数理解析研究所講究録 1440 巻 2005 年 133-136

有限群のねじれ部分つき gohst ring について

北海道大学理学研究科　　翁長良成 (Yoshishige Onaga)
(Department of Mathmatics, Hokkaido University)

概要

本稿は北海道大学の吉田知行教授との共同研究によるもので、有限群の一般指標環を含むある完全系列についての報告である。ここで取り扱うのは、一般指標環を Burnside 環上の加群とみなすことにより得られる完全系列である。この完全系列において、一般指標環と gohst ring の、Burnside 環上のテンソル積があらわれるが、本稿ではこのテンソル積の構造を少しばかり紹介する。

1 Burnside 環上の加群

G を有限群とする。G の Burnside 環を $B(G)$ で表す。よく知られているように、

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{B}(G) \xrightarrow{\varphi} \tilde{\boldsymbol{B}}(G) \xrightarrow{\psi} \mathbf{Obs}(G) \longrightarrow 0$$

は完全系列である。但し φ は Burnside 準同型、ψ は Cauchy-Frobenius 写像であり、

$$\tilde{\boldsymbol{B}}(G) := \prod_{S \in C(G)} \mathbb{Z},$$

$$\mathbf{Obs}(G) := \prod_{S \in C(G)} \mathbb{Z} \,/\, |N_G(S) : S|\,\mathbb{Z}$$

とする。ここで S は G の共役類の完全代表系 $C(G)$ を動く。このとき φ と ψ により、$\tilde{\boldsymbol{B}}(G)$ と $\mathbf{Obs}(G)$ は Burnside 環上の加群となる。以下、これを $\boldsymbol{B}(G)$ 加群と呼ぶ。

一方、有限 G 集合をその置換指標に対応させることにより、一般指標環 $\boldsymbol{R}(G)$ も $\boldsymbol{B}(G)$ 加群となる。即ち、有限 G 集合 X に対応する置換指標を π_X として $\pi : \boldsymbol{B}(G) \longrightarrow \boldsymbol{R}(G)$ を

$$\pi(\omega) = \pi_X - \pi_Y \quad ; \quad \omega = [X] - [Y] \in \boldsymbol{B}(G)$$

で定義できるから、これにより $\boldsymbol{R}(G)$ が $\boldsymbol{B}(G)$ 加群となる。従って、$\boldsymbol{B}(G)$ 加群のテンソル積

$$\boldsymbol{B}(G) \otimes_{\boldsymbol{B}(G)} \boldsymbol{R}(G) \cong \boldsymbol{R}(G),$$

$$\tilde{B}(G) \otimes_{B(G)} R(G) =: \tilde{R}(G),$$
$$\mathrm{Obs}(G) \otimes_{B(G)} R(G) =: R\mathrm{Obs}(G)$$

を定義でき、次の完全系列を得る。

$$0 \longrightarrow R(G) \overset{\varphi\otimes\mathrm{id}_{R(G)}}{\longrightarrow} \tilde{R}(G) \overset{\psi\otimes\mathrm{id}_{R(G)}}{\longrightarrow} R\mathrm{Obs}(G) \longrightarrow 0.$$

このあたりまでは、2004 年の総合分科会で、吉田先生がお話しになったことである。

2 $\tilde{R}(G)$ の構造について

ここで Burnside 準同型の定義を思い出しておく。有限 G 集合 X に対して、G の部分群 S による固定点集合を X^S とする。このとき、$\varphi_S : B(G) \longrightarrow \mathbb{Z}$ を

$$\varphi_S : \omega \longmapsto |X^S| - |Y^S| \quad ; \quad \omega = [X] - [Y] \in B(G)$$

で定義することができる。この φ_S たちを用いて Burnside 準同型を

$$\varphi := (\varphi_S)_{S\in C(G)}$$

と定義するのであった。

ここで $B(G)$ 加群の話しに戻る。定義から $\tilde{R}(G) \cong \prod_{S\in C(G)} \big(\mathbb{Z} \otimes_{B(G)} R(G)\big)$ であるから、各 $S \in C(G)$ に対して、$\mathbb{Z} \otimes_{B(G)} R(G)$ の構造がわかれば良い。そこで $R(G)$ のイデアル

$$I_S(G) = \langle \chi_H - |(G/H)^S| \cdot 1_G \,;\, H \in C(G)\rangle.$$

を考える。そうすると同型対応

$$\tilde{\theta} : m \otimes \chi \longmapsto m\bar{\chi} \quad ; \quad m \in \mathbb{Z}, \quad \chi \in R(G).$$

