数理解析研究所講究録 1440 巻 2005 年 13-17

Hall-Janko グラフとデザイン

中空　大幸 (Hiroyuki Nakasora)

岡山大学, 千葉大学
(Okayama University, Chiba University)

1 Introduction

今回の主の対象である Hall-Janko グラフは、Janko によって発見されて M. Hall によって存在証明が成された散在型単純群の一つである J_2 に対して、その存在証明に使われたグラフの事である。この Hall-Janko グラフは、強正則グラフでありそのパラメータは $(100, 36, 14, 12)$ である。このグラフを考える事になったいきさつとして次のような概念がある。[1], [2]

Definition 1.1. パラメータ $(n^2, (n-1)k, n+k(k-3), k(k-1))$ をもつ強正則グラフを pseudo-Latin square graph (または、psedo-net graph) と呼び、$PL_k(n)$-graph と書く。さらに、このグラフが $k-2$ 個の直交 n 次ラテン方陣の集合から構成されるとき Latin square graph と呼び、$L_k(n)$-graph と書く。

この定義より、$n=10, k=4,7$ のとき pseudo-Latin square graph のパラメータは $(100, 36, 14, 12)$ と $(100, 63, 38, 42)$ となり、それぞれ Hall-Janko グラフまたはその補グラフのパラメータと一致する。よって、Hall-Janko グラフがラテン方陣から構成されるグラフであるか否か考えた次第である。私の知る限りの最も古い先行の結果として文献 [6] [1]を挙げる。その文献の中で次のような定理が書かれいる。

Theorem 1.2. *(M. Suzuki)*

(1) *Hall-Janko* グラフは *Latin square graph* ではない。
(2) *Suzuki* グラフは *geometric* ではない。

この文献の中には定理の証明は書かれていないのでここで (1) の証明[2]を与える。その準備として、次の補題を挙げる。

Lemma 1.3. *(Bruck)* Γ を $L_k(n)$*-graph* $(2 \le k \le n+1)$ とする。

[1]主結果は散在型鈴木群および鈴木系列の発見に関するものである。
[2](2) については特に述べない。尚、geometric の定義については Cameron-Lint [2] のテキスト第 7 章を参考文献として挙げる。

(1) Γ はサイズ n のクリークをもつ。
(2) $\mathcal{C}$ を Γ のサイズ n のクリーク全体の集合とする。すると、$|C \cap C'| = 1$ となる異なる 2 つのクリーク $C, C' \in \mathcal{C}$ が存在する。

まず、定理の主張である "Hall-Janko グラフは Latin square graph ではない" 事を示すためには Hall-Janko グラフとその補グラフそれぞれについて調べる必要がある。よって、Γ を Hall-Janko グラフそして $\bar{\Gamma}$ をその補グラフとする。

主張 *1.* Γ は $L_4(10)$-graph ではない。

Proof. Γ を $L_4(10)$-graph とする。すると Lemma 1.3 (1) より、Γ はサイズ 10 のクリークをもつ。
しかし、ここで Hall-Janko グラフの構成法 [6] より、鈴木系列

$$S_4 \subset PGL(2,7) \subset G_2(2) \subset \mathrm{Aut}\ J_2 \subset \mathrm{Aut}\ G_2(4) \subset \mathrm{Aut}\ Sz$$

に対応するグラフの系列を考えると、$\mathrm{Aut}\,\Gamma = \mathrm{Aut}\ J_2$, $\mathrm{Aut}\ \Phi_4 = S_4$ ここで、Φ_4 は 4 点の空グラフより、Γ の最大クリークのサイズは 4 である。よって、仮定に矛盾する。 □

主張 *2.* $\bar{\Gamma}$ は $L_7(10)$-graph ではない。

Proof. $\bar{\Gamma}$ は $L_7(10)$-graph と仮定する。すると Lemma 1.3 (2) より、$\bar{\Gamma}$ は $|C \cap C'| = 1$ となるサイズが 10 の異なる 2 つのクリーク $C, C' \in \mathcal{C}$ を持たなければならない。しかし、$\bar{\Gamma}$ はサイズ 10 の (最大) クリークを持つが、任意の 2 つのサイズ 10 の異なるクリーク $C, C' \in \mathcal{C}$ に対して、$|C \cap C'| = 0$ または 2 である (Chigira-Harada-Kitazume [3])。よって、仮定に矛盾する。 □

