr\}dy \\
& \quad - \int_0^\infty \frac{1}{y}\Bigl(e^{-y}y^{-nsv/a}\Bigr)\exp\Bigl\{-\frac{n}{2a^2}\Bigl(\log y-\frac{a^2}{n}\Bigr)^2\Bigr\}dy\Bigr]f_S(s)ds \\
& \quad = 0
\end{aligned}
\tag{6.19}
$$

となる. さらに,

$$
\begin{aligned}
(6.19) \Leftrightarrow & \int_0^\infty s\Bigl[\exp\Bigl(\frac{3a^2}{2n}\Bigr)\int_0^\infty \sqrt{\frac{n}{2\pi a^2y^2}}\Bigl(e^{-y}y^{-nsv/a}\Bigr)\exp\Bigl\{-\frac{n}{2a^2}\Bigl(\log y-\frac{2a^2}{n}\Bigr)^2\Bigr\}dy \\
& \quad - \int_0^\infty \sqrt{\frac{n}{2\pi a^2y^2}}\Bigl(e^{-y}y^{-nsv/a}\Bigr)\exp\Bigl\{-\frac{n}{2a^2}\Bigl(\log y-\frac{a^2}{n}\Bigr)^2\Bigr\}dy\Bigr]f_S(s)ds \\
& \quad = 0
\end{aligned}
\tag{6.20}
$$

となるから,

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{n}{2\pi a^2y^2}}\exp\Bigl\{-\frac{n}{2a^2}\Bigl(\log y-\frac{2a^2}{n}\Bigr)^2\Bigr\} \quad (y>0), \\
&\sqrt{\frac{n}{2\pi a^2y^2}}\exp\Bigl\{-\frac{n}{2a^2}\Bigl(\log y-\frac{a^2}{n}\Bigr)^2\Bigr\} \quad (y>0)
\end{aligned}
$$

がそれぞれ対数正規分布 (lognormal distribution)$LN(2a^2/n, a/\sqrt{n})$, $LN(a^2/n, a/\sqrt{n})$ の p.d.f. になっているので, 確率変数$Y_1, Y_2$について$Y_1 \sim LN(2a^2/n, a/\sqrt{n})$, $Y_2 \sim LN(a^2/n, a/\sqrt{n})$ とすれば, (6.20) は

$$
\int_0^\infty s\Bigl\{e^{3a^2/(2n)}E\Bigl[{Y_1}^{-nsv/a}e^{-Y_1}\Bigr]-E\Bigl[{Y_2}^{-nsv/a}e^{-Y_2}\Bigr]\Bigr\}f_S(s)ds = 0 \tag{6.21}
$$

と表わせる. したがって, (6.21) を満たす $v$ を $v^*$ とすれば (4.1) より

$$
\delta^*(\boldsymbol{X}) = \bar{X} - v^*(\boldsymbol{Z})S(\boldsymbol{X})
$$

が最良位置尺度共変推定量になる.

## 7 おわりに

本論においては, 位置母数が未知で尺度母数が既知の場合と位置母数, 尺度母数が共に未知の場合における母数推定問題において, 共変推定量のクラス全体でリスクを最小にする推定量の導出方法について考察した. 第3節, 第4節では, LINEX 損失における最良位置尺度共変推定量について正規分布, 一様分布の例を挙げ, 具体的に数値計算を行った. また, 第5節, 第6節では, 有界な LINEX 損失を用いた正規分布の最良位置共変推定, 最良位置尺度共変推定について論じた. その結果, 損失関数が一般的によく用いられる2乗損失の場合と異なり, LINEX 損失を用いると解析的に求めることは困難ではあるが, 対数正規分布に従う確率変数に関する期待値の積分方程式の解として求められることがわかった. 今後の課題としては, 位置母数, 尺度母数がともに未知の場合に推定量の許容性について考察することが挙げられる.

## 参考文献


[A03] 赤平昌文 (2003). 統計解析入門. 森北出版.

[LC98] Lehmann, E.L. and Casella, G. (1998). *Theory of Point Estimation.* (2nd ed.), Springer, New York.

[M03] Mohammadi, L. (2003). On an admissibility problem involving the moment generating function of the lognormal distribution. *Metrika* **57** (1), 63–70.

[N78] 鍋谷清治 (1978). 数理統計学. 共立出版.

[OA04] 小方浩明, 赤平昌文 (2004). 統計的条件付推測における仮説検定と区間推定. 数理解析研究所講究録 **1380** , 80–93.

[T03] Takeuchi, K. (2003). Some theorems on invariant estimators of location. To appear.

[Z86] Zellner, A. (1986). Bayesian estimation and prediction using asymmetric loss functions. *J. Amer. Statist. Assoc.* **81**, 446–451.