により $\mathbb{Z} \otimes_{B(G)} R(G) \cong R(G)/I_S(G)$ となる。以下、$R(G)/I_S(G)$ を $R_S(G)$ と書くことにする。θ を $R(G)$ から $R_S(G)$ への canonical map とすると、可換図式

$$\begin{array}{ccc}
B(G) \otimes_{B(G)} R(G) & \xrightarrow{\pi\otimes\mathrm{id}_{R(G)}} & R(G) \\
{\scriptstyle \varphi_S\otimes\mathrm{id}_{R(G)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta} \\
\mathbb{Z} \otimes_{B(G)} R(G) & \xrightarrow[\tilde{\theta}]{} & R_S(G)
\end{array}$$

が成り立つ。我々の主張は次のとおりである。

定理　S を G の部分群とする。

(1)　S が non-solvable であれば、$\boldsymbol{R}_S(G) = 0$ である。

(2)　S が non-cyclic であれば、$|N_G(S)| \cdot \boldsymbol{R}_S(G) = 0$ である。

定理を証明するために次の補題が必要になる。

補題　$B(G)$ の元 ω に対して $\pi(\omega) = 0$ であれば、$\varphi_S(\omega) \cdot \boldsymbol{R}_S(G) = 0$ となる。

証明　$B(G)$ の任意の元 ω' に対して、先の可換図式より

$$\varphi_S(\omega) \cdot \overline{1_G} = \overline{\pi(\omega')}$$

が成り立つ。故に $\pi(\omega) = 0$ であれば、$\varphi_S(\omega) \cdot \boldsymbol{R}_S(G) = 0$ となる。　□

さて、定理を証明しよう。各 $H \in C(G)$ に対して、e_H を $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \boldsymbol{B}(G)$ の原始巾等元とする。また、G の perfect な部分群 J に対して、f_J を $\boldsymbol{B}(G)$ の原始巾等元とする。即ち、

$$f_J = \sum_{\substack{H \in C(G) \\ H^\infty \cong J}} e_H \quad ; \qquad e_H = |N_G(H)|^{-1} \sum_{D \leq N_G(H)} |D|\, \mu(D, H)\, [G/H]$$

である。ここで、H^∞ は H の交換子群の極限を表し、μ は G の部分群束上の Möbius 関数である。このとき、${}^\forall g \in G$ に対し、

$$\pi(f_J)(g) = |f_J^{<g>}| = \varphi_{<g>}(f_J)$$

となる。しかし、J は perfect であったから、$\pi(f_J)(g) = 0$ となる。故に先の補題より、$\varphi_S(f_J) \cdot \boldsymbol{R}_S(G) = 0$ となるが、S が non-solvable な部分群なので、$\varphi_S(f_J) = 1$ となる。これで (1) が示された。

次に (2) を示す。各 $H \in C(G)$ に対して $|N_G(H)| \cdot e_H \in \boldsymbol{B}(G)$ であるから、${}^\forall g \in G$ に対して

$$\pi\big(|N_G(H)| \cdot e_H\big)(g) = |N_G(H)| \cdot \varphi_{<g>}(e_H)$$

となる。よって S が non-cyclic であれば、

$$\pi\big(|N_G(S)| \cdot e_S\big)(g) = 0 \quad ; \quad {}^\forall g \in G$$

である。従って、補題より

$$\varphi(|N_G(S)| \cdot e_S) \cdot R_S(G) = |N_G(S)| \cdot R_S(G) = 0$$

を得る。　□

3 Example

G を 5 次の交代群 A_5 として、その部分群たちについて $\boldsymbol{R}_S(G)$ を計算すると次のようになる。但し、A_4 は 4 次の交代群、D_5 は位数が 10 の二面体群、S_3 は 3 次の対称群、K_4 は Klein の四元群である。

$$R_{A_5}(G), R_{A_4}(G) = 0,$$

$$R_{S_3}(G), R_{K_4}(G) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

$$R_{D_5}(G) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

となる。いずれも定理の主張は満たしているが、この例を見るかぎり、もう少し強いことが言えそうである。これからの課題である。

4 参考文献

[1] S.Bouc, Burnside Ring, In *Handbook of Algebra*, Vol.2, Elsevier Science B.V. (2000), 439-804

[2] C.Curtis and I.Reiner, *Method of Representation Theory with Applications to Finite Groups and Orders*, Vol.2, Wiley Interscience, 1987

[3] C.Kratzer and J.Thévenaz, *Fonction de Möbius d'un Groupe Fini et Anneau de Burnside*, Comment. Math. Helv. **59** (1984) 425-438

[4] T.Yoshida, *Idempotents of Burnside Rings and Dress Induction Theorem*, J.Algebra, **80**, (1983) 90-105