よって、 上の 2 つの主張より Γ と $\bar{\Gamma}$ が Latin square graph ではないことが示された。
この定理の証明のなかで Hall-Janko グラフのクリークが大きな役割を果たした訳であるが、特に、その補グラフのサイズ 10 のクリーク[3]は最大サイズであり、良い性質を持っている (後述、Lemma 2.1)。今回は、そのサイズ 10 のクリークと Witt system 3-$(10,4,1)$ design との関係について報告する。

2 The Hall-Janko graph and the Witt system

まず、Bruck の補題 [1] について述べる。

[3]Hall-Janko グラフの coclique とも言えるが、今回はこのように統一させて頂く。

Lemma 2.1. *(Bruck)* $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ を *psudo-Latin square graph* でサイズ n のクリーク C を持つと仮定する。すると、 C は最大サイズのクリークであり、また $x \in V(\Gamma) \setminus V(C)$ に対して、$|\Gamma_x \cap C| = k-1$ が成り立つ。

ここで、$\Gamma_x = \{y \in V(\Gamma) | (x,y) \in E(\Gamma)\}$ である。

この補題より、$n = 10, k = 7$ のとき、サイズ 10 のクリークを持つ psudo-Latin graph の一つの例が Hall-Janko グラフの補グラフである。また、上の Bruck の補題から次の命題を得る。

Proposition 2.2. $D = (C, V(\Gamma) \setminus V(C))$ を結合構造とし、その結合関係を次のように定義する。$p \in C, B \in V(\Gamma) \setminus V(C)$ に対して、

$$pIB \Leftrightarrow (p, B) \in E(\Gamma).$$

すると、 D は 2-$(10,6,30)$ *design* である。(*repeated blocks* を認めたデザイン。)

Proof. Lemma 2.1 より、 $|C| = 10$ であり $V(\Gamma) \setminus V(C)$ が C の 6 点部分集合の族である事がわかる。ここで、 Γ は強正則グラフでパラメータ $(100, 63, 38, 42)$ を持つので、C の任意の異なる 2 点 x, y が隣接するならば、x と y の共通する隣接点の個数は $V(\Gamma) \setminus V(C)$ の集合の中では丁度 30 個ある。よって、 D は 2-$(10,6,30)$ design である。 $\square$

この命題より、Hall-Janko グラフの補グラフから得られる 2-$(10,6,30)$ design D について考える。以下、Γ を Hall-Janko グラフの補グラフと置く。

まず、Hall-Janko グラフの構成法 [6] の復習を行う。$\Gamma = (V, E)$ とし、$\infty \in V$ に対して、

$$\Gamma = \{\infty\} \cup \Gamma_\infty \cup \Delta_\infty.$$

ここで、∞ は Γ_∞ のすべての頂点と隣接し、Δ_∞ のすべての頂点と隣接しない。このとき、Γ_∞ は 63 点の rank 4 の distance regular graph である事が知られている。

次に、Γ_∞ の構造を調べるために次のようなデザインを与える。[[5], 定理 8.15]

$\mathbb{F}_9$ 上の 3 次元ベクトル空間の射影ユニタリ一空間における non-isotropic points の集合 を $\mathcal{P}$ 、isotropic points の集合を $\mathcal{Q}$ とする。そして、$(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ を結合構造とし、その結合関係を次のように定義する。$u \in \mathcal{P}, v \in \mathcal{Q}$ に対して、

$$uIv \Leftrightarrow < u, v >= 0.$$

ここで、$<,>$ は内積の記号である。すると、結合構造 $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ は 2-$(28,4,1)$ design [4]で自己同型群として $U_3(3)$ が作用している。

[4]注意としてこのパラメータに対するデザイン一意的ではない。文献 [4] によると 145 個以上存在して分類はされていないようである。

Lemma 2.3. $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ のブロックの集合 $\mathcal{Q}$ に対して、隣接条件を与えグラフ $\Gamma' = (V', E')$ を構成する。その隣接条件は、$Q, Q' \in \mathcal{Q}$ に対して、

(1) $< Q, Q' >= 0$ *(as non-isotropic points)* $\Leftrightarrow (Q, Q') \in E'$,
(2) $< Q, Q' > \neq 0$ *(as non-isotropic points)* ならば、
$|Q \cap Q'| = 1$ *(as blocks)* $\Leftrightarrow (Q, Q') \in E'$.

すると、$\Gamma' \cong \Gamma_\infty$ である。

Proposition 2.4. $D = (C, V(\Gamma) \setminus V(C))$ を Γ から得られる 2-$(10, 6, 30)$ *design* とする *(Proposition 2.2)*。

$D_\infty = (C \setminus \{\infty\}, \{B \setminus \{\infty\} : B \in V(\Gamma) \setminus V(C)\})$ を $\infty \in C$ に関する D の *derived design* とすると次の *2* つをみたす。

(1) D_∞ は 2-$(9, 5, 15)$ *design* である。
(2) D_∞ は 2-$(9, 5, 5)$ *design* の各ブロックを *3* 回ずつ繰り返したデザインである。

Proof. (1) まず、記号の簡略化として $X = C \setminus \{\infty\}$, $\mathcal{B} = \{B \setminus \{\infty\} : B \in V(\Gamma) \setminus V(C)\}$ と置く。そして、$|X| = 9$ と $\mathcal{B}$ は X の 5 点部分集合の族であることが容易にわかる。

$(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ は 2-$(28, 4, 1)$ design より、1 点を通るブロックの個数は 9 個である。ここで、$\mathcal{P}$ の ある 1 点を含む 9 個のブロックを $\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_9\}$ と置く。すると、Lemma 2.3 より $\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_9\}$ はグラフ Γ_∞ において互いに隣接する、すなわち $\{\infty\} \cup \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_9\}$ は Γ のサイズ 10 のクリークの一つに対応する。$\mathcal{P}$ 上に $U_3(3)$ が transitive に作用しているので、$X = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_9\}$ と置いて十分である。

$\mathcal{P}$ の任意の 2 点は $\mathcal{Q}$ の唯一つのブロックに含まれるので、$|B \cap Q_i| = |B \cap Q_j| = 1$, $(i \neq j)$ となるブロック $B \in \mathcal{B}$ は $9\ (= 3 \times 3)$ 個ある。

また、$\mathcal{Q}$ の任意の異なる 2 つのブロックは ($\mathcal{P}$ の) 0 または 1 点と交わるので、

$|B' \cap Q_i| = 1$ かつ、 $< B', Q_j >= 0$ (as non-isotropic points) または、
$|B' \cap Q_j| = 1$ かつ、 $< B', Q_i >= 0$ (as non-isotropic points)

となるブロック $B' \in \mathcal{B}$ は $6\ (= 3 \times 2)$ 個ある。

ゆえに、X の任意の 2 点は $\mathcal{B}$ の正確に 15 個のブロックに含まれる。よって、$(X, \mathcal{B})$ は 2-$(9, 5, 15)$ design である。 □

(2) については、今のところ直接的な計算によって得たもので今回はその証明を省略させて頂く。

ここで、Hall-Janko 群が Γ の 100 個の頂点の上に transitive に作用しているので、Proposition 2.4 (1) より、D は 3-$(10, 6, 15)$ design であることがわかる。また、

(2) より、D は 3-$(10,6,5)$ design の各ブロックを 3 回ずつ繰り返したデザインである。よって、次の主結果[5]を得る。

Theorem 2.5. D は *Witt system* 3-$(10,4,1)$ *design* W_{10} の *complement design* の各ブロックを *3* 回ずつ繰り返したデザインである。

この後、$J_2:2$ の 10 点の安定部分群 $3.S_6:2(=3.M_{10}:2)$ に対応していることを知り、Hall-Janko グラフの再構成を試みている。

参考文献

[1] R. H. Bruck, Finite nets II: Uniqueness and embedding, *Pacific J. Math.* **13** (1963), 421-457.

[2] P. J. Cameron and J. H. Van Lint, *Designs, Graphs, Codes and their Links,* London Mathematical Society Student Texts 22, Cambridge University Press, Cambridge (1991).

[3] N. Chigira, M. Harada, M. Kitazume, Some self-dual codes invariant under the Hall-Janko group, preprint.

[4] R. Mathon and A. Rosa, 2-(v,k,λ) designs of small order, in *CRC Handbook of Combinatorial Designs*, C.J. Colbourn and J.H. Dinitz, (Eds.), CRC Press, Boca Raton, 1996, 3-41.

[5] 永尾汎, 群とデザイン, 岩波書店, 1974.

[6] M. Suzuki, A simple group of order, 448,345,497,600, *1969, Theory of Finite Groups* (Symposium, Harvard Univ, Cambridge, Mass,1968), 113-119, Benjamin, New York.

[5]過去に W_{10} を 3 個並べたデザインから Latin square graph および 10 次直交ラテン方陣の構成を試みた事があった。全く失敗に終わったが今回の研究に活かされる事となった。